Вычислительные методы линейной алгебры

Задачи по электронному лекционному курсу

Мацокин Александр Михайлович

профессор кафедры вычислительной математики
Новосибирского государственного университета

1. Прямые методы решения системы линейных алгебраических уравнений.
2. Итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений.
3. Итерационные методы решения задачи на собственные значения самосопряженной матрицы.

Часть 2. Итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений

Тема 8. Итерационные методы решения линейных уравнений.

Задача 8.1.

Дана система $A\vec{x}=\vec{b}$: $\begin{cases} A=\operatorname{Re}A+\underline{i}\cdot\operatorname{Im}A \\ \vec{x}=\operatorname{Re}\vec{x}+\underline{i}\cdot\operatorname{Im}\vec{x} \\ \vec{b}=\operatorname{Re}\vec{b}+\underline{i}\cdot\operatorname{Im}\vec{b} \end{cases}$

Доказать, что она эквивалентна системе

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re}\,A & -\operatorname{Im}\,A \\ \operatorname{Im}\,A & \operatorname{Re}\,A \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\,\vec{x} \\ \operatorname{Im}\,\vec{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\,\vec{b} \\ \operatorname{Im}\,\vec{b} \end{pmatrix} \text{ в } R^{2n}.$$

Задача 8.2.

Для итерационного метода решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$:

$$\vec{x}^0 - \textit{задан}, \quad \begin{cases} \vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - H_k\,(A\vec{x}^k - \vec{b}), \\ k = 0, 1, 2, \dots ; \end{cases} \quad H_k - \textit{заданные матрицы}, \; \det H_k \neq 0$$

дать определения:

1. $\vec{z}^k = ?$ – вектор ошибки k-той итерации (приближения),
2. $\vec{r}^k = ?$ – вектор невязки (residual) k-той итерации,
3. $S_k = ?$ – матрица шага для ошибки,
4. T_k – матрица шага для невязки (residual),
5. метод называется **сходящимся**, если «..?..».

Задача 8.3.

Для стационарного итерационного метода решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$\vec{x}^0 - \textit{задан}, \quad \begin{cases} \vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - H\,(A\vec{x}^k - \vec{b}), \\ \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \end{cases} \quad \begin{matrix} H - \textit{заданная матрица}, \\ \det H \neq 0 \end{matrix}$$

дать определения:

1. $\vec{z}^k = ?$ – вектор ошибки k-той итерации (приближения),
2. $\vec{r}^k = ?$ – вектор невязки (residual) k-той итерации,
3. $S = ?$ – матрица шага для ошибки,
4. T – матрица шага для невязки (residual),
5. метод называется **сходящимся**, если «..?..».

Задача 8.4.

Для стационарного итерационного метода решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$:

$$\vec{x}^0 - \textit{задан}, \quad \begin{cases} \vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - H(A\vec{x}^k - \vec{b}), \\ k = 0, 1, 2, \dots; \end{cases} \quad \begin{matrix} H - \textit{заданная матрица}, \\ \det H \neq 0 \end{matrix}$$

сформулировать теоремы о достаточном условии сходимости.

Задача 8.5.

Для стационарного итерационного метода решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$:

$$\vec{x}^0 - \textit{задан}, \quad \begin{cases} \vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - H(A\vec{x}^k - \vec{b}), \\ k = 0, 1, 2, \dots; \end{cases} \quad \begin{matrix} H - \textit{заданная матрица}, \\ \det H \neq 0 \end{matrix}$$

сформулировать теорему о необходимом и достаточном условии сходимости.

Тема 9. Итерационный метод Якоби.

Задача 9.1.

Дана система $A\vec{x}=\vec{b}$ с матрицей $A=B-C$ и

итерационный метод $\begin{cases} \vec{x}^0 - \textit{задан}, \\ B\vec{x}^{k+1}=C\vec{x}^k+\vec{b}, \quad k=0,1,\ldots \end{cases}$

Доказать, что $\vec{x}^{k+1}=\vec{x}^k-B^{-1}(A\vec{x}^k-\vec{b})$, $S=E-B^{-1}A$.

