МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Новосибирский государственный университет» (НГУ)

Механико-математический факультет

# ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОННОМУ ЛЕКЦИОННОМУ КУРСУ

## «Вычислительные методы линейной алгебры»

Основная образовательная программа подготовки бакалавров ММФ НИУ-НГУ (Новосибирск, Россия) – Хэйлунцзянский университет (Харбин, Китай)

Новосибирск

2014

**Задачи по электронному лекционному курсу**

«Вычислительные методы линейной алгебры»

разработаны в соответствии с требованиями к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированного бакалавра

по профессиональному циклу дисциплин (базовая часть) по направлению подготовки «Математика»,

а также задачами, стоящими перед Новосибирским государственным университетом по реализации Программы развития НГУ как национального исследовательского института и сотрудничества с Хэйлунцзянским университетом (Харбин, Китайская народная республика).

Автор:

Мацокин Александр Михайлович, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры Вычислительной математики.

Механико-математический факультет НГУ.

# **Вычислительные методы линейной алгебры**

Задачи по электронному лекционному курсу

**Мацокин Александр Михайлович**

профессор кафедры вычислительной математики
Новосибирского государственного университета

1. Прямые методы решения системы линейных алгебраических уравнений.
2. Итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений.
3. Итерационные методы решения задачи на собственные значения самосопряженной матрицы.

## Часть 1. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

# Темы 1 – 2. Основные обозначения и определения.

**Задача 1-2.1.**

Дано: $z = 2 + 3 \cdot \underline{i}$, $w = 4 + 5 \cdot \underline{i}$

Найти:

$\overline{z} = ?$ $z \cdot \overline{z} = ?$ $|z| = ?$ $z + \overline{z} = ?$ $z - \overline{z} = ?$ $11 \cdot z = ?$

$\overline{w} = ?$ $w \cdot \overline{w} = ?$ $|w| = ?$ $w + \overline{w} = ?$ $w - \overline{w} = ?$ $11 \cdot \overline{w} = ?$

$z + w = ?$ $|z + w| = ?$

$z \cdot w = ?$ $|z \cdot w| = ?$

$1/z = ?$ $1/\overline{w} = ?$

$1/(z + w) = ?$

$1/(z \cdot w) = ?$

$w/z = ?$

*формула деления*:

$$(a + \underline{i} \cdot b)/(c + \underline{i} \cdot d) = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} + \underline{i} \cdot \frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2}$$

**Задача 1-2.2.**

Дано: $\vec{z}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}3\\4+\underline{i}\end{pmatrix}$

Найти:

$(\vec{z})^T=?\qquad(\vec{z})^*=?\qquad(\vec{z},\,\vec{z})_2=?$

$(\vec{w})^T=?\qquad(\vec{w})^*=?\qquad(\vec{w},\,\vec{w})_2=?\qquad(\vec{z},\,\vec{w})_2=?$

$\vec{z}+\vec{w}=?\qquad10\cdot\vec{z}+\underline{i}\cdot\vec{w}=?\qquad(\vec{z}+\vec{w},\,\vec{z}-\vec{w})_2=?$

$\vec{z}^T\cdot\vec{w}=?\qquad\vec{w}^*\cdot\vec{z}=?$

$\vec{w}\cdot\vec{z}^T=?\qquad\vec{z}\cdot\vec{w}^*=?$

**Задача 1-2.3.**

Дано: $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 + \underline{i} \end{pmatrix}$

Найти: $\begin{cases} \| \vec{z} \|_1 = ? \quad \| \vec{z} \|_2 = ? \quad \| \vec{z} \|_\infty = ? \\ \| \vec{w} \|_1 = ? \quad \| \vec{w} \|_2 = ? \quad \| \vec{w} \|_\infty = ? \\ (\vec{w})^T = ? \quad (\vec{w})^* = ? \quad (\vec{w}, \vec{w})_2 = ? \quad (\vec{z}, \vec{w})_2 = ? \end{cases}$

**Задача 1-2.4.**

Дано: $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + 2 \cdot \underline{i} \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 + \underline{i} \end{pmatrix}$

Найти: $\begin{cases} \| \vec{z} \|_1 = ? \quad \| \vec{z} \|_2 = ? \quad \| \vec{z} \|_\infty = ? \\ \| \vec{w} \|_1 = ? \quad \| \vec{w} \|_2 = ? \quad \| \vec{w} \|_\infty = ? \end{cases}$

**Задача 1-2.5.**

Доказать неравенства:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \| \vec{z} \|_1 \le \| \vec{z} \|_2 \le \| \vec{z} \|_1 \quad \forall\ \vec{z} \in C^n.$$

Построить вектор $\vec{z} \in C^n$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \| \vec{z} \|_1 = \| \vec{z} \|_2.$$

Построить вектор $\vec{z} \in C^n$:

$$\| \vec{z} \|_2 = \| \vec{z} \|_1.$$

**Задача 1-2.6.**

Доказать неравенства:

$$\frac{1}{n}\cdot \| \vec{z} \|_1 \le \| \vec{z} \|_\infty \le \| \vec{z} \|_1 \quad \forall\ \vec{z} \in C^n.$$

Построить вектор $\vec{z} \in C^n$:

$$\frac{1}{n}\cdot \| \vec{z} \|_1 = \| \vec{z} \|_\infty.$$

Построить вектор $\vec{z} \in C^n$:

$$\| \vec{z} \|_\infty = \| \vec{z} \|_1.$$

**Задача 1-2.7.**

Доказать неравенства:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \| \vec{z} \|_2 \le \| \vec{z} \|_\infty \le \| \vec{z} \|_2 \quad \forall \ \vec{z} \in C^n.$$

Построить вектор $\vec{z} \in C^n$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \| \vec{z} \|_2 = \| \vec{z} \|_\infty .$$

Построить вектор $\vec{z} \in C^n$:

$$\| \vec{z} \|_\infty = \| \vec{z} \|_2 .$$

**Задача 1-2.8.**

Дано: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$

Найти (вычислить):

$$10\cdot A=10\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=? \qquad 5\cdot B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}=?$$

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}=?$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}=?$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=?$$

