АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Лектор: доцент А.А. Егоров

1 семестр

Аффинная и метрическая геометрии координатного пространства

Векторные операции между векторами из $\mathbf{R}^n$. Скалярное произведение векторов из $\mathbf{R}^n$, его свойства. Длина вектора. Теорема Коши - Буняковского. Неравенство треугольника для векторов. Углы между векторами и векторными прямыми. Ортогональные векторы и векторные подпространства в $\mathbf{R}^n$. Ортогональное дополнение векторного подпространства V в $\mathbf{R}^n$ и ортогональная проекция $\mathbf{R}^n$ на V. Формула для ортогональной проекции вектора $a \in \mathbf{R}^n$ на векторную прямую $V=\mathbf{R}b$. Уравнение векторной гиперплоскости в $\mathbf{R}^n$. Параметрические и канонические уравнения для векторной прямой в $\mathbf{R}^n$. Угол между векторной прямой и векторным подпространством. Определение угла между двумя векторными подпространствами в $\mathbf{R}^n$ (при условии, что коразмерность их пересечения хотя бы в одном из них не превышает 1). Теорема о двух перпендикулярах на векторной плоскости. Обобщенная теорема о двух перпендикулярах и ее следствия. Угол между вектором и векторным подпространством. Ортогональная составляющая вектора относительно векторного подпространства. Объем набора векторов в $\mathbf{R}^n$. Векторы аффинного подпространства W, лежащие (строго) по одну сторону векторной гиперплоскости $V \subset W$. Теорема о сложении объемов параллелепипедов. Процесс ортогонализации набора векторов $(a_1,...,a_k)$ и его применение к вычислению объема набора векторов. Матрица и определитель Грама набора векторов. Взаимная матрица Грама и взаимный определитель Грама двух наборов векторов. Сохранение определителя Грама при перестановке набора векторов. Сохранение определителей Грама (взаимного и обычного) при процессе ортогонализации. Связь определителя Грама набора векторов с объемом этого набора векторов.

Векторное произведение набора n-1 векторов в $\mathbf{R}^n$, смешанное произведение набора n векторов в $\mathbf{R}^n$, их элементарные свойства. Формула перемножения двух смешанных произведений. Абсолютная величина смешанного произведения. Классы ориентации базисов в $\mathbf{R}^n$ и их связь с непрерывными деформациями базисов. Формула Лагранжа для скалярного произведения двух векторных произведений наборов векторов в $\mathbf{R}^n$. Длина векторного произведения набора векторов. Формулы двойного векторного произведения в $\mathbf{R}^n$ и в $\mathbf{R}^3$. Тождество Якоби для векторного произведения в $\mathbf{R}^3$. Смешанное произведение векторов в $\mathbf{R}^3$. Формула для векторного произведения двух векторных произведений в $\mathbf{R}^3$. Векторное и смешанное произведения в $\mathbf{R}^2$. Обобщенное тождество Якоби для векторного произведения в $\mathbf{R}^n$. Взаимные базисы векторного подпространства V в $\mathbf{R}^n$. Нахождение базиса векторного пространства $\mathbf{R}^n$, взаимного к данному его базису, с помощью векторного и смешанного произведения векторов.

Расстояние между двумя непустыми множествами точек в $\mathbf{R}^n$, его свойства. Аффинные подпространства в $\mathbf{R}^n$ и их направляющие векторные подпространства. Размерность аффинного подпространства в $\mathbf{R}^n$. Аффинные прямые и плоскости. Определение ортогональности аффинных подпространств. Определение ортогональности аффинного подпространства и вектора. Слабо и сильно параллельные аффинные подпространства. Угол между аффинными подпространствами. Сдвиги (параллельные переносы) в пространстве $\mathbf{R}^n$, их свойства. Пересечение аффинных подпространств. Аффинная система координат на аффинном подпространстве V в $\mathbf{R}^n$. Векторное параметрическое уравнение аффинного подпространства V в $\mathbf{R}^n$. Система параметрических уравнений в координатах для V. Параметрические уравнения аффинной прямой в координатах. Канонические уравнения аффинной прямой в $\mathbf{R}^n$. Задание аффинного подпространства в $\mathbf{R}^n$ системой линейных уравнений с линейно независимыми левыми частями. Коразмерность аффинного подпространства в содержащем его аффинном подпространстве. Аффинные гиперплоскости в аффинном подпространстве. Уравнение аффинной гиперплоскости в $\mathbf{R}^n$. Ортогональная проекция точки $A \in \mathbf{R}^n$ на аффинное подпространство $M \subseteq \mathbf{R}^n$ и расстояние от точки A до подпространства M. Теорема о расстоянии между двумя аффинными подпространствами. Формула для расстояния между двумя произвольными аффинными подпространствами M и N в $\mathbf{R}^n$. Случаи скрещивающихся ($M \cap N = 0$) и слабо параллельных аффинных подпространств M и N. Формулы для расстояний между аффинными прямыми и аффинными подпространствами в различных случаях. Общий перпендикуляр к двум аффинным подпространствам. Расстояние между аффинной гиперплоскостью N в $\mathbf{R}^n$, заданной одним уравнением и точкой $A \in \mathbf{R}^n$ или аффинным подпространством M, слабо параллельным гиперплоскости N. Расстояние между двумя параллельными аффинными гиперплоскостями в $\mathbf{R}^n$.