Если $B\equiv D=diag\,A=diag\,\{a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}\}$, $\det D\neq 0$,

то итерационный процесс $\begin{cases} \vec{x}^0 - \textit{задан}, \\ \vec{x}^{k+1}=\vec{x}^k-D^{-1}(A\vec{x}^k-\vec{b}), \quad k=0,1,\ldots \end{cases}$

– **метод Якоби** для решения системы $Ax=b$.

Задача 9.2.

Дана система $A\vec{x} = \vec{b}$.

Сформулировать метод Якоби для ее решения

и определить:

1. матрицу шага для его ошибки,
2. ее равномерную норму.

Задача 9.3.

Дана система $A\vec{x} = \vec{b}$.

Сформулировать метод Якоби для ее решения

и определить:

1. матрицу шага для его невязки,
2. ее октаэдрическую норму.

Задача 9.4.

Дана система $A\vec{x} = \vec{b}$.

Сформулировать метод Якоби для ее решения и теоремы о сходимости, если матрица A имеет диагональное преобладание по строкам или столбцам.

Задача 9.5.

Дана система $A\vec{x} = \vec{b}$: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Сформулировать метод Якоби для ее решения и
2. проверить условия теорем о сходимости.

Тема 10. Итерационный метод Зейделя.

Если $A = -L + D - R$: $\qquad D = diag\, A = diag\,\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\}$,

$$L = -\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & 0 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \\ a_{n1} & \ddots & \ddots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad R = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \ddots & \ddots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & 0 & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix},$$

то

$$\begin{cases} \vec{x}^{\,0} - \text{задан}, \\ \vec{x}^{\,k+1} = \vec{x}^{\,k} - (D-L)^{-1}(A\vec{x}^{\,k} - \vec{b}), \quad k = 0, 1, ... \end{cases}$$

– **метод Зейделя (Гаусса-Зейделя)** для решения системы $Ax = b$.

Задача 10.1.

Дана система $A\vec{x}=\vec{b}$: $A=-L+D-R$.

1. Сформулировать метод Зейделя для ее решения.
2. Доказать формулы для матрицы шага для его ошибки:

$$S=E-(D-L)^{-1}A=E-(A+R)^{-1}A=(A+R)^{-1}R.$$

Задача 10.2.

Дана система $A\vec{x}=\vec{b}$: $A=-L+D-R$.

1. Сформулировать метод Зейделя для ее решения.
2. Проверить формулу

$$\begin{cases} \vec{x}^0 - \textit{задан}, \\ D\vec{x}^{k+1} = L\vec{x}^{k+1} + R\vec{x}^k + \vec{b}, \quad k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Задача 10.3.

Дана система $A\vec{x}=\vec{b}$: $A=-L+D-R$.

1. Сформулировать метод Зейделя для ее решения.

2. Проверить формулу вычисления $\vec{x}^{k+1}$:

$$\begin{cases} \vec{x}^{k} - \textit{задан}, \\ x_1^{k+1} = a_{1,1}^{-1} \cdot [(-a_{1,2}x_2^k - \ldots - a_{1,n}x_n^k) + b_1] \\ x_2^{k+1} = a_{2,2}^{-1} \cdot [(-a_{2,1}x_1^{k+1}) + (-a_{2,3}x_3^k - \ldots - a_{2,n}x_n^k) + b_2] \\ x_3^{k+1} = a_{3,3}^{-1} \cdot [(-a_{3,1}x_1^{k+1} - a_{3,2}x_2^{k+1}) + (-a_{3,4}x_4^k - \ldots - a_{3,n}x_n^k) + b_3] \\ \ldots \end{cases}$$

Теорема.

Если $A = A^T > 0$,

то метод Зейделя:

$$\begin{cases} \vec{x}^0 - \textit{задан}, \\ \vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - (D-L)^{-1}(A\vec{x}^k - \vec{b}), \quad k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

сходится к решению системы $A\vec{x} = \vec{b}$

и $\rho(S) \le \sqrt{\dfrac{\rho(R^*R)}{\lambda_{\min}^2(A) + \rho(R^*R)}} < 1$

Задача 10.4.

Дана система $A\vec{x} = \vec{b}$: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Сформулировать метод Зейделя для ее решения.
2. Доказать его сходимость.
3. Оценить $\rho(S)$.

Задача 10.5.

Дана система $A\vec{x} = \vec{b}$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Сформулировать метод Зейделя для ее решения.
2. Доказать его сходимость.
3. Оценить $\rho(S)$.