**Задача 1-2.9.**

Дано: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Найти (вычислить):

$$A\vec{z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = ? \qquad A^T = ? \qquad A^T \vec{z} = ?$$

**Задача 1-2.10.**

Дано: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Найти (вычислить):

$$\| A \|_1 = ? \qquad \| A \|_\infty = ?$$

$$\| A^T \|_1 = ? \qquad \| A \|_\infty = ?$$

**Задача 1-2.11.**

Дано: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

Найти (вычислить):

$$\det A = ? \qquad \det B = ? \qquad \det(A \cdot B) = ?$$

$$\det A^T = ? \qquad \det B^T = ? \qquad \det(A^T \cdot B^T) = ?$$

**Задача 1-2.12.**

Дано: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

Найти (вычислить):

$$A^{-1} = ? \qquad B^{-1} = ? \qquad (A \cdot B)^{-1} = ?$$

$$(A^T)^{-1} = ? \qquad (B^T)^{-1} = ? \qquad [(A \cdot B)^T]^{-1} = ?$$

**Задача 1-2.13.**

Дано: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

Найти (вычислить):

$A^{-1} = ? \qquad B^{-1} = ? \qquad (A \cdot B)^{-1} = ?$

$(A^T)^{-1} = ? \qquad (B^T)^{-1} = ? \qquad [(A \cdot B)^T]^{-1} = ?$

**Задача 1-2.14.**

Дано: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Вычислить собственные числа $\lambda$ и векторы $\vec{x}$:

$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$

$A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$

# Тема 3. Ошибки округления и число обусловленности.

Если $$x = 10^n \cdot (x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + x_3 \cdot 10^{-3} + \ldots), \quad x_1 \neq 0,$$

то $$r_3(x) \equiv \tilde{x} = 10^n \cdot (x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + x_3 \cdot 10^{-3}).$$

Примеры.

| $x$ | $\tilde{x}$ | $\lvert x - \tilde{x} \rvert / \lvert x \rvert \leq 10^{-3}$ |
|---|---|---|
| $1.099 = 0.1099 \cdot 10^{+1}$ | $1.09 = 0.109 \cdot 10^{+1}$ | $\approx 0.819 \cdot 10^{-3}$ |
| $10.99 = 0.1099 \cdot 10^{+2}$ | $10.9 = 0.109 \cdot 10^{+2}$ | $\approx 0.819 \cdot 10^{-3}$ |

**Задача 3.1.**

Заполнить таблицу

| $x$ | $\tilde{x}$ | $\lvert x - \tilde{x} \rvert / \lvert x \rvert$ |
|---|---|---|
| $12.34 =$ | | |
| $2.345 =$ | | |

**Задача 3.2.**

Проверить таблицу

| $x+y$ | $r_3(\tilde{x}+\tilde{y})$ |
|---|---|
| 1+0.001 = 1.001 | 1 |
| 1.123–1.122 = 0.001 | 0 |

**Задача 3.3.**

Проверить таблицу

| $x+y+z$ | $r_3[r_3(\tilde{x}+\tilde{y})+\tilde{z}]$ | $r_3[\tilde{x}+r_3(\tilde{y}+\tilde{z})]$ |
|---|---|---|
| 1+0.005+0.005= 1.01 | 1 | 1.01 |

**Задача 3.4.**

Проверить таблицу

| $(x+y)\cdot z$ | $r_3[r_3(\tilde{x}+\tilde{y})\cdot\tilde{z}]$ | $r_3[r_3(\tilde{x}\cdot\tilde{z})+r_3(\tilde{y}\cdot\tilde{z})]$ |
|---|---|---|
| (1+0.005)·2= 2.01 | 2 | 2.01 |

**Задача 3.5.**

Проверить таблицу

| $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}\equiv x+y$ | $r_3[\dfrac{r_3(\tilde{x}^2)-r_3(\tilde{y}^2)}{r_3(\tilde{x}-\tilde{y})}]$ | $r_3(\tilde{x}+\tilde{y})$ |
|---|---|---|
| $\dfrac{1.01^2-1}{1.01-1}=2.01$ | 2 | 2.01 |
| $\dfrac{1.001^2-1}{1.001-1}=2.001$ | $\infty$ | 2 |

$$Cond_{\infty} A = \| A \|_{\infty} \cdot \| A^{-1} \|_{\infty} \quad Cond_{\infty}(L \cdot U) \le Cond_{\infty} L \cdot Cond_{\infty} U$$

**Задача 3.6.**

Проверить равенства:

$$L = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \qquad L^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -100 & 1 \end{bmatrix} \qquad Cond_{\infty} L = 11 \cdot 101 \approx 10^3$$

---

$$U = \begin{bmatrix} 0.1 & -10 \\ 0 & 101 \end{bmatrix} \qquad U^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & \dfrac{1}{1.01} \\ 0 & \dfrac{1}{101} \end{bmatrix} \qquad Cond_{\infty} U = 101 \cdot \frac{11.1}{1.01} \approx 10^3$$

---

$$A = LU = \begin{bmatrix} 0.01 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1.01} & \dfrac{1}{1.01} \\ -\dfrac{1}{1.01} & \dfrac{1}{101} \end{bmatrix} \quad Cond_{\infty} A = 2 \cdot \frac{2}{1.01} \approx 4$$

$$\left.\begin{aligned} &A\vec{x} = \vec{b} \\ &A[\vec{x} + \delta(\vec{x})] = \vec{b} + \delta(\vec{b}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\|\delta(\vec{x})\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} \le Cond_\infty A \cdot \frac{\|\delta(\vec{b})\|_\infty}{\|\vec{b}\|_\infty}$$

**Задача 3.7.**

Проверить равенства:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 0.01 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{b} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A\delta(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0.01 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.0198 \\ -0.0098 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix} = \delta(\vec{b}) \qquad \delta(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0.0198 \\ -0.0098 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|\delta(\vec{x})\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} = \frac{0.0198}{1} \le Cond_\infty A \cdot \frac{\|\delta(\vec{b})\|_\infty}{\|\vec{b}\|_\infty} = 4 \cdot \frac{0.01}{1.01} = 0.0396$$

