ЗАДАЧИ, РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ДЛЯ СДАЧИ ЭКЗАМЕНА ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

I. Теоретические задачи

1. Пусть X - полное метрическое пространство и B_n, $n \in N$, - последовательность вложенных замкнутых шаров, радиус которых стремится к нулю. Доказать, что существует единственная точка, принадлежащая всем шарам.

2. Доказать, что метрическое пространство полно, если в нем любая последовательность замкнутых вложенных шаров, чей радиус стремится к нулю, имеет непустое пересечение.

3. Пусть множества Y_1, Z_1 всюду плотны в полных метрических пространствах Y и, соответственно, Z. Доказать, что если Y_1 и Z_1 изометричны, то Y и Z изометричны.

4. Доказать ограниченность фундаментальной последовательности в метрическом пространстве.

5. Доказать, что полное метрическое пространство без изолированных точек несчетно.

6. Пусть X - полное метрическое пространство и $A : X \to X$ - отображение такое, что A^p $(p > 1)$ есть сжатие. Доказать, что отображение A имеет единственную неподвижную точку в X.

7. Доказать, что в сепарабельном метрическом пространстве множество изолированных точек не более чем счетно. Привести пример несепарабельного пространства.

8. Доказать, что любое множество сепарабельного метрического пространства образует сепарабельное метрическое подпространство.

9. Доказать ограниченность вполне ограниченного множества в метрическом пространстве. Привести пример ограниченного, но не вполне ограниченного множества.

10. Пусть X - метрическое пространство такое, что из любой его последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Доказать, что X - полное, вполне ограниченное пространство.

11. Доказать, что компактное пространство сепарабельно. Привести пример сепарабельного, но не компактного пространства.

12. Доказать, что множество в метрическом пространстве вполне ограничено тогда и только тогда, когда из любой его последовательности можно выбрать фундаментальную подпоследовательность.

13. Пусть X - полное метрическое пространство, $M \subset X$. Доказать, что множество M образует полное метрическое пространство тогда и только тогда, когда M замкнуто в X.

14. Доказать критерий относительной компактности множества M в пространстве l_p, $1 < p < \infty$.

15. Доказать, что компактное множество в пространстве $C[a, b]$ равностепенно непрерывно.

16. Доказать, что непрерывное отображение компакта в метрическое пространство равномерно непрерывно.

17. Доказать, что непрерывный функционал, определенный на компактном множестве, достигает на этом множестве своей точной и нижней граней.

18. Доказать, что пересечение вложенных компактных множеств в метрическом пространстве не пусто. Привести пример вложенных замкнутых множеств, чье пересечение пусто.

19. Доказать, что любое конечномерное нормированное пространство банахово. Привести пример неполного конечномерного метрического пространства.

20. Доказать замкнутость конечномерного линейного многообразия в банаховом пространстве. Привести пример незамкнутого бесконечномерного линейного многообразия.

21. Доказать, что компактное множество в бесконечномерном банаховом пространстве нигде не плотно.

22. Доказать, что в конечномерном нормированном пространстве множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Привести примеры замкнутых и ограниченных множеств в пространствах $C[0,1]$, l_2, $L_2[-\pi,\pi]$, которые не являются компактными.

23. Доказать, что ортонормированная система в сепарабельном гильбертовом пространстве не более чем счетна.

24. Доказать, что замыкание линейного многообразия в нормированном пространстве есть линейное многообразие.

25. Доказать, что линейное многообразие L в гильбертовом пространстве H всюду плотно в H тогда и только тогда, когда ортогональное дополнение к L состоит только из нуля.

26. Доказать, что шар произвольного радиуса R, $R \neq 0$, не является относительно компактным множеством в гильбертовом пространстве.

27. Пусть $e_n, n \in N,$ - произвольная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H. Доказать, что для любого $x \in H$ справедливо неравенство Бесселя

$$\sum |x_n|^2 \leq ||x||^2, \qquad \text{где} \quad x_n = (x, e_n), n \in N.$$

28. Доказать, что в гильбертовом пространстве H для любого $x \in H$ ряд Фурье $\sum x_n e_n$ по произвольной ортонормированной системе e_n, $n \in N$, сходится в H.

29. Доказать, что если в гильбертовом пространстве H для $x \in H$ справедливо

$$||x||^2 = \sum |x_n|^2, \qquad \text{где} \quad x_n = (x, e_n), n \in N,$$

то ряд Фурье $\sum x_n e_n$ по данной ортонормированной системе e_n сходится в H к x.

30. Пусть X, Y - нормированные пространства и линейный оператор $A : X \to Y$ определен на всем X. Доказать, что A непрерывен в X тогда и только тогда, когда он ограничен.

31. Доказать, что линейный оператор $A : X \to Y$ непрерывен в X тогда и только тогда, когда множество его значений является равномерно ограниченным в Y хотя бы на одном открытом шаре из пространства X.

32. Доказать, что линейный функционал f, действующий в нормированном пространстве X, непрерывен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто в X.

33. Доказать, что если X - ненулевое нормированное пространство, то у него существует ненулевое сопряженное пространство X^*.

