Часть 3. Итерационные методы решения задачи на собственные значения самосопряженной матрицы

Тема 17. Проблема собственных значений

Для матрицы $A=\{a_{i\,j}\}_{i,\,j=1}^{n}$ нужно найти

числа λ и ненулевые векторы $\vec{x}$ такие,

что $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$: λ – собственное значение, $\vec{x}$ – собственный вектор.

Корректность задачи на собственные значения

Собственные значения матрицы A – корни характеристического полинома

$$P_n(\lambda)=\det(A-\lambda E)=(-1)^n\lambda^n+p_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+p_1\lambda+p_0,$$

коэффициенты $p_0,\,\ldots,\,p_{n-1}$ – непрерывные функции элементов $\{a_{i\,j}\}_{i,\,j=1}^{n}$.

Пусть δA – матрица с “малыми” по величине элементами, $P_{\delta,n}(\lambda)$ – характеристический полином матрицы $A+\delta A$.

Следствием непрерывности $\det(A+\delta A)$ как функции элементов матрицы $A+\delta A$ является

Лемма 1. $\lim\limits_{\delta A\to 0} P_{\delta,n}(\lambda)=P_n(\lambda) \quad \forall\ \lambda\in C$.

Лемма 2.

В любом круге $|\lambda-\lambda_c|\le\sqrt[n]{|P_n(\lambda_c)|}$ есть корень полинома $P_n(\lambda)$.

Доказательство.

Разложим $P_n(\lambda)$ в ряд Тейлора в точке λ_c:

$$P_n(\lambda)=P_n(\lambda_c)+\frac{P_n'(\lambda_c)}{1!}(\underbrace{\lambda-\lambda_c}_{z})+\ldots+\frac{P_n^{(n)}(\lambda_c)}{n!}(\underbrace{\lambda-\lambda_c}_{z})^n\equiv Q(z).$$

Пусть z_1, ..., z_n – корни полинома $Q(z)$: $Q(z_k)=0\ \forall\ k$,

$z_{\min}:\ |z_{\min}|=\min\limits_{1\le k\le n}|z_k|$.

Так как $|P_n(\lambda_c)|\ =|Q(0)|=|z_1\cdot\ldots\cdot z_n|\ge|z_{\min}|^n=|\lambda_{\min}-\lambda_c|^n$,

то $\lambda_{\min}\in\{\lambda\in C:\ |\lambda-\lambda_c|\le\sqrt[n]{|P_n(\lambda_c)|}\}$.

Лемма 3.

Если $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – корни полинома $P_n(\lambda)$,

то $\exists$ нумерация корней $\lambda_{\delta,1}, ..., \lambda_{\delta,n}$ полинома $P_{\delta,n}(\lambda)$:

$$\lambda_{\delta,k} \to \lambda_k \quad \forall\, k \quad \text{при } \delta A \to 0.$$

Доказательство

методом математической индукции по степени полинома.

$$n = 1 \;\Rightarrow\; \lambda_{\delta,1} = p_{\delta,0} \to p_0 = \lambda_1.$$

Пусть лемма верна при $n < k$.

$n = k$: из леммы 2 $\Rightarrow\ \exists\, \lambda_{\delta,1}: |\lambda_{\delta,1} - \lambda_1| \le \sqrt[n]{|P_{\delta,n}(\lambda_1)|} \to 0.$

Т.к. $P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)R_{n-1}(\lambda), \quad P_{\delta,n}(\lambda) = (\lambda - \lambda_{\delta,1})R_{\delta,n-1}(\lambda)$

$$R_{\delta,n-1}(\lambda) \to R_{n-1}(\lambda),$$

то $\lambda_{\delta,2} \to \lambda_2, ..., \lambda_{\delta,n} \to \lambda_n$.

Степенной метод вычисления максимального собственного значения матрицы $A = A^* \geq 0$

Идея метода:

если $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1} < \lambda_n = \rho(A)$ – собственные значения,

$\vec{q}^{(1)}$, $\vec{q}^{(2)}$, ..., $\vec{q}^{(n)}$ – соответствующие им собственные векторы,

то $\forall\ \vec{x}^0 \neq 0$

$$A^k \vec{x}^0 = \rho^k [\alpha_n \vec{q}^{(n)} + \underbrace{(\frac{\lambda_1}{\rho})^k \alpha_1 \vec{q}^{(1)} + \ldots + (\frac{\lambda_{n-1}}{\rho})^k \alpha_{n-1} \vec{q}^{(n-1)}}_{\to 0}] \approx \rho^k \alpha_n \vec{q}^{(n)},$$

$$\frac{\| A^{k+1} \vec{x}^0 \|}{\| A^k \vec{x}^0 \|} \approx \rho, \qquad \frac{1}{\| A^k \vec{x}^0 \|} A^{k+1} \vec{x}^0 \approx \rho \cdot \vec{q}^{(n)},$$

где α_1, α_2, ..., α_n – коэффициенты (неизвестные!) разложения вектора $\vec{x}^0$ по базису $\vec{q}^{(1)}$, $\vec{q}^{(2)}$, ..., $\vec{q}^{(n)}$.

Итерационный процесс

$$\vec{x}^0 \neq 0, \qquad \vec{x}^{k+1} = A\frac{\vec{x}^k}{\|\vec{x}^k\|}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

называется степенным методом вычисления максимального собственного значения матрицы $A = A^* \geq 0$**:**

$$\|\vec{x}^k\| \to \rho(A), \qquad \vec{x}^k \to \vec{x}: \quad A\vec{x} = \rho \cdot \vec{x}$$

Доказательство.

Пусть $0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_r < \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = \rho$ – собственные значения, $\vec{q}^{(1)}, \ldots, \vec{q}^{(r)}, \ \vec{q}^{(r+1)}, \ldots, \vec{q}^{(n)}$ – собственные векторы матрицы A, и

$$\vec{x}^0 = \alpha_1\vec{q}^{(1)} + \ldots + \alpha_r\vec{q}^{(r)} + \alpha_{r+1}\vec{q}^{(r+1)} + \ldots + \alpha_n\vec{q}^{(n)} =$$

$$= \alpha_1\vec{q}^{(1)} + \ldots + \alpha_r\vec{q}^{(r)} + \vec{y}, \qquad \vec{y} \neq 0.$$

Тогда $A^k \vec{x}^0 = \rho^k [\vec{y} + (\lambda_1 / \rho)^k \alpha_1 \vec{q}^{(1)} + \ldots + (\lambda_r / \rho)^k \alpha_r \vec{q}^{(r)}]$ и,