Тема 11. Методы релаксации.

Теорема (о строгом убывании функционала ошибки)**.**

Если: $A\vec{x} = \vec{b}$ $(\det A \neq 0)$

$\{\vec{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ – приближения к $\vec{x}$:

1. $\vec{z}^{k+1} \equiv \vec{x}^{k+1} - \vec{x} = S(\vec{z}^k)$ $\forall\, \vec{z}^k \equiv \vec{x}^k - \vec{x} \neq 0$

   где $S:\ R^n \to R^n$ – оператор шага для ошибки:

   $$\vec{y}^k \neq 0 \to \vec{y} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad S(\vec{y}^k) \to S(\vec{y});$$

2. $f_{\vec{x}}(\vec{x}^{k+1}) < f_{\vec{x}}(\vec{x}^k)$ $\forall\, \vec{x}^k \neq \vec{x}$

   где $f_{\vec{x}}(\vec{x}^k) \equiv \|\vec{z}^k\|$, $\vec{z}^k = \vec{x}^k - \vec{x}$ – **функционал ошибки;**

то $\|\vec{z}^k\| \to 0$, т.е. $\vec{x}^k \to \vec{x}$.

Задача* 11.1.

Дана вещественная, симметричная матрица $A = A^T > 0$:

1. $(A\vec{x}, \vec{y})_2 = (\vec{x}, A\vec{y})_2 \quad \forall\ \vec{x}, \vec{y} \in R^n$,
2. $(A\vec{x}, \vec{x})_2 > 0 \quad \forall\ \vec{x} \in R^n,\ \vec{x} \neq 0$.

Доказать:

1. $(\vec{x}, \vec{y})_A \equiv (A\vec{x}, \vec{y})_2 \quad \forall\ \vec{x}, \vec{y} \in R^n$ – скалярное произведение в R^n,
2. $|(\vec{x}, \vec{y})_A| \leq \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})_A} \cdot \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})_A} \quad \forall\ \vec{x}, \vec{y} \in R^n$ – неравенство Коши,
3. $\|\vec{x}\|_A = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})_A} \quad \forall\ \vec{x} \in R^n$ – норма в R^n.

Указание. Для доказательства неравенства Коши рассмотреть $P_2(\alpha) \equiv (A(\alpha \cdot \vec{x} + \vec{y}),\ \alpha \cdot \vec{x} + \vec{y})_2 \geq 0$ и исследовать дискриминант квадратного уравнения $P_2(\alpha) = 0$.

Задача 11.2.

Дана вещественная, симметричная матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Доказать $(A\vec{x}, \vec{x})_2 > 0 \ \ \forall \ \vec{x} \in R^2, \ \vec{x} \neq 0$.

2. $\forall \ \vec{x}, \vec{y} \in R^2 \ \ (\vec{x}, \vec{y})_A \equiv (A\vec{x}, \vec{y})_2 = ?$

3. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Вычислить* $\begin{cases} (\vec{x}, \vec{y})_A = ? \\ (\vec{x}, \vec{x})_A = ? \\ (\vec{y}, \vec{y})_A = ? \end{cases}$

Указание. Для доказательства $(A\vec{x}, \vec{x})_2 > 0 \ \ \forall \ \vec{x} \in R^2, \ \vec{x} \neq 0$, использовать критерий Сильвестра.

Задача 11.3.

Дана система $A\vec{x}=\vec{b}$: $A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}=A^T>0$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Заданы векторы $\vec{x}^0=\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ и $\vec{e}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Построить формулу для $\alpha_{0,1}\in R$:

$$(\underbrace{\vec{x}^0-\vec{x}}_{\equiv\vec{z}^0}-\alpha_{0,1}\cdot\vec{e}^{(1)},\ \underbrace{\vec{x}^0-\vec{x}}_{\equiv\vec{z}^0}-\alpha_{0,1}\cdot\vec{e}^{(1)})_A=$$

$$=\min_{\alpha}(\vec{z}^0-\alpha\cdot\vec{e}^{(1)},\ \vec{z}^0-\alpha\cdot\vec{e}^{(1)})_A$$

2. Построить формулу для

$$\vec{x}^{0+1/2}=\vec{x}^0-\alpha_{0,1}\cdot\vec{e}^{(1)}.$$

Задача 11.4.