34. Доказать, что сопряженное пространство X^* всегда банахово.

35. Пусть X - бесконечномерное нормированное пространство, доказать, что X^* также бесконечномерно.

36. Доказать, что в любом нормированном пространстве X справедливо соотношение $||x||_X = sup\{|f(x)| : ||f||_{X^*} = 1\}$.

37. Доказать, что если на элементе $x \in X$ нормированного пространства X значения всех функционалов из X^* равны нулю, то $x = 0$.

38. Доказать, что для любых двух различных элементов x, y нормированного пространства X найдется функционал $f \in X^*$ такой, что $f(x) \neq f(y)$.

39. Доказать, что линейное многообразие L всюду плотно в нормированном пространстве X тогда и только тогда, когда из условия, что $f(x) = 0$ для любого $x \in L$ и $f \in X^*$ следует, что $f = 0$.

40. Доказать, что существует единственное продолжение линейного ограниченного функционала, определенного на подпространстве L гильбертова пространства H, на все H с сохранением нормы.

41. Доказать, что сильно сходящаяся последовательность в нормированном пространстве ограничена.

42. Доказать, что слабо сходящаяся последовательность в нормированном пространстве ограничена.

43. Доказать, что если последовательность x_n в нормированном пространстве X сходится сильно, то она сходится и слабо. Привести пример, когда обратное утверждение неверно.

44. Доказать, что линейный непрерывный оператор $A \in L(X, Y)$ переводит последовательность x_n, слабо сходящуюся последовательность в X, в последовательность Ax_n, слабо сходящуюся в Y; X, Y - нормированные пространства.

45. Доказать, если x_n сходится слабо к x, то $||x|| \leq \underline{\lim}||x_n||$.

46. Пусть x_n сходится слабо к x. Доказать, что существует последовательность $\tilde{x_n}$ линейных комбинаций элементов x_k, $k = 1, 2, ...$, такая, что $\tilde{x_n}$ сходится к x сильно.

47. Доказать, что если последовательность непрерывных функций в пространстве $C[a, b]$ сходится слабо, то она ограничена и сходится поточечно.

48. Доказать, что если последовательность x_n в пространстве l_p $(1 < p < \infty)$ сходится слабо, то она ограничена и сходится покоординатно.

49. Доказать, что в конечномерном нормированном пространстве последовательность x_n сходится сильно тогда и только тогда, когда она сходится слабо.

50. Доказать, что если последовательность функционалов f_n сходится $*$-слабо в X^*, X- банахово пространство, то нормы $||f_n||$ равномерно ограничены.

51.Доказать, что линейный оператор $A : X \to Y$ обратим $\iff kerA = \{x \in X : Ax = 0\}$ состоит лишь из нуля.

52. Доказать, что у линейного оператора $A : X \to Y$ существует обратный ограниченный оператор тогда и только тогда, когда существует константа $M > 0$ такая, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $||Ax||_Y \geq M||x||_X$.

53. Пусть X - банахово пространство и операторы A, A^{-1} принадлежат пространству $L(X)$. Доказать существование числа $\varepsilon > 0$ такого, что любой оператор $B \in L(X)$, удовлетворяющий условию $||A - B|| < \varepsilon$, также имеет оператор $B^{-1} \in L(X)$.

54. Пусть X, Y - нормированные пространства, $A_n \in L(X, Y)$, и множество $A_n x$, $n = 1, 2, ...$, равномерно ограничено на некотором шаре $B[a, R] \subset X$, $R > 0$. Доказать, что последовательность норм $||A_n||$ ограничена.

55. Доказать, что обратный оператор к замкнутому также замкнут.

56. Пусть A - линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве X. Доказать, что A замкнут тогда и только тогда, когда его область определения $D(A)$ замкнута в X.

57. Пусть X - линейное пространство и на нем заданы две нормы $||\cdot||_i$, $i = 1, 2$. Доказать, что если $(X, ||\cdot||_i)$ - банаховы пространства, и одна норма мажорирует другую, то нормы эквивалентны.

58. Пусть A - линейный оператор, отображающий все банахово пространство X в банахово пространство Y. Доказать, что если оператор A переводит любую сильно сходящуюся в X последовательность x_n ($x_n \to x$) в последовательность Ax_n, сходящуюся в Y слабо ($Ax_n \to Ax$ слабо), то оператор A непрерывен.

59. Пусть X - банахово, Y - нормированное пространства, A_n, $A \in L(X, Y)$. Доказать: если для любого $x \in X$ $A_n x \to Ax$ $(n \to \infty)$, то последовательность норм $||A_n||$ ограничена.

60. Доказать, что спектр оператора $A \in L(X)$, где X - банахово пространство, компактное множество.

61. Доказать, что спектр оператора $A \in L(X)$, где X - банахово пространство, непустое множество.

62. Доказать, что нормы линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве и его сопряженного совпадают.

63. Пусть $A \in L(H)$, $A = A^*$, H - гильбертово пространство, и $(Ax, x) \leq 0$ для любого $x \in H$. Доказать, что существует $(I - A)^{-1} \in L(H)$.