**Задача 3.8.**

Проверить равенства:

$$L\,\vec{y} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 10.1 \\ -101 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{b} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 10.1 \\ -101 \end{pmatrix}$$

$$L\,\delta(\vec{y}) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix} = \delta(\vec{b}) \qquad \delta(\vec{y}) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.99 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|\delta(\vec{y})\|_\infty}{\|\vec{y}\|_\infty} = \frac{0.99}{101} = 0.0098 \le Cond_\infty L \cdot \frac{\|\delta(\vec{b})\|_\infty}{\|\vec{b}\|_\infty} = 10^3 \cdot \frac{0.01}{1.01} = 9.9$$

**Задача 3.9*.**

Проверить равенства:

$$U(\underbrace{\vec{x}+\delta_{\vec{y}}(\vec{x})}_{\vec{z}})=\begin{bmatrix}0.1 & -10\\ 0 & 101\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1.0198\\ -1.0098\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10.20\\ -101.99\end{pmatrix}=\vec{y}+\delta(\vec{y})$$

$$U\delta(\vec{z})=\begin{bmatrix}0.1 & -10\\ 0 & 101\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0.1\\ 0.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.01\\ 0\end{pmatrix}=\delta(\vec{y}+\delta(\vec{y}))$$

$$\vec{x}+\delta(\vec{x})=\vec{z}+\delta(\vec{z}) \;\Rightarrow\; \delta(\vec{x})=-\vec{x}+\vec{z}+\delta(\vec{z})=$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1.0198\\ -1.0098\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.1\\ 0.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1198\\ -0.0098\end{pmatrix}$$

$$\frac{\|\delta(\vec{x})\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty}=\frac{0.1198}{1}\le Cond_\infty L\cdot Cond_\infty U\cdot\frac{\|\delta(\vec{b})\|_\infty}{\|\vec{b}\|_\infty}=10^6\cdot\frac{0.01}{1.01}\approx 10^4$$

## Тема 4. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Методы Гаусса исключения неизвестных.

$$L = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{bmatrix} \text{ – нижняя треугольная матрица.}$$

**Задача 4.1.**

Дано:

$$L = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{bmatrix} \text{ – нижняя треугольная матрица}$$

Проверить:

$$\det L = l_{1,1} \cdot l_{2,2} \cdot l_{3,3}$$

**Задача 4.2.**

Даны матрицы:

$$L = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} \text{ – нижние треугольные}$$

Проверить:

$A = L \cdot M$ – нижняя треугольная матрица.

**Задача 4.3.**

Дана $L = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{bmatrix}$ – нижняя треугольная матрица.

Доказать:

$L^{-1}$ – нижняя треугольная матрица.

**Задача 4.4.**

Даны $L_1 = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{2,2} & 0 \\ 0 & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$, $L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{3,3} \end{bmatrix}$

– элементарные нижние треугольные матрицы.

Проверить:

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} l_{1,1}^{-1} & 0 & 0 \\ -l_{2,1}l_{1,1}^{-1} & 1 & 0 \\ -l_{3,1}l_{1,1}^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{2,2}^{-1} & 0 \\ 0 & -l_{3,2}l_{2,2}^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{3,3}^{-1} \end{bmatrix}.$$

**Задача 4.5.**

Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

построить $L_1 = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$: $A_1 \equiv L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix}$;

вычислить $A_1 = L_1 A$.

**Ответ.**

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 \equiv L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Задача 4.6.**

Для матрицы $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

построить $L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{2,2} & 0 \\ 0 & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$: $A_2 \equiv L_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$;

вычислить $A_2 = L_2 A_1$.

**Ответ.**

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = L_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Задача 4.7.**

Для матрицы $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

построить $L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{3,3} \end{bmatrix}$: $A_3 \equiv L_3 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv U$;

вычислить $U = A_3 = L_3 A_2$.

**Ответ.**

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = A_3 = L_3 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Тема 4.1. Методы Гаусса исключения неизвестных: схема единственного деления.

В задачах 4.5, 4.6 и 4.7 для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Построены матрицы $L_1,\ L_2,\ L_3$ и $U$:

$$L_3 L_2 L_1 A = U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ – верхняя треугольная матрица.

$\Rightarrow$

- $\det A = \det U \ \ / \ \ (\det L_1 \cdot \det L_2 \cdot \det L_3)$.
- $A\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \ U\,\vec{x} = L_3 L_2 L_1 \vec{b} \equiv \vec{y}$ – прямой ход схемы единственного деления метода Гаусса исключения неизвестных; решение системы $U\,\vec{x} = \vec{y}$ – обратный ход.

**Задача 4.8.**

Дана система $\begin{bmatrix} 1 & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & 1 & u_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Проверьте формулы для ее решения:

$$x_3 = y_3, \quad x_2 = -u_{2,3} \cdot x_3 + y_2, \quad x_1 = -u_{1,2} \cdot x_2 - u_{1,3} \cdot x_3 + y_1.$$

**Задача 4.9.**

Дана система $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Решите ее, используя результаты задач 4.5. – 4.9.

**Ответ.** $x_3 = x_2 = x_1 = 1$.

## Тема 4.2. Методы Гаусса исключения неизвестных: схема единственного деления с выбором главного элемента.

**Элементарная матрица перестановок** $P_{i,j}$ – матрица, полученная перестановкой в матрице $E$ её $i$-й и $j$-й строк.

Умножение $P_{i,j}A$ = перестановка $i$-й и $j$-й строк матрицы $A$.

Умножение $AP_{i,j}$ = перестановка $i$-го и $j$-го столбца матрицы $A$.

$\det P_{i,j} = -1$, $P_{i,j} = P_{i,j}^T = P_{i,j}^{-1}$ – симметричная ортогональная матрица.

**Примеры:**

$$P_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Задача 4.2.1.**

Дана система $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 2 & -4 & -8 \\ 1 & 2 & -12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -13 \end{pmatrix} = \vec{b}$.