Дана система $A\vec{x}=\vec{b}$: $A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}=A^T>0,\ \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Заданы векторы $\vec{x}^{0+1/2}=\begin{pmatrix} x_1^{0+1/2} \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ и $\vec{e}^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Построить формулу для $\alpha_{0,2}\in R$:

$$(\underbrace{\vec{x}^{0+1/2}-\vec{x}}_{\equiv\vec{z}^{0+1/2}}-\alpha_{0,2}\cdot\vec{e}^{(2)},\ \underbrace{\vec{x}^{0+1/2}-\vec{x}}_{\equiv\vec{z}^{0+1/2}}-\alpha_{0,2}\cdot\vec{e}^{(2)})_A=$$

$$=\min_{\alpha}(\vec{z}^0-\alpha\cdot\vec{e}^{(2)},\ \vec{z}^0-\alpha\cdot\vec{e}^{(2)})_A$$

2. Построить формулу для

$$\vec{x}^1\equiv\vec{x}^{0+2/2}=\vec{x}^{0+1/2}-\alpha_{0,2}\cdot\vec{e}^{(2)}.$$

Задача 11.5.

Дана система $A\vec{x}=\vec{b}$: $A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}=A^T>0$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Задан вектор $\vec{x}^0=\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$.

Используя результаты задач 11.3 и 11.4, построить формулу для $\vec{x}^1$.

Ответ. $\begin{cases} x_1^1 = x_1^0-\alpha_{0,1}=x_1^0-(a_{1,1})^{-1}\cdot\ \ (a_{1,1}\cdot x_1^0+a_{1,2}\cdot x_2^0-b_1) \\ x_2^1 = x_2^0-\alpha_{0,2}=x_2^0-(a_{2,2})^{-1}\cdot(a_{2,1}\cdot x_1^1+a_{2,2}\cdot x_2^0-b_2) \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}-\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{bmatrix}^{-1}}_{D^{-1}}\cdot\Bigl(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 \end{bmatrix}}_{-L}\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,2} \end{bmatrix}}_{D-R}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\Bigr)$$

– это один шаг метода **полной релаксации**.

Если в формулы ответа задачи 11.5

$$\begin{cases} x_1^1 = x_1^0 - \alpha_{0,1} = x_1^0 - (a_{1,1})^{-1} \cdot \ \ (a_{1,1} \cdot x_1^0 + a_{1,2} \cdot x_2^0 - b_1) \\ x_2^1 = x_2^0 - \alpha_{0,2} = x_2^0 - (a_{2,2})^{-1} \cdot (a_{2,1} \cdot x_1^1 + a_{2,2} \cdot x_2^0 - b_2) \end{cases}$$

внести параметр ω:

$$\begin{cases} x_1^1 = x_1^0 - \omega \cdot \alpha_{0,1} = x_1^0 - \omega \cdot (a_{1,1})^{-1} \cdot \ \ (a_{1,1} \cdot x_1^0 + a_{1,2} \cdot x_2^0 - b_1) \\ x_2^1 = x_2^0 - \omega \cdot \alpha_{0,2} = x_2^0 - \omega \cdot (a_{2,2})^{-1} \cdot (a_{2,1} \cdot x_1^1 + a_{2,2} \cdot x_2^0 - b_2) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} - \omega \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{bmatrix}^{-1}}_{D^{-1}} \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 \end{bmatrix}}_{-L} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,2} \end{bmatrix}}_{D-R} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Bigg)$$

то получим один шаг метода **неполной релаксации**.

Задача 11.6.

Дана система $A\vec{x}=\vec{b}$: $A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = A^T > 0$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Задан вектор $\vec{x}^0=\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$.

