ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Лектор: профессор С.С. Кутателадзе

5 семестр

Векторные пространства. Примеры и способы задания векторных пространств, линейных операторов и функционалов. Выпуклые функции, сублинейные функционалы и полунормы. Наличие субдифференциалов.

[1] пар. 2.1-2.3; [2] пар. 3.1-3.2; [3] пар. 2.1-2.3, пар. 3.1-3.4

Метрические пространства. Метрические топология и равномерность. Классификация точек по отношению к заданному множеству. Сходимость и непрерывность. Критерий полноты на языке вложенных шаров. Эквивалентные признаки непрерывности и равномерной непрерывности. Свойство Бэра и теорема Бэра. Компактность и ее признаки. Теоремы Вейерштрасса, Кантора и Хаусдорфа. Теорема Арцела-Асколи.

[1] пар. 1.3, пар. 1.5, пар. 9.1; [2] пар. 2.1-2.3, пар. 2.6-2.9; [3] пар. 4.1, пар. 4.2, пар. 4.5-4.7

Нормированные пространства. Определение мультинормы, полунормы и нормы. Примеры норм и нормированных пространств. Непрерывные линейные операторы в нормированных пространствах. Ограниченность и непрерывность. Банаховы пространства. Пространство ограниченных операторов. Пополнение нормированного пространства. Подпространства нормированного пространства.

[1] пар. 4.1, пар. 4.2, пар. 5.1; [2] пар. 3.3, пар. 4.1; [3] пар. 5.5

Классические банаховы пространства. Пространства Лебега, пространства последовательностей, пространства дифференцируемых функций. Неравенства Гельдера и Минковского. Теорема о полноте пространств Лебега. Понятие о пространствах Соболева.

[1] пар. 4.2-4.4; [2] пар. 2.1; [3] пар. 5.5

Ограниченные операторы. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о сходимости ряда Неймана. Резольвента и спектр, спектральный радиус оператора. Различные мультинормы в пространстве операторов и функционалов. Слабая сходимость.

[1] пар. 4.1; [2] пар. 4.5; [3] пар. 5.6

Гильбертовы пространства. Скалярное произведение и неравенство Коши-Буняковского. Закон параллелограмма. Примеры и способы задания гильбертовых пространств. Характеристические свойства ортопроекторов и операции над ними. Теорема Пифагора и ее следствия. Неравенство Бесселя. Существование гильбертова базиса и условие Стеклова. Критерий счетности базиса и ортогонализации Грама-Шмидта. Ряд Фурье элемента в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса-Фишера об изоморфизме. Равенства Парсеваля.

[1] пар. 4.5; [2] пар. 3.4; [3] пар. 6.1-6.3

Операторы в гильбертовых пространствах. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала. Построение эрмитово сопряженного оператора. Эрмитовы операторы и теорема Рэлея о подсчете их норм. Критерий Вейля для точек спектра эрмитова оператора. Теорема о границах спектра эрмитова оператора. Спектр компактного эрмитова оператора и теорема Гильберта-Шмидта.

[1] пар. 5.3, пар. 5.6; [2] пар. 4.5, пар. 4.6; [3] пар. 6.4-6.6

6 семестр

Принцип продолжения. Теорема Хана-Банаха в аналитической форме (для вещественного и комплексного полей скаляров). Теорема Хана-Банаха в субдифференциальной форме. Принцип продолжения функционала с сохранением нормы. Построение функционала Минковского. Гиперплоскости и способы их задания. Теорема отделимости - геометрическая форма теоремы Хана-Банаха. Приложения принципа продолжения и границы его применимости.

[1] пар. 2.4; [2] пар. 3.2; [3] пар. 3.5, пар. 3.8

Принцип ограниченности. Основной принцип Банаха. Эквивалентность свойств равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности для семейств операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза. Совпадение слабой ограниченности и ограниченности по норме.

[1] пар. 7.1, пар. 8.1; [2] пар. 3.3; [3] пар. 4.7, пар. 7.1, пар. 7.2

Принцип открытости. Открытые отображения. Теорема об открытом отображении. Замкнутые операторы и их простейшие свойства. Теорема Банаха о замкнутом графике. Применения принципа открытости. Корректность однозначно разрешимых уравнений.

[1] пар. 12.1; [2] пар. 4.5; [3] пар. 7.3, пар. 7.4

Сопряженные пространства и операторы. Примеры сопряженных пространств, сопряженные к классическим банаховым пространствам. Построение сопряженного оператора и вычисление его нормы.

[1] пар. 5.1, пар. 5.2, пар. 12.2; [2] пар. 4.2; [3] пар. 7.6

Нормальная разрешимость. Принцип дополняемости. Дополняемость конечномерного подпространства. Нормальная разрешимость оператора с конечномерным коядром. Аннуляторы и нормальная разрешимость уравнений первого рода. Теорема Хаусдорфа о нормальной разрешимости. Принципы штрихования.