Аффинные комбинации точек. Аффинные оболочки множеств точек. Теорема о характеризации аффинных подпространств с помощью прямых, проведенных через их точки. Описание аффинных оболочек с помощью аффинных комбинаций. Расположение двух аффинных подпространств на сильно параллельных аффинных подпространствах. Теорема об аффинной оболочке двух аффинных подпространств. Направляющее векторное подпространство аффинной оболочки двух аффинных подпространств. Размерность аффинной оболочки двух аффинных подпространств. Критерий слабой параллельности двух аффинных подпространств. линейно и аффинно независимые системы точек. Критерий аффинной независимости набора точек. Аффинные реперы в аффинных подпространствах. Связь аффинных реперов и базисов. Теорема о продолжении набора аффинно независимых точек до аффинного репера и ее следствия. Коллинеарные и компланарные множества точек. Барицентрические координаты. Барицентр системы взвешенных точек. Эквибарицентр набора точек. Уравнение аффинной гиперплоскости в $\mathbf{R}^n$, проходящей через n данных неколлинеарных точек.

Симплексы, их грани. Внутренность и граница симплекса. Противоположные грани. Коразмерность грани. Центр тяжести и медианы симплекса. Деление отрезка в данном отношении. Теорема о пересечении медиан симплекса.

2 семестр

Алгебраические поверхности и квадрики

Полиномы и полиномиальные функции. Идеал полиномов, аннулирующих данное множество точек $X \subseteq \mathbf{R}^n$. Алгебра полиномиальных функций на множестве точек X. Множества точек в $\mathbf{R}^n$, на которых ненулевые полиномы не обращаются в нуль. Алгебраическая поверхность, ее порядок. Конечные объединения и пересечения алгебраических поверхностей. Теорема Гильберта и пересечение бесконечного множества алгебраических поверхностей. Неприводимые алгебраические поверхности. Теорема о неприводимом разложении произвольной алгебраической поверхности. Критерий неприводимости алгебраической поверхности. Неприводимость аффинных подпространств. Алгебра полиномиальных функций на аффинном подпространстве. Полиномиальное отображение координатных пространств, его степень. Аффинные отображения. Полный прообраз алгебраической поверхности при полиномиальном отображении. Замкнутость алгебраических поверхностей. Нигде не плотность собственных алгебраических поверхностей. Примеры образов алгебраических поверхностей при полиномиальных отображениях.

Пересечение алгебраической поверхности с аффинной прямой. Определение допустимой алгебраической поверхности. Допустимость алгебраических поверхностей порядка 2. Действие аффинных автоморфизмов пространства $\mathbf{R}^n$ на алгебраических поверхностях. Лемма о вещественных корнях. Основная теорема о допустимых поверхностях и ее следствия. Описание приводимых алгебраических поверхностей порядка 2. Теорема о неприводимом разложении допустимой поверхности. Теорема об алгебраических поверхностях, определенных полиномами нечетной степени, и ее следствия. Пример приводимой алгебраической поверхности степени 4, определенной неприводимым полиномом степени 4.

Определение квадрик. Собственные квадрики (непустые квадрики, не являющиеся аффинными подпространствами.) Включение квадрик. Единственность уравнения собственной квадрики. Симметрии пространства $\mathbf{R}^n$ относительно точек. Центры симметрии точечного множества. Множество центров аффинного подпространства в $\mathbf{R}^n$. Нахождение центров квадрик. Малый и большой ранг квадратичного полинома. Невырожденные квадратичные полиномы и квадрики.