Выполнить 1 шаг метода исключения неизвестных с выбором главного элемента по столбцу:

1. найти $i_1 : |a_{i_1,1}| \geq |a_{i,1}| \ \ \forall\, i \geq 1$;
2. для матрицы $P_{1,i_1} A$ построить матрицу $L_1$ «обнуления» элементов $(P_{1,i_1} A)_{i,1} \ \ \forall\, i > 1$;
3. умножить систему $A\vec{x} = \vec{b}$ на матрицу $L_1 P_{1,i_1}$:

   $A^{(1)}\vec{x} \equiv [L_1(P_{1,i_1})]A\vec{x} = [L_1(P_{1,i_1})]\vec{b} \equiv \vec{b}^{(1)}$.

**Ответ** (задача 4.2.1.)**.**

1. $i_1 = 2;$

2. $L_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

3. $A^{(1)}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} = \vec{b}^{(1)}.$

**Задача 4.2.2.**

Дана система $A^{(1)}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} = \vec{b}^{(1)}.$

Выполнить 2 шаг метода исключения неизвестных с выбором главного элемента по столбцу:

1. найти $i_2 : |a^{(1)}_{i_2,2}| \geq |a^{(1)}_{i,2}| \;\; \forall\, i \geq 2;$
2. для матрицы $P_{2,i_2} A^{(1)}$ построить матрицу $L_2$ «обнуления» элементов $(P_{2,i_2} A^{(1)})_{i,2} \;\; \forall\, i > 2;$
3. умножить систему $A^{(1)}\vec{x} = \vec{b}^{(1)}$ на матрицу $L_2 P_{2,i_2}$:
   $A^{(2)}\vec{x} \equiv [L_2(P_{2,i_2})]A^{(1)}\vec{x} = [L_2(P_{2,i_2})]\vec{b}^{(1)} \equiv \vec{b}^{(2)}.$

**Ответ** (задача 4.2.2.)**.**

1. $i_2 = 3;$

2. $L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{bmatrix};$

3. $A^{(2)}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{b}^{(2)}.$

**Задача 4.2.3.**

Дана система $A^{(2)}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{b}^{(2)}.$

Выполнить 3 (последний) шаг метода исключения неизвестных с выбором главного элемента по столбцу:

1. найти $i_3 : |a_{i_3,3}^{(2)}| \geq |a_{i_3,3}^{(2)}| \ \ \forall\, i \geq 3;$
2. для матрицы $P_{3,i_3}A^{(2)}$ построить матрицу $L_3$ «обнуления» элементов $(P_{3,i_3}A^{(2)})_{i,3} \ \ \forall\, i > 3;$
3. умножить систему $A^{(2)}\vec{x} = \vec{b}^{(2)}$ на матрицу $L_3 P_{3,i_3}$:
   $A^{(3)}\vec{x} \equiv [L_3(P_{3,i_3})]A^{(2)}\vec{x} = [L_3(P_{3,i_3})]\vec{b}^{(2)} \equiv \vec{b}^{(3)}.$

**Ответ** (задача 4.2.3.)**.**

1. $i_3 = 3 \Rightarrow \; P_{3,i_3} = E;$

2. $L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix};$

3. $U\,\vec{x} \equiv A^{(3)}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{b}^{(3)} \equiv \vec{y}\,.$

Задачи 4.2.1 – 4.2.3 – **прямой ход** метода исключения неизвестных с выбором главного элемента по столбцу.

**Обратный ход** метода – решение системы $U\,\vec{x} = \vec{y}$ по формулам из задачи 4.8.

## Тема 4.3. Методы Гаусса исключения неизвестных: метод прогонки решения систем с трехдиагональной матрицей.

Решение $\vec{x}$ системы

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & 0 & c_n & a_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

ищется в виде $x_i = \beta_i \cdot x_{i+1} + z_i$, $i = 1, ..., n$; $x_{n+1} = 0$.

Вычисление $\{\beta_i,\ z_i\}$ – **прямой ход** метода прогонки.

Вычисление $x_n = z_n$, $x_i = \beta_i \cdot x_{i+1} + z_i$, $i = n-1, ..., 1$ – **обратный ход** метода прогонки.

**Задача 4.3.1.**

Проверьте вывод формул для коэффициентов метода прогонки:

$$a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot x_2 = f_1 \;\Rightarrow\; a_1 \cdot x_1 = -a_1^{-1} b_1 \cdot x_2 + a_1^{-1} f_1 \;\Rightarrow$$

$$\beta_1 = -a_1^{-1} b_1, \quad z_1 = a_1^{-1} f_1$$

$$c_2 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + b_2 \cdot x_3 = f_2 \;\Rightarrow\; (c_2 \beta_1 + a_2) \cdot x_2 + b_2 \cdot x_3 = f_2 - c_2 z_1 \;\Rightarrow$$

$$\beta_2 = -(c_2 \beta_1 + a_2)^{-1} b_2, \quad z_2 = (c_2 \beta_1 + a_2)^{-1} (f_2 - c_2 z_1)$$

$$c_3 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + b_3 \cdot x_4 = f_3 \;\Rightarrow\; (c_3 \beta_2 + a_3) \cdot x_3 + b_3 \cdot x_4 = f_3 - c_3 z_2 \;\Rightarrow$$

$$\beta_3 = -(c_3 \beta_2 + a_3)^{-1} b_3, \quad z_3 = (c_3 \beta_2 + a_3)^{-1} (f_3 - c_3 z_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_{n-1} = -(c_{n-1} \beta_{n-2} + a_{n-1})^{-1} b_{n-1}, \quad z_2 = (c_{n-1} \beta_{n-2} + a_2)^{-1} (f_{n-1} - c_{n-1} z_{n-2})$$

$$c_n \cdot x_{n-1} + a_n \cdot x_n = f_n \;\Rightarrow\; (c_n \beta_{n-1} + a_n) \cdot x_n = f_n - c_n z_{n-1} \;\Rightarrow$$

$$z_n = (c_n \beta_{n-1} + a_n)^{-1} (f_n - c_n z_{n-1})$$

**Задача 4.3.2.**

Решите систему

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

методом прогонки.