[2] пар. 12.2; [3] пар. 7.4-7.7

Голоморфные функции операторов. Совпадение слабо голоморфных и сильно голоморфных функций. Интегральная формула Коши и ее следствие. Теорема Лиувилля. Непустота комплексного спектра оператора и формула Берлинга-Гельфанда. Интеграл Рисса-Данфорда. Голоморфное функциональное исчисление как представление алгебры ростков голоморфных функций. Основные правила операционного исчисления; отображение спектра, сложная функция от операторов, разбиение спектра и спектральные проекторы.

[3] пар. 8.1, пар. 8.2

Компактные операторы и их спектры. Общие свойства компактных операторов. Проблема аппроксимации конечномерными операторами. Наличие почти перпендикуляров и критерий Рисса для конечномерности. Строение спектра компактного оператора. Теорема Рисса-Шаудера.

[1] пар. 6.5, пар. 7.4; [2] пар. 9.2, пар. 13.2-13.3; [3] пар. 8.3, пар. 8.4

Теория Фредгольма. Понятие индекса. Нетеровы и фредгольмовы операторы. Развернутая формулировка альтернативы Фредгольма для уравнений второго рода. Теорема Аткинсона об индексе произведения. Почти обратные операторы и критерий Нетера. Теоремы об устойчивости индекса при компактных и ограниченных возмущениях. Критерий Никольского для фредгольмовости.

[2] пар. 13.1, пар. 13.5; [3] пар. 8.5

Литература

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1984.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1989.
3. Кутателадзе С.С. *Основы функционального анализа*. Н.: Изд. Ин-та математики им. С.Л. Соболева, 1995.

План практических занятий

5 семестр

Векторные пространства (*1 занятие*). [1] гл. 4, N 1-3, [3] пар. 2.

Выпуклые множества и выпуклые функции (*2 занятия*). [1] гл. 4, N 4-16; [2] N 254, 261, 273; [3] пар. 3; [4] пар. 32.

Метрические пространства (*3 занятия*). [1] гл. 3, N 22, 30-40, 139-214; [2] гл. 3, пар. 2, N 369-379; [3] пар. 4; [4] пар. 6.

Классические банаховы пространства (*3 занятия*). [1] гл. 4, N 1-30; [2] гл. 3; пар. 4, N 323-327; пар. 2, N 277-289; пар. 3, N 415-417, 427, 428, 438-444; [3] пар. 5; [4] пар. 1-5, пар. 11.

Ограниченные операторы (*2 занятия*). [1] гл. 7, пар. 40-48; [4] пар. 7, пар. 8.

Гильбертовы пространства (*2 занятия*). [1] гл. 1, N 1-58; [2] гл. 3, пар. 4, N 530, 531, 542-646; [3] пар. 6; [4] пар. 3, пар. 5.

Операторы в гильбертовых пространствах (*2 занятия*). [1] гл. 10, N 92-97, N 143-149; [3] пар. 6; [4] пар. 18-20.

6 семестр

Принцип продолжения (*3 занятия*). [1] гл. 4, пар. 4-24; [2] гл. 3, пар. 1, N 300-305; [3] пар. 7; [4] пар. 11.

Принцип ограниченности (*2 занятия*). [1] гл. 7, N 26-29, 60-67, 71-77, 118; [3] пар. 7; [4] пар. 13.

Принцип открытости (*1 занятие*). [1] гл. 4, N 88, 89, гл. 7, N 49-57, 96; [2] гл. 3, N 2, 365-366; [3] пар. 7; [4] пар. 10.

Обобщенные функции (*1 занятие*). [1] гл. 7 4, N 69-113; [2] гл. 4, пар. 3-пар. 5.

Сопряженные пространства (*1 занятие*). [1] гл. 7, N 90-92; гл. 8, N 121-131;

Нормальная разрешимость (*1 занятие*). [1] 7.81-7.115; [2] 3.1.2, 3.1.4; [4] пар. 7-пар. 9, пар. 17.

Спектры и голоморфные функции ограниченных операторов (*1 занятие*). [2] гл. 5, пар. 2, п.1, п.2; [3] 8.1-8.4.

Компактные операторы и их спектры (*2 занятия*). [1] 8.1-8.70; [2] гл. 3, пар. 2, п.2; [3] 8.5-8.7; [4] пар. 16, пар. 20.

Теория Фредгольма (*3 занятия*). [1] 8.85-8.133; [2] гл. 3, пар. 2, п.3; [3] 8.8-8.14; [4] пар. 21.

Литература

1. Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В. *Задачи и упражнения по функциональному анализу*. Минск: Вышейшая школа, 1978.
2. Кириллов А. А., Гвишиани А.Д. *Теоремы и задачи функционального анализа*. М.: Наука, 1988.
3. Кутателадзе С. С. *209 теоретических задач*. Новосибирск: НГУ, 1995.
4. Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. *Задачи и упражнения по функциональному анализу*. М.: Наука, 1984.