Действие полиномиальных отображений на полиномы. Ортогональные аффинные (изометрические) преобразования пространства $\mathbf{R}^n$. Аффинно и метрически эквивалентные полиномы. Понятие об аффинной и метрической классификации квадратичных полиномов. Аффинная (соответственно, метрическая) эквивалентность двух точечных множеств в $\mathbf{R}^n$. Теорема об аффинной классификации квадратичных полиномов. Понятие о метрических инвариантах и полуинвариантах квадратичных полиномов. Построение многочленов $I_k, \widetilde{I}_k$. Ассоциированная квадратичная форма от n+1 переменных с квадратичным полиномом от n переменных. Ассоциированный линейный автоморфизм пространства $\mathbf{R}^{n+1}$ с аффинным автоморфизмом пространства $\mathbf{R}^n$. Теорема о метрической инвариантности (соответственно, полуинвариантности) многочленов I_k (k=1,...,n+1) (соответственно, $\widetilde{I}_k$ (k=1,...,n). Теорема о метрической классификации квадратичных полиномов. Теорема о достаточных условиях, для того чтобы многочлен $\widetilde{I}_k$ был метрическим инвариантом данного квадратичного полинома g. Теорема о метрической классификации квадрик. Канонические уравнения невырожденных квадрик (при метрической классификации). Типы невырожденных квадрик (эллипсоиды, гиперболоиды, эллиптические и гиперболические параболоиды).

Канонические уравнения и названия типов невырожденных квадрик при n=3 и n=2. Метрическая классификация вырожденных собственных квадрик в $\mathbf{R^n}$ (конусы, цилиндры и пары гиперплоскостей). Метрические инварианты квадрик. Аффинная классификация невырожденных квадрик.

Теорема о полноте системы метрических инвариантов I_k (k=1,...,n+1). Особые и неособые точки квадрик. Касательная гиперплоскость к квадрике в ее неособой точке. Особые и асимптотические направления невырожденной квадрики в $\mathbf{R^n}$, ее асимптотический конус. Главные направления. Вершины параболоидов. Сопряженная диаметральная гиперплоскость к неособому направлению квадрики, ее геометрический смысл в случае неасимптотического направления. Прямолинейные образующие квадрик. Преобразование симметрии пространства $\mathbf{R^n}$ относительно аффинного подпространства. Аффинные подпространства симметрии точечных множеств и квадрик в $\mathbf{R^n}$.

Оси симметрии, директориальные и фокальные свойства невырожденных квадрик в $\mathbf{R^2}$ - эллипса, гиперболы и параболы. Уравнения касательных прямых к ним. Геометрические свойства невырожденных квадрик в $\mathbf{R^3}$ - эллипсоидов, гиперболоидов и параболоидов. Уравнения касательных плоскостей к ним. Оси и плоскости симметрии. Прямолинейные образующие однополостного параболоида и гиперболического параболоида.

Литература

1. Александров П.С. *Лекции по аналитической геометрии*. М.: Наука, 1968.
2. Берже М. *Геометрия*, тома 1, 2. М.: Мир, 1984.
3. Делоне Б. Н., Райков Д. А. *Аналитическая геометрия*, тома 1, 2. М.: Гостехиздат, 1948.
4. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. *Линейная алгебра и многомерная геометрия*. М.: Наука, 1970.
5. Ильин А. В., Лозняк Э. Г. *Аналитическая геометрия*. 4-е изд. М.: Наука, 1988.
6. Кострикин А. И., Манин Ю. И. *Линейная алгебра и геометрия*. М.: Наука, 1986.
7. Курош А.Г. *Курс высшей алгебры*. 11-е изд. М.: Наука, 1975.
8. Мальцев А. И. *Основы линейной алгебры*. 3-е изд. М.: Наука, 1970.
9. Моденов П. С. *Аналитическая геометрия*. М.: МГУ, 1969.
10. Моденов П. С., Пархоменко А. С. *Сборник задач по аналитической геометрии*. М.: Наука, 1976.
11. Постников М. М. *Аналитическая геометрия*. М.: Наука, 1979.
12. Розенфельд Б. А. *Многомерные пространства*. М.: Наука, 1968.