**Ответ.**

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1; \;\; z_1 = z_2 = z_3 = -1, \;\; z_4 = 4;$$

$$x_4 = z_4 = 4, \;\; x_3 = \beta_3 \cdot x_4 + z_3 = 3, \;\; x_2 = \beta_2 \cdot x_3 + z_2 = 2,$$

$$x_1 = \beta_1 \cdot x_2 + z_1 = 1.$$

**Решение** задачи 4.3.2.

$$\beta_1 = -a_1^{-1} b_1 = 1 \qquad z_1 = a_1^{-1} f_1 = -1$$

$$\beta_2 = -(c_2\beta_1 + a_2)^{-1} b_2 = 1 \qquad z_2 = (c_2\beta_1 + a_2)^{-1}(f_2 - c_2 z_1) = -1$$

$$\beta_3 = -(c_3\beta_2 + a_3)^{-1} b_3 = 1 \qquad z_3 = (c_3\beta_2 + a_3)^{-1}(f_3 - c_3 z_2) = -1$$

$$z_4 = (c_4\beta_3 + a_4)^{-1}(f_4 - c_4 z_3) = +4$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_4 = z_4 = 4, \;\; x_3 = \beta_3 \cdot x_4 + z_3 = 3, \;\; x_2 = \beta_2 \cdot x_3 + z_2 = 2,$$

$$x_1 = \beta_1 \cdot x_2 + z_1 = 1\,.$$

**Задача 4.3.3.**

Решите систему

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n+1 \end{pmatrix}$$

методом прогонки.

**Ответ.**

$$\beta_1 = \ldots = \beta_{n-1} = 1; \;\; z_1 = \ldots = z_{n-1} = -1, \;\; z_n = n$$

$$x_n = n, \;\; x_{n-1} = n-1, \;\; \ldots, \;\; x_1 = 1\,.$$

**Задача 4.3.4.**

Решите систему

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

методом прогонки.

**Ответ.**

$$\beta_1 = \frac{1}{2},\ \ \beta_2 = \frac{2}{3},\ \ \beta_3 = \frac{3}{4},\ \ ;\ \ z_1 = 1,\ \ z_2 = 2,\ \ z_3 = 3,\ \ z_4 = 4;$$

$$x_4 = z_4 = 4,\ x_3 = \beta_3 \cdot x_4 + z_3 = 6,\ x_2 = \beta_2 \cdot x_3 + z_2 = 6,$$

$$x_1 = \beta_1 \cdot x_2 + z_1 = 4\,.$$

**Решение** задачи 4.3.4.

$$\beta_1 = -a_1^{-1} b_1 = 1/2 \qquad z_1 = a_1^{-1} f_1 = 1$$

$$\beta_2 = -(c_2\beta_1 + a_2)^{-1} b_2 = 2/3 \qquad z_2 = (c_2\beta_1 + a_2)^{-1}(f_2 - c_2 z_1) = 2$$

$$\beta_3 = -(c_3\beta_2 + a_3)^{-1} b_3 = 3/4 \qquad z_3 = (c_3\beta_2 + a_3)^{-1}(f_3 - c_3 z_2) = 3$$

$$z_4 = (c_4\beta_3 + a_4)^{-1}(f_4 - c_4 z_3) = 4$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4 = z_4 = 4, \;\; x_3 = \beta_3 \cdot x_4 + z_3 = 6, \;\; x_2 = \beta_2 \cdot x_3 + z_2 = 6, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_1 = \beta_1 \cdot x_2 + z_1 = 4\,. \end{cases}$$

**Задача 4.3.5.**

Решите систему

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

методом прогонки.

**Ответ.**

$$\beta_1 = \frac{1}{2},\ \ \beta_2 = \frac{2}{3},\ \ \ldots,\ \ \beta_n = \frac{n-1}{n};\ \ z_1 = 1,\ \ z_2 = 2,\ \ \ldots,\ \ z_n = n;$$

$$x_n = n\cdot 1,\ x_{n-1} = (n-1)\cdot 2,\ \ x_{n-2} = (n-2)\cdot 3,\ \ \ldots,\ \ x_1 = 1\cdot n.$$

## Тема 5. $LU$ разложение матрицы.

Если $A = LU$, то $A_k = L_k U_k$:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{k,1} & l_{k,2} & \dots & l_{k,k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,k} \\ 0 & u_{2,2} & \dots & u_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{k,k} \end{bmatrix}$$

**Если** матрицы $L_k$ и $U_k$ вычислены, **то** имеем уравнения для последней строки матрицы $L_{k+1}$ и последнего столбца матрицы $U_{k+1}$:

$$L_k \begin{pmatrix} u_{1,k+1} \\ \vdots \\ u_{k,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,k+1} \\ \vdots \\ a_{k,k+1} \end{pmatrix}, \ (U_k)^T \begin{pmatrix} l_{k+1,1} \\ \vdots \\ l_{k+1,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1,1} \\ \vdots \\ a_{k+1,k} \end{pmatrix},$$

$$l_{k+1,k+1} \cdot u_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - \sum_{m=1}^{k} l_{k+1,m} \cdot u_{m,k+1}.$$

**Задача 5.1.**

Для $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ построить $A=LU:\ \forall\ u_{i,i}=1.$

**Решение** задачи 5.1.

$$A_1=\left[2\right]=\left[l_{1,1}\right]\left[1\right]=L_1U_1 \quad \Rightarrow \quad l_{1,1}=2$$

$$A_2=\left[\begin{array}{c:c} 2 & -2 \\ \hdashline -1 & 4 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} 2 & 0 \\ \hdashline l_{2,1} & l_{2,2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} 1 & u_{1,2} \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} l_{2,1}=-1 \\ 2u_{1,2}=-2 \\ l_{2,2}=4-l_{2,1}u_{1,2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{2,1}=-1 \\ u_{1,2}=-1 \\ l_{2,2}=+3 \end{cases}$$

$$A_3=\left[\begin{array}{cc:c} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \\ \hdashline 1 & -2 & 6 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:c} 2 & -0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ \hdashline l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & u_{1,3} \\ 0 & 1 & u_{2,3} \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]=L_3U_3 \ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_{3,1} & l_{3,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,3} \\ u_{2,3} \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \begin{bmatrix} l_{3,1} & l_{3,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_{1,3} \\ u_{2,3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right.$$

$$\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow l_{3,3} = 6 - [1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)] = 4$$

**Ответ.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L \cdot U\,.$$

**Задача 5.2.**

Для $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ построить $A = LU : \forall\ l_{i,i} = 1$.

