ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Лектор: доцент Н. А. Люлько

5 – 6 семестр

1. Метрические пространства. Полнота. Теорема о пополнении. Критерий полноты метрического пространства. Принцип сжимающих отображений. Теорема Бэра. Компактность. Критерий компактности в метрическом пространстве. Теорема Арцела. ([1], гл. 2; [2], гл. 1; [3], гл. 1).

2. Линейные, нормированные пространства. Гильбертовы пространства. Тождество параллелограмма. Теорема о разложении гильбертова пространства в прямую сумму. Ортонормированные системы. Неравенство Бесселя. Полные ортонормированные системы. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. ([1], гл. 3; [2], гл. 2; [3], гл. 4; [5], гл. 3).

3. Линейные операторы в нормированных пространствах. Пространство линейных непрерывных операторов; его полнота. Сопряженное пространство. Теорема Хана – Банаха. Общий вид линейных ограниченных функционалов в пространстве непрерывных функций, в гильбертовом пространстве. ([1], гл. 4; [2], гл. 3–4; [3], гл. 5; [5], гл. 4).

4. Теорема Банаха – Штейнгауза. Слабая сходимость, слабая ограниченность в нормированных пространствах. Слабая сходимость в сопряженном пространстве. Рефлексивность нормированных пространств. ([1], гл. 4; [2], гл.4; [3], гл. 8).

5. Обратные операторы. Теорема Неймана. Спектр и резольвента линейного оператора. ([1], гл.4; [3], гл. 13; [5], гл. 3, 6).

6. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике. ([1], гл. 4; [2], гл.3).

7. Сопряженные операторы в банаховом пространстве. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Элементы спектральной теории. ([2], гл. 7; [3], гл. 9, [5], гл. 6).

8. Компактные операторы. Основные свойства компактных операторов. Критерий конечномерности нормированного пространства. Альтернатива Фредгольма. Теоремы Фредгольма. Полнота собственных функций самосопряженного вполне непрерывного оператора. ([1], гл. 4, 9; [2], гл.6; [3], гл. 9, 13).

9. Функции ограниченной вариации. Интеграл Римана – Стилтьеса. Мера Лебега – Стилтьеса. Интеграл Лебега – Стилтьеса. ([1], гл. 5–7; [4], гл. 3–4, 8–9).

Программа семинарских занятий

5 семестр

1. Счетные множества. Метрические пространства.

2. Открытые, замкнутые множества.

3. Сходимость в метрических пространствах. Полнота, пополнение.

4. Плотность, всюду плотность, сепарабельность метрических пространств.

5–6. Компактность, вполне ограниченность, относительная компактность.

7. *Контрольная работа*.

8. Нормированные пространства.

9–10. Гильбертовы пространства.

11. Линейные непрерывные функционалы

12. Теорема Хана – Банаха. Следствия из теоремы.

13. Сопряженное пространство. Теоремы Рисса.

14–15. Функции ограниченной вариации. Интеграл Римана – Стилтьеса.

16. *Контрольная работа.*

6 семестр

1–2. Линейные ограниченные операторы. Норма, сходимость операторов.

3. Обратные операторы.

4–5. Спектр, резольвента линейного оператора.

6. Сопряженные, самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.

7. *Контрольная работа.*

8. Теорема Банаха – Штейнгауза. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.

9–10. Естественное вложение нормированного пространства во второе сопряженное. Слабая сходимость в нормированных пространствах.

11–12. Компактные операторы.

13. Теоремы Фредгольма. Интегральные уравнения с вырожденным ядром.

14. *Контрольная работа.*

Литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1981.
2. Люстерник Л. А.. Соболев В. И. *Элементы функционального анализа*. М.: Наука, 1965.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1984.
4. Натансон И. П. *Теория функций вещественной переменной*. М.: Гостехиздат, 1957.

Дополнительная литература

5. Треногин В. А. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1980.
6. Треногин В. А., Писаревский Е. М., Соболева Т. С. *Задачи и упражнения по функциональному анализу.* М.: Наука, 1984.
7. Ляпидевский В. Ю., Люлько Н. А., Максимова О. Д. *Функциональный анализ. (Теоремы и задачи)* /Учебное пособие /Новосиб. гос. ун-т. Новосбирск, 1998.