т.к. $\vec{x}^k = \dfrac{A\vec{x}^{k-1}}{\| \vec{x}^{k-1} \|} = \dfrac{A^2 \vec{x}^{k-2}}{\| A\vec{x}^{k-2} \|} = \ldots = \dfrac{A^k \vec{x}^0}{\| A^{k-1} \vec{x}^0 \|}$, $0 \le \dfrac{\lambda_1}{\rho} \le \ldots \le \dfrac{\lambda_r}{\rho} < 1$,

то $\| \vec{x}^k \| = \rho \dfrac{\| \vec{y} + (\lambda_1 / \rho)^k \quad \alpha_1 \vec{q}^{(1)} + \ldots + (\lambda_r / \rho)^k \quad \alpha_r \vec{q}^{(r)} \|}{\| \vec{y} + (\lambda_1 / \rho)^{k-1} \alpha_1 \vec{q}^{(1)} + \ldots + (\lambda_r / \rho)^{k-1} \alpha_r \vec{q}^{(r)} \|} \to \rho$,

$$\vec{x}^k = \rho \frac{\vec{y} + (\lambda_1 / \rho)^k \ \alpha_1 \vec{q}^{(1)} + \ldots + (\lambda_r / \rho)^k \quad \alpha_r \vec{q}^{(r)}}{\| \vec{y} + (\lambda_1 / \rho)^{k-1} \alpha_1 \vec{q}^{(1)} + \ldots + (\lambda_r / \rho)^{k-1} \alpha_r \vec{q}^{(r)} \|} \to \vec{x} = \rho \frac{\vec{y}}{\| \vec{y} \|}.$$

Замечание. Сходимость степенного метода не зависит от выбора в нем векторной нормы, т.к. все нормы в $R^n (C^n)$ эквивалентны.

Степенной метод вычисления минимального собственного значения матрицы $A = A^* \ge 0$

$$\beta \ge \rho(A) \quad \Rightarrow \quad \lambda(\beta \cdot E - A) = \beta - \lambda(A) \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad \rho(\beta \cdot E - A) = \beta - \lambda_{\min}(A).$$

(например: $\beta = \| A \|_\infty \ge \rho(A)$)

итерационный процесс

$$\vec{x}^0 \ne 0, \qquad \vec{x}^{k+1} = (\beta \cdot E - A)\frac{\vec{x}^k}{\| \vec{x}^k \|}, \qquad k = 0, 1, \ \ldots,$$

называется степенным методом вычисления минимального собственного значения матрицы $A = A^* \ge 0$:

$$(\beta - \| x^k \|) \to \lambda_{\min}(A),$$

если проекция начального вектора $\vec{x}^0$ на линейную оболочку собственных векторов, соответствующих $\lambda_{\min}(A)$, не равна 0.

Применение ортогонализации и степенного метода для вычисления очередного собственного значения

Пусть $A = A^* \geq 0,\ A\vec{q}^{(n)} = \lambda_n \vec{q}^{(n)}$,

$$\tilde{\lambda}_n \approx \lambda_n,\ \tilde{\vec{q}}^{(n)} \approx \vec{q}^{(n)}.$$

Построим: $\tilde{P}_n = E - \tilde{q}^{(n)}[\tilde{q}^{(n)}]^*$ – ортогональный проектор на $(L\{\tilde{q}^{(n)}\})^{\perp}$,

$$\tilde{A}_{n-1} = \tilde{P}_n A \tilde{P}_n = (\tilde{A}_{n-1})^* \geq 0.$$

Упражнение. $\vec{q}^{(n)} \in Ker(A_{n-1})$ (если $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n,\ \tilde{\vec{q}}^{(n)} = \vec{q}^{(n)}$)

$$Sp(A_{n-1}) = \{\lambda(A)_1 \leq \ldots \leq \lambda(A)_{n-1},\ 0\}$$

$\Rightarrow$ если $\tilde{q}^{(n)} \to q^{(n)}$, то $\rho(\tilde{A}_{n-1}) \to \rho(A_{n-1}) = \lambda_{n-1}(A)$.

Степенной метод вычисления границ спектра матрицы $B^{-1}A$ в случае $A = A^* > 0$ и $B = B^* > 0$

Оценки спектра матрицы $B^{-1}A$ $\quad (A = A^* > 0$ и $B = B^* > 0)$

нужны для построения параметров циклического метода Ричардсона решения системы уравнений $A\vec{x} = b$ с переобусловливателем B.

Лемма 4. Если для $A = A^* > 0$ и $B = B^* > 0$

$$B^{-1}A\vec{x}^{(i)} = \lambda_i \vec{x}^{(i)}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

то

$$\lambda_i = \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0 \quad \forall\, i$$

$$(A\vec{x}^{(i)}, \vec{x}^{(j)}) = 0 \quad \forall\, i \neq j.$$

Доказательство.

$$B^{-1}A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\underbrace{A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}}_{C})[A^{1/2}\vec{x}] = \lambda \cdot [\underbrace{A^{1/2}\vec{x}}_{\vec{q}}]$$

Упражнение 1. $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2} = C^* > 0$

Упражнение 2. $C = Q\Lambda Q^*$:

$$\begin{cases} Q \equiv [\vec{q}^{(1)}\ \vec{q}^{(2)}\ \ldots\ \vec{q}^{(n)}],\ \ Q^{-1} = Q^*,\ \ (\vec{q}^{(i)}, \vec{q}^{(j)}) = \delta_{i,j} \\ \Lambda \equiv diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\},\ \ \lambda_i = \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0, \\ C\vec{q}^{(i)} = \lambda_i \vec{q}^{(i)}\ \ \ \forall\ i \end{cases}$$

Упражнение 3. $C\vec{q}^{(i)} = \lambda_i \vec{q}^{(i)} \quad \Rightarrow \quad A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}\vec{q}^{(i)} = \lambda_i \vec{q}^{(i)}$

$$\Rightarrow \quad B^{-1}A[\underbrace{A^{-1/2}\vec{q}^{(i)}}_{\vec{x}^{(i)}}] = \lambda_i[\underbrace{A^{-1/2}\vec{q}^{(i)}}_{\vec{x}^{(i)}}]$$

Упражнение 4. $(A\vec{x}^{(i)}, \vec{x}^{(j)}) = (A[A^{-1/2}\vec{q}^{(i)}], [A^{-1/2}\vec{q}^{(j)}]) = \delta_{i,j}$

$$\Rightarrow \quad B^{-1}A\vec{x}^{(i)} = \lambda_i \vec{x}^{(i)}\ \ \&\ \begin{cases} \lambda_i = \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0\ \ \ \forall\ i \\ (A\vec{x}^{(i)}, \vec{x}^{(j)}) = 0\ \ \ \forall\ i \neq j \end{cases}$$

Теорема 1. Если $A = A^* > 0$ и $B = B^* > 0$, то степенной метод

$$\vec{x}^0 \neq 0 - \textit{задан}, \quad \vec{x}^{k+1} = B^{-1}A\frac{\vec{x}^k}{\|\vec{x}^k\|_A}, \; k = 0, 1, \ldots$$

сходится к решению задачи $B^{-1}A \cdot \vec{x} = \rho \cdot \vec{x}$,

где $\rho = \max\limits_{\lambda \in Sp(B^{-1}A)} \lambda(B^{-1}A) = \lim\limits_{k \to \infty} \|\vec{x}^k\|_A$

$$\vec{x} = \lim_{k \to \infty} \vec{x}^k,$$

если $(A\vec{x}^0, \vec{x}) \neq 0$.