64. Пусть $A \in L(H)$, $A = A^*$, H - гильбертово пространство, и $ImA = H$. Доказать, что существует $A^{-1} \in L(H)$.

65. Доказать, что самосопряженный оператор $A \in L(H)$, H - гильбертово пространство, имеет вещественный спектр.

66. Доказать, что самосопряженный оператор $A \in L(H)$, H - гильбертово пространство, не имеет остаточного спектра.

67. Пусть $A \in L(H)$, $A = A^*$, H - гильбертово пространство, и $\lambda > sup\{(Ax, x), ||x|| = 1\}$. Доказать, что λ- регулярная точка оператора A.

68. Пусть $A \in L(H)$, $A = A^*$, H - гильбертово пространство, и $\lambda = inf\{(Ax, x), ||x|| = 1\}$. Доказать, что λ - спектральная точка оператора A.

69. Пусть A-самосопряженный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H и при некотором $\lambda \in C$ для всех $x \in H$ справедлива оценка $||(\lambda I - A)x|| \geq K||x||$. Доказать, что множество значений оператора $\lambda I - A$ всюду плотно в H .

70. Доказать, что для любого проектора P в гильбертовом пространстве H множество $L = \{x \in H : Px = x\}$ есть подпространство в H, при этом для каждого $x \in H$ справедливо, что $Px = x_L$, где x_L есть проекция x на H.

71. Доказать, что проектор P в гильбертовом пространстве H на подпространство L является вполне непрерывным оператором тогда и только тогда, когда L - конечномерно.

72. Доказать, что оператор $A \in L(H)$, H - гильбертово пространство, компактен тогда и только тогда, когда сопряженный оператор A^* компактен.

73. Доказать, что оператор $A \in L(H)$, H - гильбертово пространство, компактен тогда и только тогда, когда оператор A^*A компактен.

74. Доказать, что компактный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.

75. Доказать, что спектр компактного оператора предельной точкой может иметь только точку $\lambda = 0$.

76. Доказать, что подпространство, соответствующее отличному от нуля собственному числу вполне непрерывного оператора, конечномерно.

77. Доказать, что ненулевой самосопряженный вполне непрерывный оператор имеет хоть одно отличное от нуля собственное число.

78. Доказать, что в бесконечномерном нормированном пространстве $\lambda = 0$ всегда является точкой спектра компактного оператора. Привести пример компактного оператора в конечномерном пространстве, спектр которого не содержит нуля.

79. Доказать, что функция ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$ ограничена.

80. Доказать, что абсолютно непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция имеет ограниченную вариацию. Привести пример непрерывной функции на отрезке $[a, b]$, имеющей бесконечное изменение.

доцент кафедры прикладной математики НГУ,
к.ф.-м.н. Люлько Н.А.

II. Практические задачи

Номера задач указаны по учебному пособию Люлько Н.А., Максимова О.Д., Ляпидевский В.Ю. "Функциональный анализ", Новосибирск, 2005 г.

1. Замкнутость, ограниченность, всюду плотность, нигде не плотность, вполне ограниченность, компактность множеств в метрических пространствах.

1.53, 1.84, 1.93, 1.96, 1.105, 1.117, 1.121, 1.125, 1.131, 1.132, 1.134, 1.136, 1.137, 1.162, 1.187-1.189, 1.191, 1.192.

2. Линейные операторы, функционалы. Ограниченность, неограниченность, непрерывность, норма.

2.1 - 2.3, 2.16, 2.31, 2.35, 2.45, 2.49, 2.50, 2.52 - 2.58.

3. Равномерная, сильная и слабая сходимости в пространстве $L(X, Y)$. Сильная, слабая, $*$ - слабая сходимости в сопряженном пространстве X^*.

2.64 - 2.66, 2.177; 2.174 - 2.176, 2.180, 2.191.

4. Сильная и слабая сходимости в нормированных пространствах.

2.170 - 2.173, 2.183, 2.184, 2.186.

5. Обратные операторы.

2.77 - 2.79, 2.80 (а,б), 2.82, 2.86, 2.92.

6. Спектр и резольвента линейного оператора, классификация точек спектра.

2.95, 2.96, 2.99, 2.108, 2.109 - 2.112.

7. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их свойства.

2.115, 2,117, 2.118, 2.119, 2.121-2.125, 2.129, 2.130, 2.145, 2.167.

8. Замкнутые операторы.

2.152, 2.153, 2.155, 2.156, 2.158, 2.159, 2.164, 2.165.

9. Компактные операторы, их свойства.

2.200-2.204, 2.207, 2.209-2.211, 2.220.

10. Решение операторных уравнений

$$(\lambda I - A)x = y,$$

где $\lambda \in C$, X - банахово пространство, $A \in L(X)$ - компактный оператор.

2.228, 2.229, 2.232, 2.233.

доцент кафедры прикладной математики НГУ,
к.ф.-м.н. Люлько Н.А.

доцент кафедры прикладной математики НГУ,
к.ф.-м.н. Максимова О.Д.