

Программа курса «Теория Галуа», 2012 год.

Лектор – профессор Романовский Н.С.

1. Группа, примеры. Порядок элемента. Подгруппа. Циклическая подгруппа, описание циклических групп. Подгруппа, порождённая множеством. Смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа.

2. Гомоморфизм групп. Действие группы на множестве. Вложение конечной группы в группу подстановок. Орбиты и стабилизаторы. Сопряжение в группе. Нормальная подгруппа и фактор-группа. Теорема о гомоморфизмах для групп. Прямое произведение групп. Строение конечно порождённых абелевых групп.

3. Существование в конечной группе элемента простого порядка. Теорема Силова. Описание групп порядка pq .

4. Коммутаторы и коммутант. Разрешимая группа. Существование субнормального ряда с циклическими факторами в конечной разрешимой группе. Ряд коммутантов группы S_4 . Неразрешимость группы S_n при $n \geq 5$. Центр группы. Разрешимость конечной p -группы.

5. Кольцо, примеры. Идеал в кольце, фактор-кольцо. Теорема о гомоморфизмах для колец. Разложение кольца вычетов в прямую сумму примарных колец. Функция Эйлера.

6. Поле, примеры. Характеристика поля, простое подполе. Расширение полей. Степень расширения, степень башни расширений. Подполе, порождённое множеством. Алгебраическое расширение. Структура простого расширения, изоморфизм простых расширений. Конечное расширение. Поле разложения. Композит расширений.

7. Алгебраическое замыкание. Продолжение изоморфизма полей на алгебраические замыкания.

8. Нормальное расширение. Сепарабельная степень. Сепарабельное расширение. Теорема о примитивном элементе.

9. Конечные поля: существование, единственность, автоморфизмы, подполя.

10. Расширение Галуа, его Галуа. Теорема Артина. Основная теорема теории Галуа.

11. Корни из единицы. Линейная независимость автоморфизмов поля. Структура расширений с циклической группой Галуа. Критерий разрешимости уравнений в радикалах. Построения с помощью циркуля и линейки, их алгебраический эквивалент. Задачи древних греков на построение.

12. Определение группы Галуа для бесконечных расширений, проконечные группы. Кольцо целых p -адических чисел и про- p -группы. Современные проблемы теории Галуа.

Список основной литературы: 1. Ленг С. Алгебра. М. Мир. 1968. 2. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М. Наука. 1979. 3. Постников М.М. Теория Галуа. М. Физматгиз. 1963. 4. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М. Наука. 1982.