Доказательство.

Пусть $0 \le \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_r < \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = \rho$ – собственные значения, $\{x^{(i)}\}_{i=1}^n$ – A-ортонормальная система собственных векторов из леммы 4 матрицы $B^{-1}A$.

Представим начальное приближение степенного метода в виде:

$$\vec{x}^0 = \underbrace{\alpha_1 \cdot \vec{x}^{(1)} + \ldots + \alpha_r \cdot \vec{x}^{(r)}}_{\vec{\varepsilon}^0} + \underbrace{\alpha_{r+1} \cdot \vec{x}^{(r+1)} + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{x}^{(n)}}_{\vec{y} \neq 0}$$

Очевидно, что $B^{-1}A \cdot \vec{y} = \rho \cdot \vec{y}$,

$$\vec{x}^k = \frac{(B^{-1}A)\vec{x}^{k-1}}{\| \vec{x}^{k-1} \|_A} = \frac{(B^{-1}A)^2 \vec{x}^{k-2}}{\| (B^{-1}A)\vec{x}^{k-2} \|_A} = \ldots = \frac{(B^{-1}A)^k \vec{x}^0}{\| (B^{-1}A)^{k-1} \vec{x}^0 \|_A},$$

$$(B^{-1}A)^k \vec{x}^0 = \rho^k \cdot [\underbrace{\alpha_1 (\frac{\lambda_1}{\rho})^k \cdot \vec{x}^{(1)} + \ldots + \alpha_r (\frac{\lambda_r}{\rho})^k \cdot \vec{x}^{(r)}}_{\vec{\varepsilon}^k \to 0} + y],$$

$$\| (B^{-1}A)^{k-1} \vec{x}^0 \|_A = \rho^{k-1} \cdot \sqrt{\underbrace{[\alpha_1 (\frac{\lambda_1}{\rho})^{k-1}]^2 + \ldots + [\alpha_r (\frac{\lambda_r}{\rho})^{k-1}]^2}_{\| \vec{\varepsilon}^{k-1} \|_A^2 \to 0} + \| \vec{y} \|_A^2}.$$

Тогда $\vec{x}^k \to \rho \cdot \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|_A}$, а $\|x^k\|_A \to \rho$.

Кроме того,

$$0 \le \frac{\rho - \|\vec{x}^k\|_A}{\rho} = \frac{\rho - \rho\sqrt{\|\vec{y}\|_A^2 + \|\vec{\varepsilon}^k\|_A^2} / \sqrt{\|\vec{y}\|_A^2 + \|\vec{\varepsilon}^{k-1}\|_A^2}}{\rho} =$$

$$= \frac{\|\vec{\varepsilon}^{k-1}\|_A^2 - \|\vec{\varepsilon}^k\|_A^2}{(\sqrt{\|\vec{y}\|_A^2 + \|\vec{\varepsilon}^{k-1}\|_A^2} + \sqrt{\|\vec{y}\|_A^2 + \|\vec{\varepsilon}^k\|_A^2}) \cdot \sqrt{\|\vec{y}\|_A^2 + \|\vec{\varepsilon}^{k-1}\|_A^2}} \le$$

$$\le \frac{\|\vec{\varepsilon}^{k-1}\|_A^2}{2 \cdot \|\vec{y}\|_A^2} \le \frac{[\alpha_1]^2 + \ldots + [\alpha_r]^2}{2 \cdot \|\vec{y}\|_A^2} (\frac{\lambda_r}{\rho})^{2(k-1)} < \frac{\|\vec{x}^0\|_A^2}{2 \cdot \|\vec{y}\|_A^2} (\frac{\lambda_r}{\rho})^{2(k-1)}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если $A = A^* > 0$, $B = B^* > 0$ и известна постоянная $\gamma_1 \geq \rho(B^{-1}A)$, то степенной метод

$$\vec{x}^0 \neq 0 - \textit{задан}, \quad \vec{x}^{k+1} = (\gamma_1 \cdot E - B^{-1}A)\frac{\vec{x}^k}{\|\vec{x}^k\|_A}, \; k = 0, 1, \ldots$$

сходится к решению задачи $B^{-1}A \cdot \vec{x} = (\gamma_1 - \lambda_{\min}) \cdot \vec{x}$,

где $\lambda_{\min} = \min\limits_{\lambda \in Sp(B^{-1}A)} \lambda(B^{-1}A) = \gamma_1 - \lim\limits_{k \to \infty} \|\vec{x}^k\|_A$

$\vec{x} = \lim\limits_{k \to \infty} \vec{x}^k$, если $(A\vec{x}^0, \vec{x}) \neq 0$.

Доказательство. Сформулированный метод определяет спектральный радиус и соответствующий собственный вектор матрицы $\gamma_1 \cdot E - B^{-1}A$.

Так как $\lambda(\gamma_1 \cdot E - B^{-1}A) = \gamma_1 - \lambda(B^{-1}A)$ и $\lambda(B^{-1}A) > 0$, то

$$\beta \equiv \rho(\gamma_1 \cdot E - B^{-1}A) = \gamma_1 - \lambda_{\min}(B^{-1}A), \text{ т.е. } \lambda_{\min}(B^{-1}A) = \gamma_1 - \beta.$$

Тема 18. Метод деления пополам (бисекций)

Закон инерции:

если $A = \{a_{i\,j}\}_{i,\,j=1}^{n} = A^*$

$T^* A T = D_T \equiv diag\{d_1,\, d_2,\, ...,\, d_n\}$ – конгруэнтное преобразование,

где $\det T \neq 0$,

то от матрицы T не зависит сигнатура $\sigma(A)$ матрицы A:

- $\sigma_-(A)$ – количество отрицательных элементов,
- $\sigma_0(A)$ – количество нулевых элементов,
- $\sigma_+(A)$ – количество положительных элементов на диагонали D_T.