**Решение** задачи 5.2.

$$A_1 = [2] = [1][u_{1,1}] = L_1 U_1 \quad \Rightarrow \quad u_{1,1} = 2$$

$$A_2 = \left[\begin{array}{c:c} 2 & -1 \\ \hdashline -2 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline l_{2,1} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} 2 & u_{1,2} \\ \hdashline 0 & u_{2,2} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 2l_{2,1} = -2 \\ u_{1,2} = -1 \\ u_{2,2} = 4 - l_{2,1}u_{1,2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{2,1} = -1 \\ u_{1,2} = -1 \\ u_{2,2} = +3 \end{cases}$$

$$A_3 = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ \hdashline 2 & -4 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hdashline l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & u_{1,3} \\ 0 & 3 & u_{2,3} \\ \hdashline 0 & 0 & u_{3,3} \end{array}\right] = L_3 U_3 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{3,1} & l_{3,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,3} \\ u_{2,3} \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} l_{3,1} & l_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} u_{1,3} \\ u_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}\right.$$

$$\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \end{bmatrix} \Rightarrow u_{3,3} = 6 - [1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)] = 4$$

**Ответ.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = L \cdot U\,.$$

## Тема 5.1. Метод квадратного корня.

**Если** $A = A^*$ и $\forall \det A_k > 0$, **то** $A = LL^*$.

**Задача 5.1.1.**

Для $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 11 \end{bmatrix}$ построить $A = LL^T$ и $\forall\ l_{i,i} > 0$.

**Решение** задачи 5.1.1.

$$A_1 = [1] = [l_{1,1}][l_{1,1}] = L_1 L_1^T \quad \Rightarrow \quad l_{1,1} = 1$$

$$A_2 = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 2 \\ \hdashline 2 & 8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline l_{2,1} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} 1 & l_{2,1} \\ \hdashline 0 & l_{2,2} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} l_{2,1} = 2 \\ l_{2,2} = 8 - l_{2,1} l_{1,2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{2,1} = 2 \\ l_{2,2} = 2 \end{cases}$$

$$A_3 = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ \hdashline 1 & 4 & 11 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ \hdashline l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & l_{3,1} \\ 0 & 2 & l_{3,2} \\ \hdashline 0 & 0 & l_{3,3} \end{array}\right] = L_3 L_3^T \;\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{3,1} & l_{3,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} l_{3,1} & l_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} l_{3,1} \\ l_{3,2} \\ \hdashline l_{3,3} \end{array}\right] \;\Rightarrow\; l_{3,3} = \sqrt{11 - (1\cdot 1 + 1\cdot 1)} = 3$$

**Ответ.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = LL^T$$

# Тема 5.2. Положительно определенные матрицы. Критерий Сильвестра. Лемма Гершгорина.

**Определение.** $A = A^T > 0$ *в* $R^n$ – положительно определенная матрица,

если $(A\vec{x}, \vec{x})_2 > 0 \ \ \forall \ \vec{x} \in R^n, \ \vec{x} \neq 0.$

**Задача 5.2.1.**

Доказать, что $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} > 0.$

**Решение** задачи 5.2.1.

$$\forall \ \vec{x} \in R^n \quad (A\vec{x}, \vec{x})_2 \equiv \left( \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)_2 =$$

$$= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 \geq (\vec{x}, \vec{x})_2 > 0 \ \ , \ \vec{x} \neq 0$$

**Теорема.** $A = A^* > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ \lambda(A) > 0.$

**Задача 5.2.2.**

Доказать, что $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} > 0.$

**Решение** задачи 5.2.2.

$$\det(A - \lambda E) = (3 - \lambda)^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1(A) = 2 > 0 \\ \lambda_2(A) = 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A > 0.$$

**Критерий Сильвестра:** если $A = A^*$ и $\forall \det A_k > 0$, то $\forall \lambda(A) > 0$.

**Задача 5.2.3.**

Доказать, что $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} > 0.$

**Решение** задачи 5.2.3.

$$\det A_1 = 1 > 0, \quad \det A_2 = 1 > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1(A) > 0 \\ \lambda_2(A) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A > 0.$$

**Лемма Гершгорина.** $\forall\ \lambda(A)\ \ \exists\ k:\ |\lambda(A)-a_{k,k}|\le R_k$

$$R_k=|a_{k,1}|+\ldots+|a_{k,k-1}|+|a_{k,k+1}|+\ldots+|a_{k,n}|.$$

**Задача 5.2.4.**

Доказать, что $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}>0.$

**Решение** задачи 5.2.4.

1. $A=A^T \ \Rightarrow\ \forall\ \lambda(A)\in R$ – вещественное число.
2. Из леммы Гершгорина $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda(A)\ge a_{1,1}-R_1=1>0 \\ \textit{или} \\ \lambda(A)\ge a_{2,2}-R_2=2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1(A)>0 \\ \lambda_2(A)>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A>0.$$

# Тема 6. Разложение матрицы на произведение ортогональной и верхней треугольной матриц. Метод вращений.

**Задача 6.1.**

Доказать: $Q=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$ – ортогональная матрица вращения.

**Решение** задачи 6.1.

Достаточно проверить равенство $Q^{-1}=Q^T$:

$$QQ^T=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\varphi+\sin^2\varphi & 0\\ 0 & \cos^2\varphi+\sin^2\varphi\end{bmatrix}=E$$

$$\Rightarrow\ Q^{-1}=Q^T$$

**Задача 6.2.**

Дано: $Q = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ – ортогональная матрица вращения.

Вычислить $\det Q$ и $\| Q \|_2$.

**Решение** задачи 6.2.

$$\det Q^T = \det Q = \det \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

$$\| Q \|_2 = \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{\| Q\vec{x} \|_2}{\| \vec{x} \|_2} = \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{\sqrt{(Q\vec{x}, Q\vec{x})_2}}{\| \vec{x} \|_2} = \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{\sqrt{(\vec{x}, Q^T Q\vec{x})_2}}{\| \vec{x} \|_2} =$$

$$= \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})_2}}{\| \vec{x} \|_2} = 1.$$

**Задача 6.3.**

Дано: $A=\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3}-2 & 3-4\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 1+2\sqrt{3} & -4-3\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$.

