

## ТЕОРИЯ ГАЛУА

*д.ф.-м.н., профессор Романовский Н.С.*

- 1.1. Группа, примеры. Порядок элемента. Подгруппа. Циклическая подгруппа, описание циклических групп. Подгруппа, порождённая множеством. Смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Гомоморфизм групп, его ядро.
- 1.2. Действие группы на множестве, точное действие. Вложение конечной группы в группу подстановок. Разбиение на орбиты. Транзитивное действие. Стабилизатор. Мощность орбиты равна индексу стабилизатора. Сопряжённые элементы. Действие группы на себе сопряжениями, классы сопряжённых элементов. Критерий сопряжённости подстановок
- 1.3. Произведение множеств в группе. Если  $A$  нормализует  $B$  или наоборот, то  $AB$  - подгруппа. Определение фактор-группы. Канонический гомоморфизм, его ядро. Теорема о гомоморфизмах. Прямое произведение групп (внешнее и внутреннее определение). Строение конечно порождённых абелевых групп.
- 1.4. Коммутатор, коммутант группы. Лемма об абелевой фактор-группе. Субнормальный и нормальный ряды. Ряд коммутантов. Теорема о равносильности трех определений разрешимой группы. Существование в конечной разрешимой группе субнормального ряда с циклическими факторами.
- 1.5. Замкнутость класса разрешимых групп относительно подгрупп, гомоморфных образов и расширений. Центр группы. Нетривиальность центра конечной  $r$ -группы, разрешимость конечной  $r$ -группы. Ряды коммутантов в группах подстановок.
- 1.6. Теорема Коши о существовании в группе элемента простого порядка. Силовские подгруппы. Теорема Силова.
- 2.1. Кольцо. Идеал в кольце, идеал, порожденный множеством. Кольцо главных идеалов. Теорема о гомоморфизмах для колец. Разложение кольца вычетов в прямую сумму примарных колец. Функция Эйлера.
- 2.2. Поле, примеры. Характеристика поля, простое подполе. Расширение полей. Степень расширения, степень башни расширений. Подполе, порождённое множеством. Структура простого алгебраического расширения, изоморфизм простых расширений.
- 2.3. Алгебраическое расширение. Конечное расширение, его алгебраичность. Совпадение класса конечных расширений с классом расширений, порожденных конечным числом алгебраических элементов. Расширение, полученное присоединением алгебраических элементов, - алгебраическое.

- Композит полей, расширений. Поле разложения. Композит полей разложений.
- 2.4. Алгебраическое замыкание, существование. Продолжение изоморфизма полей на алгебраические замыкания.
  - 2.5. Нормальное расширение. Сепарабельная степень конечного расширения. Сепарабельная степень башни расширений. Сепарабельный многочлен, сепарабельный над полем элемент. Сепарабельное расширение. Расширение, полученное присоединением сепарабельных элементов – сепарабельно. Сепарабельность транзитивна. В полях характеристики 0 все сепарабельно.
  - 2.6. Конечные поля: существование, единственность, автоморфизмы, подполя. Теорема о примитивном элементе.
  - 3.1. Расширение Галуа, группа Галуа. Теорема Артина. Основная теорема теории Галуа.
  - 3.2. Соответствие Галуа для поля разложения над  $\mathbb{Q}$  многочлена  $x^4-2$ . Группа Галуа многочлена, неприводимого многочлена, общего многочлена. Теорема о подъеме.
  - 3.3. Корни из единицы, круговое расширение и его группа Галуа. Линейная независимость автоморфизмов поля. Норма элемента, теорема 90 Гильберта. Теорема о циклическом расширении.
  - 3.4. Разрешимое расширение и его свойства. Радикальное расширение. Совпадение класса разрешимых расширений с классом радикальных расширений. Группа Галуа общего многочлена. Неразрешимость в радикалах уравнения  $x^5-10x+5$ .
  - 3.5. Построения с помощью циркуля и линейки, их алгебраический эквивалент. Пифагорово расширение, его степень, пифагоровость нормального расширения степени  $2n$ . Задача о построении циркулем и линейкой правильного  $n$ -угольника.
  - 3.6. Расширение Галуа бесконечной степени, его группа Галуа. Представление группы Галуа в виде проективного предела конечных групп Галуа. Топология на группе Галуа. Проконечные группы, топологическая характеристика. Замкнутые подгруппы. Основная теорема Галуа в общем случае.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ленг С. *Алгебра*. – М. Мир, 1968.
2. Ван дер Варден Б.Л. *Алгебра*. Издание 3-е стереотипное. – М.: Лань, 2004.
3. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. *Основы теории групп*. Издание 5-е стереотипное. – М.: Лань, 2009.
4. Постников М.М. *Теория Галуа*. – М.: Факториал Пресс, 2003.