Замечание 1.

Если $A = A^*$ и $\det A_k \neq 0 \quad \forall\, k$,

то (из теоремы о LDU – разложении за конечное число операций)

$A = LDL^*, \; D = diag\{d_1, ..., d_n\}$,

$\Rightarrow \quad \sigma(A) = \{\sigma_-(A), \sigma_0(A), \sigma_+(A)\}, \; \sigma_0(A) = 0$

вычисляется за конечное число операций.

Замечание 2.

Если $A = A^*$,

то (из теоремы о форме Жордана)

$A = Q\Lambda Q^*, \; \Lambda = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$,

и (если $\det A_k \neq 0 \quad \forall\, k$) $\sigma(A) = \{\sigma_-(A), \sigma_0(A), \sigma_+(A)\}, \; \sigma_0(A) = 0$

вычисляется за конечное число операций,

где $\sigma_-(A)$ – количество $\lambda_k < 0$.

Лемма 1. Если матрица $A = A^*$ и $\det A_k \neq 0\ \ \forall\ k$,

то $\sigma_-(A) \equiv ЧПЗ\{1, \det A_1, \det A_2, ..., \det A_n\}$ – число перемен знака.

Доказательство.

Из замечания 1. $\Rightarrow$ $A = LDL^*$, $\begin{cases} D = diag\{d_1, ..., d_n\} \\ \det A_k = d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_k \quad \forall\ k \\ \sigma_-(A) - количество\ d_k < 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} if\ \ d_1 < 0\ then\ \{sign(1) \cdot sign(d_1) < 0\ -\ перемена\ знака\} \\ if\ \ d_2 < 0\ then\ \{sign(d_1) \cdot sign(\underbrace{d_1 d_2}_{\det A_2}) < 0\ -\ перемена\ знака\} \\ ... \\ if\ \ d_n < 0\ then\ \{sign(\underbrace{d_1 ... d_{n-1}}_{\det A_{n-1}}) \cdot sign(\underbrace{d_1 ... d_{n-1} d_n}_{\det A_n}) < 0\ -\ перемена\ знака\} \end{cases}$$

Из замечания 2. $\Rightarrow$ $\sigma_-(A) \equiv ЧПЗ - количество\ \lambda_k < 0$.

Идея метода бисекций вычисления $\lambda_j \in Sp(A)$

Пусть $A = A^*$, $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$.

Упражнение. $-\|A\|_\infty \le -\rho(A) \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le +\rho(A) \le +\|A\|_\infty$.

$$\lambda_j \in [a_0, b_0] = [-\|A\|_\infty, \|A\|_\infty].$$

Определим, в какой половине интервала $[a_0, b_0]$ лежит λ_j.

Для этого вычислим $\sigma_-(A - c_0 E)$

– количество собственных значений меньших $c_0 = (a_0 + b_0)/2$.

Если $\sigma_-(A - c_0 E) \ge j$, то $\lambda_j \in [a_0, c_0] \equiv [a_1, b_1]$,

иначе $\lambda_j \in [c_0, b_0] \equiv [a_1, b_1]$.

Через k таких шагов получим: $\lambda_j \in [a_k, b_k]$, $b_k - a_k = \|A\|_\infty / 2^{k-1} \to 0$, т.е. мы можем получить оценку искомого собственного числа с любой точностью.

Для построения метода бисекций нужно

обобщить формулу

$$\sigma_-(A) \equiv \text{\textit{ЧПЗ}}\{1, \det A_1, \det A_2, ..., \det A_n\}$$

на случай $\exists \det A_k = 0$

Для этого:

1. задачу $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ преобразуем к задаче $\underbrace{QAQ^*}_{T}(Q\vec{x}) = \lambda(Q\vec{x})$:

   $QQ^* = E$,

   $$T = QAQ^* = tridiag\{\bar{\beta}_{i-1}, \alpha_i, \beta_i\} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & 0 \\ \bar{\beta}_1 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & & \bar{\beta}_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

2. построим метод бисекций для якобиевой матрицы $T : |\beta_k| > 0$.

Приведение самосопряженной матрицы к трехдиагональному виду ортогональным преобразованием подобия с помощью матриц вращения

Напомним:

$$Q_{k,l} = \left[\begin{array}{c|ccc|c} E_{k-1} & & 0 & & 0 \\ \hline & \bar{c}_{k,l} & 0 & -\bar{s}_{k,l} & \\ 0 & 0 & E_{l-k-1} & 0 & 0 \\ & s_{k,l} & 0 & c_{k,l} & \\ \hline 0 & & 0 & & E_{n-l} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\,k-\text{я строка} \\ \\ -\,l-\text{я строка} \\ \\ \end{array}$$

$$c_{k,l}\cdot\bar{c}_{k,l} + s_{k,l}\cdot\bar{s}_{k,l} = 1$$

– элементарная матрица вращения.

1–й шаг.

Исключение элементов **1–го столбца** матрицы A, начиная с **3–его**,

с помощью последовательного умножения на унитарные матрицы

$$Q_{2,3},\ ...,\ Q_{2,n}\colon\ A_{1/2}=\underbrace{(Q_{2,n}\cdot ...\cdot Q_{2,3})}_{Q_1}A;$$

преобразование подобия $A_1=\underbrace{(Q_{2,n}\cdot ...\cdot Q_{2,3})A}_{A_{1/2}}(Q_{2,n}\cdot ...\cdot Q_{2,3})^*\equiv Q_1AQ_1^*$

2–й шаг.

Исключение элементов **2–го столбца** матрицы A_1, начиная с **4–ого**,

с помощью последовательного умножения на унитарные матрицы

$$Q_{3,4},\ ...,\ Q_{3,n}\colon\ A_{1+1/2}=(Q_{3,n}\cdot ...\cdot Q_{3,4})A_1;$$

преобразование подобия $A_2=\underbrace{(Q_{3,n}\cdot ...\cdot Q_{3,4})A_1}_{A_{1+1/2}}(Q_{3,n}\cdot ...\cdot Q_{3,4})^*\equiv Q_2A_1Q_2^*.$

k–й шаг.

Исключение элементов **k–го столбца** матрицы A_{k-1},

начиная с **(k+2)–ого**,

с помощью последовательного умножения на матрицы

$$Q_{k+1,k+2},\ \ldots,\ Q_{k+1,n}:\ A_{k-1/2} = (Q_{k+1,n} \cdot \ldots \cdot Q_{k+1,k+2}) A_{k-1};$$

преобразование подобия

$$A_k = \underbrace{(Q_{k+1,n} \cdot \ldots \cdot Q_{k+1,k+2}) A_{k-1}}_{A_{k-1/2}} (Q_{k+1,n} \cdot \ldots \cdot Q_{k+1,k+2})^* \equiv Q_k A_{k-1} Q_k^*.$$

…

(n–2)–й шаг.