1. Построить $Q_{1,2}=\begin{bmatrix} \cos\varphi_{1,2} & -\sin\varphi_{1,2} & 0 \\ \sin\varphi_{1,2} & \cos\varphi_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathrm{c}_{1,2} & -\mathrm{s}_{1,2} & 0 \\ \mathrm{s}_{1,2} & \mathrm{c}_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$Q_{1,2}A=\left[\begin{array}{c:cc} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{array}\right],\ \text{т.е. } (Q_{1,2}A)_{2,1} \equiv s_{1,2}\cdot a_{1,1}+c_{1,2}\cdot a_{2,1}=0.$$

2. Вычислить $A^{(1,2)}=Q_{1,2}A$.

**Решение** задачи 6.3.

1. $(Q_{1,2}A)_{2,1} \equiv s_{1,2} \cdot a_{1,1} + c_{1,2} \cdot a_{2,1} = 0 \quad \Rightarrow$

$$s_{1,2} \cdot \frac{a_{1,1}}{r} + c_{1,2} \cdot \frac{a_{2,1}}{r} = 0, \quad r_{1,2} = \sqrt{|\,a_{1,1}\,|^2 + |\,a_{2,1}\,|^2} = \sqrt{9+27} = 6 \quad \Rightarrow$$

$$c_{1,2} = a_{1,1} / r_{1,2} = 3/6 = 1/2, \qquad s_{1,2} = -a_{2,1} / r_{1,2} = 3\sqrt{3}/6 = \sqrt{3}/2$$

2.

$$A^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3}-2 & 3-4\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 1+2\sqrt{3} & -4-3\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

**Задача 6.4.**

Дано: $A^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}.$

1. Построить $Q_{1,3} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{1,3} & 0 & -\sin\varphi_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_{1,3} & 0 & \cos\varphi_{1,3} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathrm{c}_{1,3} & 0 & -\mathrm{s}_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{s}_{1,3} & 0 & \mathrm{c}_{1,3} \end{bmatrix}$:

$$Q_{1,3}A^{(1,2)} = \left[\begin{array}{c:cc} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{array}\right], \text{ т.е. } (Q_{1,3}A^{(1,2)})_{3,1} \equiv s_{1,3} \cdot a_{1,1}^{(1,2)} + c_{1,3} \cdot a_{3,1}^{(1,2)} = 0.$$

2. Вычислить $A^{(1,3)} = Q_{1,3}A^{(1,2)}$.

**Решение** задачи 6.4: 1. $(Q_{1,3}A^{(1,2)})_{3,1} \equiv s_{1,3} \cdot a_{1,1}^{(1,2)} + c_{1,3} \cdot a_{3,1}^{(1,2)} = 0 \;\; \Rightarrow$

$$s_{1,3} \cdot \frac{a_{1,1}^{(1,2)}}{r_{1,3}} + c_{1,3} \cdot \frac{a_{3,1}^{(1,2)}}{r_{1,3}} = 0, \;\; r_{1,3} = \sqrt{|a_{1,1}^{(1,2)}|^2 + |a_{3,1}^{(1,2)}|^2} = \sqrt{36+12} = 4\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$

$$c_{1,3} = a_{1,1}^{(1,2)} / r_{1,3} = 6/(4\sqrt{3}) = \sqrt{3}/2, \qquad s_{1,3} = -a_{3,1}^{(1,2)} / r_{1,3} = 2\sqrt{3}/(4\sqrt{3}) = 1/2$$

2.

$$A^{(1,3)} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Задача 6.5.**

Дано: $A^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$

1. Построить $Q_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{2,3} & -\sin\varphi_{2,3} \\ 0 & \sin\varphi_{2,3} & \cos\varphi_{2,3} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}_{2,3} & -\mathrm{s}_{2,3} \\ 0 & \mathrm{s}_{2,3} & \mathrm{c}_{2,3} \end{bmatrix}$:

$$Q_{2,3}A^{(1,3)} = \left[\begin{array}{c:c:c} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{array}\right], \text{ т.е. } (Q_{2,3}A^{(1,3)})_{3,2} \equiv s_{2,3}\cdot a_{2,2}^{(1,3)} + c_{2,3}\cdot a_{3,2}^{(1,3)} = 0.$$

2. Вычислить $A^{(2,3)} = Q_{2,3}A^{(1,3)}$.

**Решение** задачи 6.5.

1. $(Q_{2,3}A^{(1,3)})_{3,2} \equiv s_{2,3} \cdot a_{2,2}^{(1,3)} + c_{2,3} \cdot a_{3,2}^{(1,3)} = 0 \quad \Rightarrow$

$$s_{2,3} \cdot \frac{a_{2,2}^{(1,3)}}{r_{2,3}} + c_{2,3} \cdot \frac{a_{3,2}^{(1,3)}}{r_{2,3}} = 0, \quad r_{2,3} = \sqrt{|\, a_{2,2}^{(1,3)}\,|^2 + |\, a_{3,2}^{(1,3)}\,|^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow$$

$$s_{2,3} = -a_{3,2}^{(1,3)} / r_{2,3} = -2/(2\sqrt{2}) = -\sqrt{2}/2$$

$$c_{2,3} = a_{2,2}^{(1,3)} / r_{2,3} = 2/(2\sqrt{2}) = \sqrt{2}/2$$

2.

$$A^{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 4\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

**Задача 6.6.**

Дано: $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3}-2 & 3-4\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 1+2\sqrt{3} & -4-3\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3\sqrt{3} \\ -3-4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix} = \vec{b}$.

Решить эту систему методом вращений:

1. построить элементарные матрицы вращений $Q_{1,2}$, $Q_{1,3}$, $Q_{2,3}$: $Q_{2,3}Q_{1,3}Q_{1,2}A = R$ – верхняя треугольная матрица;
2. вычислить вектор $\vec{y} = Q_{2,3}Q_{1,3}Q_{1,2}\vec{b}$;
3. решить систему $R\vec{x} = \vec{y}$.