Исключение последнего элемента **(n-2)–го столбца** матрицы A_{n-3} с помощью умножения на матрицу $Q_{n-1,n}$:

$$A_{n-2} = (Q_{n-1,n}) A_{n-3} (Q_{n-1,n})^* \equiv Q_{n-2} A_{n-3} Q_{n-2}^*.$$

$$T = A_{n-2} = (Q_{n-2} \cdot \ldots \cdot Q_1) A (Q_{n-2} \cdot \ldots \cdot Q_1)^* = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \bar{\beta}_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \bar{\beta}_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & \bar{\beta}_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

$Sp(A) = Sp(T).$

Если $\beta_k = 0$, то $T = \begin{bmatrix} T_k & 0 \\ 0 & \hat{T}_{n-k} \end{bmatrix} \Rightarrow Sp(T) = Sp(T_k) \bigcup Sp(\hat{T}_{n-k}),$

т.е. поиск собственных значений самосопряженной матрицы сводится к задаче на собственные значения якобиевых трехдиагональных матриц.

Лемма 2.

Самосопряженная матрица подобна трехдиагональной вещественной матрице.

Доказательство.

Имеем:

$$T = (Q_{n-2} \cdot \ldots \cdot Q_1) A (Q_{n-2} \cdot \ldots \cdot Q_1)^* = tridiag\{\bar{\beta}_{i-1}, \alpha_i, \beta_i\}.$$

Определим матрицу (предполагая $\forall\ \beta_i \neq 0$)

$$D = diag\{d_1, \ldots, d_n\}:$$

$$d_1 = 1,\ d_2 = \beta_1 / |\beta_1|, \ldots,\ d_n = \beta_1 / |\beta_1| \cdot \ldots \cdot \beta_{n-1} / |\beta_{n-1}|.$$

Тогда $D^{-1} = D^*,\ B = DTD^{-1} = tridiag\{|\beta_{i-1}|, \alpha_i, |\beta_i|\}.$

Якобиевы матрицы

Вещественная матрица

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{bmatrix}, \; b_1 \cdot c_2 > 0, \; b_2 \cdot c_3 > 0, \ldots, \; b_{n-1} \cdot c_n > 0,$$

называется **якобиевой** (у нас $c_i = b_{i-1}$).

Лемма 3. Пусть $B = tridiag\{b_{i-1}, a_i, b_i\}$ – якобиева матрица, тогда

$$\begin{cases} \det B_0 \equiv 1, \; \det B_1 = a_1, \\ \det B_{i+1} = a_{i+1} \cdot \det B_i - b_i^2 \cdot \det B_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

если $\det B_i = 0$ $(i < n)$, то $\det B_{i-1} \cdot \det B_{i+1} < 0$,

если $\det B_n = 0$, то $\det B_{n-1} \neq 0$.

Доказательство леммы

оставляется студентам в качестве упражнения.

Лемма 4.

Собственные значения якобиевой матрицы B попарно различные (простые).

Доказательство.

Т.к. размерность ядра симметричной матрицы $B_\lambda = B - \lambda E$ совпадает с кратностью $\lambda \in Sp(B)$,

а из леммы 3 следует, что у вырожденной якобиевой матрицы B_λ минор $[\det B_\lambda]_{n-1} \neq 0$,

то $rang\, B_\lambda = n-1$, $\dim Ker\, B_\lambda = 1$ и

λ простое собственное значение матрицы B.

Теорема.

Пусть $B = tridiag\{b_{i-1}, a_i, b_i\}$ – якобиева матрица, тогда

$$\sigma_-(B) = ЧПЗ\{1,\ \det B_1,\ \det B_2, \ldots,\ \det B_n\},$$

если $\det B_k = 0$ приписать знак $\det B_{k-1}$.

Доказательство.

1. Если $\forall\ k \quad \det B_k \neq 0$, то это лемма 1.
2. Пусть $\exists\ k:\ \det B_k = 0$. Пусть $sign(\det B_k) = sign(\det B_{k-1})$.

Зададим: $\varepsilon_0 = \min\limits_{\lambda \in Sp(B_i),\ \lambda \neq 0,\ i=1,\ldots,n} |\lambda| > 0$ и якобиевы матрицы

$$\begin{cases} B_{+\varepsilon} = B + \varepsilon E \\ B_{-\varepsilon} = B - \varepsilon E,\ \ \varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0) \end{cases}$$

Т.к. $\lambda([B_{\pm\varepsilon}]_i) \equiv \lambda(B_i) \pm \varepsilon \neq 0 \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$,

то

а) $$\begin{cases} \det[B_{+\varepsilon}]_i = \prod\limits_{\lambda(B_i)\in Sp(B_i)} (\lambda(B_i)+\varepsilon) \neq 0 \\ \det[B_{-\varepsilon}]_i = \prod\limits_{\lambda(B_i)\in Sp(B_i)} (\lambda(B_i)-\varepsilon) \neq 0 \quad \forall\ i=1,\ldots,n, \end{cases}$$

б) $sign(\det[B_{+\varepsilon}]_i) = sign(\det[B_{-\varepsilon}]_i) = sign(\det B_i) \quad \forall \det B_i \neq 0$,

в) $sign(\det[B_{+\varepsilon}]_k)\cdot sign(\det[B_{-\varepsilon}]_k) < 0 \quad \forall \det B_k = 0$,
(т.к. из леммы 4 следует, что $\lambda(B_k)=0$ простое
и отрицательных собственных значений у матрицы $[B_{-\varepsilon}]_k$ на одно больше, чем у матрицы $[B_{+\varepsilon}]_k$),

г) $\sigma_-(B_{+\varepsilon}) = \sigma_-(B),\ \ \sigma_-(B_{-\varepsilon}) = \sigma_-(B) + \sigma_0(B)$.

Из леммы 1, а) и г) следует, что

$$\sigma_-(B_{+\varepsilon}) = \text{ЧПЗ}\{1,\ \det[B_{+\varepsilon}]_1,\ \det[B_{+\varepsilon}]_2, \dots,\ \det[B_{+\varepsilon}]_n\} = \sigma_-(B),$$

$$\sigma_-(B_{-\varepsilon}) = \text{ЧПЗ}\{1,\ \det[B_{-\varepsilon}]_1,\ \det[B_{-\varepsilon}]_2, \dots,\ \det[B_{-\varepsilon}]_n\} = \sigma_-(B) + \sigma_0(B),$$

$$\text{ЧПЗ}\{1,\ \det B_1,\ \det B_2, \dots,\ \det B_n\} = ?$$

Подсчитаем эти числа:

Из б) следует, что если $\det B_j \neq 0$ и $\det B_{j+1} \neq 0$, то перемена знака происходит (или нет) одновременно в этих последовательностях.

Случай $\det B_k = 0,\ k \neq n$.

Из леммы 3 имеем $\det B_{k-1} \cdot \det B_{k+1} < 0$,

отсюда и из б) следует

$\det[B_{\pm\varepsilon}]_{k-1} \cdot \det[B_{\pm\varepsilon}]_{k+1} < 0$ и на участках

$$\left.\begin{array}{lll} \det[B_{\pm\varepsilon}]_{k-1}, & \det[B_{\pm\varepsilon}]_k, & \det[B_{\pm\varepsilon}]_{k+1} \\ \det B_{k-1}, & \det B_k, & \det B_{k+1} \end{array}\right\} \text{ по одной перемене знака.}$$

Случай $\det B_n = 0$, $\sigma_0(B) = 1$.

Отсюда, из в) и г) следует, что

$$\det[B_{+\varepsilon}]_{n-1} \cdot \det[B_{+\varepsilon}]_n > 0, \qquad \det[B_{-\varepsilon}]_{n-1} \cdot \det[B_{-\varepsilon}]_n < 0,$$

$$sign(\det B_{n-1}) \cdot sign(\det B_n) > 0.$$

Следовательно, (если $\det B_k = 0$ приписать знак $\det B_{k-1}$) последовательности миноров матриц $B_{+\varepsilon}$ и B имеют одинаковые знаки. Теорема доказана.

О вычислении ЧПЗ

Для вычисления $\sigma_-(B) = ЧПЗ\{1,\ \det B_1,\ \det B_2, \ldots,\ \det B_n\}$ якобиевой матрицы $B = tridiag\{b_{i-1}, a_i, b_i\}$ достаточно знать знак каждого $\det B_k$.

Если

$$\begin{cases} d_0 = 1,\ d_1 = \det B_1, \\ d_{i+1} = a_{i+1} \cdot d_i - b_i^2 \cdot d_{i-1},\ i = 1, \ldots, k-1, \end{cases}$$

$$\mathrm{d}_{k-1} := d_{k-1} / |t_k|,\quad \mathrm{d}_k := d_k / |t_k| \ - \ \textit{нормировка},$$

(обычно выбирают $t_k = \max\{|d_{k-1}|, |d_k|\}$),

$$\mathrm{d}_{i+1} = a_{i+1} \cdot \mathrm{d}_i - b_i^2 \cdot \mathrm{d}_{i-1},\ i = k, \ldots, n-1,$$

то $\sigma_-(B) = ЧПЗ\{1, d_1, \ldots, d_k, \mathrm{d}_{k+1}, \ldots, \mathrm{d}_n\}$.

Нормировку можно применять неоднократно, что позволит избежать быстрого роста (переполнения) чисел $\{d_i\}$.

О вычислении собственного вектора

Лемма 5.

Последняя компонента собственного вектора $\vec{x}$ якобиевой матрицы $B = tridiag\{b_{i-1}, a_i, b_i\}$ не равна нулю.

Доказательство.

Пусть $B\vec{x} = \lambda\vec{x}, \ \vec{x} \neq 0.$

Предположим, что $x_n = 0.$

Тогда

$$x_{n-1} = -(a_n - \lambda) \cdot x_n / b_{n-1} = 0$$

$$x_{n-i} = -[(a_{n-i+1} - \lambda) \cdot x_{n-i+1} + b_{n-i+1} \cdot x_{n-i+2}] / b_{n-i} = 0,$$

$$i = 2, \ldots, n-1,$$

$\Rightarrow \ \vec{x} = 0$ – противоречие, значит $x_n \neq 0.$

Собственный вектор $\vec{x}$ якобиевой матрицы $B = tridiag\{b_{i-1}, a_i, b_i\}$ мы можем, положив $x_n = 1$, вычислить по формулам

$$x_{n-1} = -(a_n - \lambda)\cdot x_n / b_{n-1}$$

$$x_{n-2} = -[(a_{n-1} - \lambda)\cdot x_{n-1} + b_{n-1}\cdot x_n] / b_{n-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 = -[(a_2 - \lambda)\cdot x_2 + b_2 \cdot x_3] / b_1$$

или решив систему

$$\begin{bmatrix} a_1-\lambda & b_1 & & & \\ b_1 & a_2-\lambda & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-3} & a_{n-2}-\lambda & b_{n-2} \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1}-\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -b_{n-1} \end{pmatrix}$$

с неособенной матрицей.

Тема 19. Метод вращений (Якоби)

Если $A = \{a_{i\,j}\}_{i,\,j=1}^{n} = A^*$

то $\exists\ Q = [\vec{q}^{(1)}\ \ \vec{q}^{(2)}\ \ \ldots\ \ \vec{q}^{(n)}]$: 1. $A\vec{q}^{(k)} = \lambda_k \vec{q}^{(k)},\ k = 1, \ldots, n$

2. $Q^* A Q = \Lambda \equiv diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$

3. $Q^* A Q = E$

$$\Rightarrow\ \Phi(Q^* A Q) = \min_{T^* T = E} \Phi(T^* A T), \text{ где } \Phi(A) = \sum_{i \neq j} |\, a_{i,\,j}\,|^2 .$$

Идея:

построить $\{A_k = Q_k^* A_{k-1} Q_k :\ Q_k^* Q_k = E,\ A_0 = A\}_{k=1}^{\infty}$:

$\Phi(A_{k-1}) > \Phi(A_k) \to 0,$

тогда $A_k = (Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_k)^* A (Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_k) \approx \Lambda_k = diag\{(A_k)_{1,1}, \ldots, (A_k)_{n,n}\}$

и $Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \approx \{(A_k)_{1,1}, \ldots, (A_k)_{n,n}\}$.

Определим $S(A)=\sum_{i,\,j=1}^{n}|\,a_{i,\,j}\,|^2 \quad\Rightarrow\quad S(A)=S(A^*)=\varPhi(A)+\sum_{i=1}^{n}|\,a_{i,i}\,|^2$

Лемма 1.

Для любых квадратной матрицы A и унитарной матрицы T имеем

$$S(TA)=S(AT)=S(A).$$

Доказательство.