**Решение** задачи 6.6.

1. Элементарные матрицы вращений $Q_{1,2}$, $Q_{1,3}$, $Q_{2,3}$ и верхняя треугольная матрица $R = A^{(2,3)}$ –результат задач 6.3 – 6.5.

2. Вычислим вектор $\vec{y} = Q_{2,3}Q_{1,3}Q_{1,2}\vec{b}$:

$$\vec{b}^{(1,2)} = Q_{1,2}\vec{b} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4-3\sqrt{3} \\ -3-4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}^{(1,3)} = Q_{1,3}\vec{b}^{(1,2)} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}^{(2,3)} = Q_{2,3}\vec{b}^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ -2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{y} = \vec{b}^{(2,3)}.$$

3. Решим систему $R\vec{x} = \vec{y}$:

$$R\vec{x} = A^{(2,3)}\vec{x} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 4\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ -2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_3 &= 4\sqrt{2} \,/\, 4\sqrt{2} = 1 \\ x_2 &= (-2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\cdot 1) \,/\, 2\sqrt{2} = 1 \\ x_1 &= (6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cdot 1 - 4\sqrt{3}\cdot 1) \,/\, 4\sqrt{3} = 1 \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

# Тема 6.2. Разложение матрицы на произведение ортогональной и верхней треугольной матриц. Метод отражений.

**Задача 6.2.1.**

Дано: $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$

1. Построить $H_1 = E - 2 \cdot \vec{w}^{(1)} \cdot (\vec{w}^{(1)})^T, \ \| \vec{w}^{(1)} \|_2 = 1$:

$$H_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{pmatrix} \equiv H_1 \vec{a}_{\bullet,1} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ r_1 = \| \vec{a}_{\bullet,1} \|_2, \text{ т.е. } \vec{w}^{(1)} = \frac{\vec{a}_{\bullet,1} - H_1 \vec{a}_{\bullet,1}}{\| \vec{a}_{\bullet,1} - H_1 \vec{a}_{\bullet,1} \|_2}.$$

2. Вычислить $A^{(1)} = H_1 A$.

**Решение** задачи 6.2.1.

1. $\vec{a}_{\bullet,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \| \vec{a}_{\bullet,1} \|_2 = 3, \quad H_1 \vec{a}_{\bullet,1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\vec{w}^{(1)} = \frac{\vec{a}_{\bullet,1} - H_1 \vec{a}_{\bullet,1}}{\| \vec{a}_{\bullet,1} - H_1 \vec{a}_{\bullet,1} \|_2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = E - 2 \cdot \vec{w}^{(1)} \cdot (\vec{w}^{(1)})^T = E - 2 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

2. $A^{(1)} = H_1 A =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

**Задача 6.2.2.**

Дано: $A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$

1. Построить $H_2 = E - 2 \cdot \vec{w}^{(2)} \cdot (\vec{w}^{(2)})^T, \ \| \vec{w}^{(2)} \|_2 = 1$:

$$H_2 \begin{pmatrix} a_{1,2}^{(1)} \\ \text{-- -- --} \\ a_{2,2}^{(1)} \\ a_{3,2}^{(1)} \end{pmatrix} \equiv H_2 \vec{a}_{\bullet,2}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1,2}^{(1)} \\ \text{--- ---} \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ r_2 = \left\| \begin{pmatrix} a_{2,2}^{(1)} \\ a_{3,2}^{(1)} \end{pmatrix} \right\|_2, \text{ т.е. } \vec{w}^{(1)} = \frac{\vec{a}_{\bullet,1} - H_1 \vec{a}_{\bullet,1}}{\| \vec{a}_{\bullet,1} - H_1 \vec{a}_{\bullet,1} \|_2}.$$

2. Вычислить $A^{(2)} = H_2 A^{(1)}$.

**Решение** задачи 6.2.2.

$$1.\ \vec{a}^{(1)}_{\bullet,2} = \left(\begin{array}{c} -3 \\ \hdashline 0 \\ 3 \end{array}\right), \quad \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_2 = 3, \quad H_2 \vec{a}^{(1)}_{\bullet,2} = \left(\begin{array}{c} -3 \\ \hdashline 3 \\ 0 \end{array}\right) \;\Rightarrow$$

$$\vec{w}^{(2)} = \frac{\vec{a}^{(1)}_{\bullet,2} - H_2 \vec{a}^{(1)}_{\bullet,2}}{\| \vec{a}^{(1)}_{\bullet,2} - H_2 \vec{a}^{(1)}_{\bullet,2} \|_2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$H_2 = E - 2 \cdot \vec{w}^{(2)} \cdot (\vec{w}^{(2)})^T = E - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

2. $A^{(2)} = H_2 A^{(1)} =$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Задача 6.2.3.**

Дано: $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{b}.$

Решить эту систему методом отражений:

1. построить элементарные матрицы отражений $H_1$, $H_2$: $H_2 H_1 A = R$ – верхняя треугольная матрица;
2. вычислить вектор $\vec{y} = H_2 H_1 \vec{b}$;
3. решить систему $R\vec{x} = \vec{y}$.

**Решение** задачи 6.2.3.

1. Элементарные матрицы отражений $H_1$, $H_2$ и верхняя треугольная матрица $R = A^{(2)}$ –результат задач 6.2.1 – 6.2.2.

2. Вычислим вектор $\vec{y} = H_2 H_1 \vec{b}$:

$$\vec{b}^{(1)} = H_1 \vec{b} = \vec{b} - 2\cdot\vec{w}^{(1)}\cdot(\vec{w}^{(1)})^T \vec{b} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}^{(2)} = H_2 \vec{b}^{(1)} = \vec{b} - 2\cdot\vec{w}^{(2)}\cdot(\vec{w}^{(2)})^T \vec{b}^{(1)} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{y} = \vec{b}^{(2)}.$$

3. Решим систему $R\vec{x} = \vec{y}$:

$$R\vec{x} = A^{(2)}\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3/3 = 1 \\ x_2 = (0 + 3 \cdot 1)/3 = 1 \\ x_1 = (-6 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1)/3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$