1. $S(TA)=S(A)$:

   если $A=\left[\vec{a}_1\ \ldots\ \vec{a}_n\right]$, то

$$S(TA)=S([T\vec{a}_1\ \ldots\ T\vec{a}_n])=(T\vec{a}_1,T\vec{a}_1)_2+\ldots+(T\vec{a}_n,T\vec{a}_n)_2=$$

$$=(\vec{a}_1,\vec{a}_1)_2+\ldots+(\vec{a}_n,\vec{a}_n)_2=S(A).$$

2. $S(AT)=S(A)$:

$$S(AT)=S((AT)^*)=S(T^*A^*)=S(A^*)=S(A).$$

Лемма 2.

Пусть $A = A^*,\ \tilde{A} = Q_{i,j}^* A Q_{i,j} = \{\tilde{a}_{k,l}\}_{k,l=1}^n$,

где $Q_{i,j}$ – элементарная матрица вращения,

тогда $\Phi(\tilde{A}) = \Phi(A) + \left[|a_{i,i}|^2 + |a_{j,j}|^2 - |\tilde{a}_{i,i}|^2 - |\tilde{a}_{j,j}|^2 \right]$.

Доказательство.

Заметим, что изменились только строки и столбцы с номерами $i,\ j$.

Тогда, используя лемму 1, получим

$$S(A) \equiv \Phi(A) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i, k\neq j}}^{n} |a_{k,k}|^2 + |a_{i,i}|^2 + |a_{j,j}|^2 \equiv$$

$$\equiv \Phi(\tilde{A}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i, k\neq j}}^{n} |a_{k,k}|^2 + |\tilde{a}_{i,i}|^2 + |\tilde{a}_{j,j}|^2 \equiv S(\tilde{A})$$

откуда следует утверждение леммы.

Выбор вращения

Для простоты будем полагать, что матрица A вещественная.

Выразим разность $\Phi(A)-\Phi(\tilde{A}) = |\tilde{a}_{i,i}|^2 + |\tilde{a}_{j,j}|^2 - |a_{i,i}|^2 - |a_{j,j}|^2$

через элементы матрицы A.

Лемма 3.

Пусть $A=A^*$, $\tilde{A}=Q_{i,j}^*AQ_{i,j}=\{\tilde{a}_{k,l}\}$, где $Q_{i,j}$ с α – угол вращения,

то
$$\begin{cases} \Phi(A)-\Phi(\tilde{A}) = 2|a_{i,j}|^2 - \dfrac{1}{2}\Big[(a_{i,i}-a_{j,j})\sin 2\alpha + 2a_{i,j}\cos 2\alpha\Big]^2 = \\ \qquad = 2|a_{i,j}|^2 - 2|\tilde{a}_{i,j}|^2 \end{cases}$$

Доказательство.

Требуемые равенства выводятся из тождества

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{i,i} & \tilde{a}_{i,j} \\ \tilde{a}_{i,j} & \tilde{a}_{j,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{i,j} & a_{j,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Лемма 4. Пусть $A = A^*$, $\tilde{A} = Q_{i,j}^* A Q_{i,j} = \{\tilde{a}_{k,l}\}$,

где $Q_{i,j}$ – элементарная матрица вращения такая, что

$$|a_{i,j}| = \max_{k \neq l} |a_{k,l}|, \quad (a_{i,i} - a_{j,j}) \sin 2\alpha + 2a_{i,j} \cos 2\alpha = 0,$$

то $\Phi(\tilde{A}) \leq \left[1 - 2/(n(n-1))\right] \cdot \Phi(A)$.

Доказательство.

1. Из леммы 3. $\Rightarrow$ $\Phi(\tilde{A}) = \Phi(A) - 2|a_{i,j}|^2$

2. $$\begin{cases} \Phi(A) = \sum\limits_{k,l=1;\ k \neq l}^{n} |a_{k,l}|^2 \leq |a_{i,j}|^2 \cdot \sum\limits_{k,l=1;\ k \neq l}^{n} 1 = n(n-1)|a_{i\,j}|^2 \\ \qquad \Rightarrow \ |a_{i\,j}|^2 \geq \dfrac{1}{n(n-1)} \Phi(A) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \Phi(\tilde{A}) = \Phi(A) - 2|a_{i,j}|^2 \leq \Phi(A) - 2\frac{1}{n(n-1)} \Phi(A).$$

Лемма 5. Решением уравнения $a \cdot \sin 2\alpha + 2b \cdot \cos 2\alpha = 0$ при $b \neq 0$ является угол α такой, что

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \frac{a}{r})}, \quad r = \sqrt{|a|^2 + 4|b|^2},$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{r \cdot \cos\alpha} = sign\, b \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{a}{r})}.$$

Доказательство.

1. $r = \sqrt{|a|^2 + 4|b|^2} \neq 0$
2. $\frac{a}{r} \cdot \sin 2\alpha + \frac{2b}{r} \cdot \cos 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2\alpha = -\frac{a}{r}$ & $\sin 2\alpha = \frac{2b}{r}$
3. $\cos 2\alpha \equiv 2\cos^2\alpha - 1 \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \sqrt{(\cos 2\alpha - 1)/2}$
4. $\sin 2\alpha = 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha \;\Rightarrow\; \sin\alpha = \sin 2\alpha / (2\cos\alpha)$

$\Rightarrow$ формулы леммы.

Из последних двух лемм следует справедливость теоремы сходимости метода.

Теорема 1.

Если $A = A^*$,

то последовательность матриц $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ **метода вращений**:

$$A_0 = A, \quad A_k = Q_k^* A_{k-1} Q_k,$$

где $Q_k = Q_{i(k),\, j(k)}$ – матрицы вращения (леммы 4 и 5),

сходится к диагональному виду, т.е.

$$\Phi(A_k) \to 0,$$

и

$$\Phi(A_k) \le \left[1 - 2/(n(n-1))\right]^k \cdot \Phi(A).$$

Из теоремы 1. $\Rightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ k = k(\varepsilon)$:

$$\tilde{A} \equiv A_k = (Q_1 ... Q_k)^* A (Q_1 ... Q_k) \equiv \tilde{Q}^* A \tilde{Q}, \qquad \Phi(\tilde{A}) \le \varepsilon^2.$$

Сходимость собственных значений

Пусть $\Phi(\tilde{A}) \le \varepsilon^2$, $\begin{cases} \tilde{\Lambda} = diag\, \tilde{A} = diag\,\{\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_n\}, \\ \Lambda = Q^* A Q = diag\,\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}. \end{cases}$

Лемма 6.

$$\tilde{P}(\lambda) \equiv \det(\tilde{\Lambda} - \lambda E) \to P(\lambda) \equiv \det(A - \lambda E) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Доказательство.

1. $\det(\tilde{\Lambda} - \lambda E) = \det(\tilde{Q}\tilde{\Lambda}\tilde{Q}^* - \lambda E)$,

2. $\tilde{Q}\tilde{\Lambda}\tilde{Q}^* = A - \tilde{Q}(\tilde{A} - \tilde{\Lambda})\tilde{Q}^*$,

3. $S(\tilde{Q}(\tilde{A} - \tilde{\Lambda})\tilde{Q}^*) = S(\tilde{A} - \tilde{\Lambda}) = \Phi(\tilde{A}) \le \varepsilon^2 \to 0$

$$\Rightarrow\ \tilde{Q}(\tilde{A} - \tilde{\Lambda})\tilde{Q}^* \to 0\ \Rightarrow\ \tilde{Q}\tilde{\Lambda}\tilde{Q}^* \to A \Rightarrow \det(\tilde{\Lambda} - \lambda E) \to \det(A - \lambda E).$$

Теорема 2 (оценка приближения собственных значений).

а) $\forall\ \lambda_i \quad \exists\ \tilde{\lambda}_{j(i)}:\ \ |\lambda_i - \tilde{\lambda}_{j(i)}| \le \sqrt{n}\cdot\varepsilon,$

б) $\forall\ \tilde{\lambda}_j \quad \exists\ \lambda_{i(j)}:\ \ |\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_{i(j)}| \le \sqrt{n}\cdot\varepsilon.$

Доказательство.

Т.к. $Q\Lambda Q^* = A = \tilde{Q}\tilde{\Lambda}\tilde{Q}^* + \tilde{Q}(\tilde{A} - \tilde{\Lambda})\tilde{Q}^*$, то

$\Lambda(Q^*\tilde{Q}) - (Q^*\tilde{Q})\tilde{\Lambda} = (Q^*\tilde{Q})(\tilde{A} - \tilde{\Lambda}) \equiv \mathcal{E}, \quad |\varepsilon_{i,j}|^2 \le\ S(\mathcal{E}) \le \varepsilon^2.$

$\Rightarrow \lambda_i \cdot r_{i,j} - r_{i,j}\cdot\tilde{\lambda}_j = \varepsilon_{i,j},$ где $\{r_{i,j}\} = R = Q^*\tilde{Q}.$

а) $\forall\ i\ \ \exists\ j(i):\ |r_{i,j(i)}|^2 = \max\limits_k |r_{i,k}|^2 \ge 1/n$, т.к. $|r_{i,1}|^2 + \ldots + |r_{i,n}|^2 = 1.$

$\Rightarrow |\lambda_i - \tilde{\lambda}_{j(i)}| = |\varepsilon_{i,j} / r_{i,j(i)}| \le \sqrt{n}\cdot\varepsilon.$

б) доказывается аналогично.

Сходимость собственных векторов

Будем предполагать, что $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ и $\tilde{\lambda}_1 \le \tilde{\lambda}_2 \le \ldots \le \tilde{\lambda}_n$.

Лемма 7. Если $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$, $\quad \tilde{\lambda}_1 \le \tilde{\lambda}_2 \le \ldots \le \tilde{\lambda}_n$, $\quad \sqrt{n} \cdot \varepsilon < 0.5 \cdot a$,

$$a = \min_{i \ne j} |\lambda_i - \lambda_j|,$$

то $|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i| \le \sqrt{n} \cdot \varepsilon$, $\quad |\lambda_i - \tilde{\lambda}_j| > 0.5 \cdot a \;\; \forall\, i \ne j$.

Доказательство.

1. В $\forall$ интервале $I_k = (-0.5a + \lambda_k,\, \lambda_k + 0.5a)$ есть число $\tilde{\lambda}_{i(k)}$

2. Интервалы попарно не имеют общих точек

$\Rightarrow$ в $\forall$ интервале $I_k = (-0.5a + \lambda_k,\, \lambda_k + 0.5a)$ одно число $\tilde{\lambda}_{i(k)=k}$

3. Расстояние от λ_k до интервала $I_{l \ne k}$ больше $0.5a$

$\Rightarrow$ $|\lambda_i - \tilde{\lambda}_j| > 0.5 \cdot a \;\; \forall\, i \ne j$.

Т.к. собственные векторы $Q = \left[\vec{q}_1 \ ... \ \vec{q}_n \right]$ матрицы A определяются с точностью до их направления, будем считать, что $(\vec{q}_i, \tilde{\vec{q}}_i) \geq 0$ ($\left[\tilde{\vec{q}}_1 \ ... \ \tilde{\vec{q}}_n \right] = \tilde{Q}$ – приближения к собственным векторам матрицы A), т.е. диагональные элементы матрицы $R = Q^* \tilde{Q}$ неотрицательны.

Теорема 3. (оценка приближения собственных векторов).

В условиях леммы 7 $\quad S(Q - \tilde{Q}) \leq \dfrac{8}{a^2}\, \varepsilon^2$.

Доказательство.

Т.к. $S(Q - \tilde{Q}) = S(E - Q^* \tilde{Q}) \equiv S(E - R)$ и из доказательства теоремы 2 ($\mathcal{E} = \Lambda R - R \tilde{\Lambda} = R(\tilde{A} - \tilde{\Lambda})$) и леммы 7 следует, что

$$| r_{i,j} | = \frac{| \varepsilon_{i,j} |}{| \lambda_i - \tilde{\lambda}_j |} < \frac{| \varepsilon_{i,j} |}{0.5 \cdot a} \ \ \forall\, i \neq j, \text{ то } \Phi(E - R) < \frac{4}{a^2}\, S(\mathcal{E}) \leq \frac{4}{a^2}\, \varepsilon^2.$$

Осталось оценить $\sum_{i=1}^{n} \underset{\geq 0}{(1-r_{i,i})^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(1-\sqrt{1-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |r_{i,j}|^2}\right)^2$

Т.к. $(1-x)^2 \leq 1-x \;\; \forall \; x \in [0,1]$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1-\sqrt{1-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |r_{i,j}|^2}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(1-\sqrt{1-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |r_{i,j}|^2}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |r_{i,j}|^2}{1+\sqrt{1-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |r_{i,j}|^2}} \leq \Phi(R) = \Phi(E-R) \leq \frac{4}{a^2}\,\varepsilon^2 .$$

Подводя итог, имеем

$$S(Q-\tilde{Q}) = S(E-R) = \Phi(E-R) + \sum_{i=1}^{n} (1-r_{i,i})^2 \leq \frac{8}{a^2}\,\varepsilon^2 .$$