Преобразовать формулу метода неполной релаксации

$$\vec{x}^1=\vec{x}^0-\omega\cdot D^{-1}(-L\vec{x}^1+D\vec{x}^0-R\vec{x}^0-\vec{b})$$

к виду

$$\vec{x}^1=\vec{x}^0-(\frac{1}{\omega}D-L)^{-1}(\underbrace{-L\vec{x}^0+D\vec{x}^0-R\vec{x}^0}_{A\vec{x}^0}-\vec{b}).$$

Теорема (оценка сходимости методов релаксации)**.**

Если матрица $A \equiv -L + D - R = A^T > 0$,

то метод неполной релаксации

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - (\frac{1}{\omega} D - L)^{-1} (A\vec{x}^k - \vec{b})$$

сходится к решению системы $A\vec{x} = \vec{b}$ при любом $\omega \in (0, 2)$

и для ошибки $\vec{z}^k = \vec{x}^k - \vec{x}$ имеет место оценка:

$$\| \vec{z}^{k+1} \|_A^2 \le g(\tau) \cdot \| \vec{z}^k \|_A^2, \;\; g(\tau) = \frac{1 - \tau\delta + \tau^2 \delta\Delta}{1 + \tau\delta + \tau^2 \delta\Delta} < 1, \;\; \tau = \frac{2\omega}{2 - \omega},$$

где $0 < \delta \le \lambda_{\min}(D^{-1}A)$ & $\Delta \ge \lambda_{\max}(A^{-1} R_1 D^{-1} R_1^T) > 0$, $R_1 = 0{,}5D - L$.

Оптимальный параметр:

$$\min_{\tau > 0} g(\tau) = g(\tau_*) = \frac{1 - \sqrt{\delta / (4\Delta)}}{1 + \sqrt{\delta / (4\Delta)}} < 1, \;\; \tau_* = \frac{1}{\sqrt{\delta\Delta}} \Rightarrow \omega_* = \frac{2}{1 + 2\sqrt{\delta\Delta}}.$$

Задача 11.7. Дана система $A\vec{x}=\vec{b}$: $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=A^T>0$.

1. Построить матрицы L, D, R: $A=-L+D-R$; $R_1=0{,}5D-L$.
2. Вычислить матрицы $D^{-1}A$, $A^{-1}R_1D^{-1}R_1^T$.
3. Вычислить числа $\delta=\lambda_{\min}(D^{-1}A)$, $\Delta=\lambda_{\max}(A^{-1}R_1D^{-1}R_1^T)$.
4. Вычислить оптимальный параметр метода релаксации

$$\omega_*=\frac{2}{1+2\sqrt{\delta\Delta}}.$$

5. Вычислить коэффициент убывания ошибки метода релаксации

$$g(\tau_*)=\frac{1-\sqrt{\delta/(4\Delta)}}{1+\sqrt{\delta/(4\Delta)}},\ \ \text{где}\ \ \tau_*=\frac{1}{\sqrt{\delta\Delta}}.$$

6. Вычислить спектральный радиус $\rho(S)$ матрицы шага

$S=E-(D-L)^{-1}A$ метода полной релаксации.

Ответ.

1. $L=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $R\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$; $R_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$.

2. $D^{-1}A=\begin{bmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1\end{bmatrix}$, $A^{-1}R_1D^{-1}R_1^T=\begin{bmatrix}1/6 & 0\\ -1/6 & 1/2\end{bmatrix}$.

3. $\delta=1/2$, $\Delta=1/2$.

4. $\omega_*=1$.

5. $g(\tau_*)=1/3$.

6. $\rho(S)=1/4$.

Тема 12. Методы наискорейшего спуска и минимальных невязок.

Метод наискорейшего спуска

Если матрица системы $A\vec{x}=\vec{b}$

симметрична и положительно определена ($A=A^T>0$)**:**

то формулы метода наискорейшего спуска для ее решения:

$$\begin{cases} \vec{x}^0 - \textit{задан}, \\ \vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \tau_k (A\vec{x}^k - \vec{b}), \ \tau_k = \dfrac{(\vec{r}^k, \vec{r}^k)_2}{(A\vec{r}^k, \vec{r}^k)_2}, \\ \quad k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

энергетическая норма $\|\vec{z}^k\|_A$ ошибки которого строго убывает.

Задача 12.1.

Дана система $A\vec{x} = \vec{b}$: $A = A^T > 0$.

Задан вектор $\vec{x}^0$. Вектор ошибки $\vec{z}^0 = \vec{x}^0 - \vec{x}$ неизвестен, известен вектор невязки $\vec{r}^0 = A\vec{z}^0 = A\vec{x}^0 - A\vec{x} = A\vec{x}^0 - \vec{b}$.

1. Построить вектор $\vec{x}^1 = \vec{x}^0 - \tau_0 \cdot (A\vec{x}^0 - \vec{b}) \equiv \vec{x}^0 - \tau_0 \cdot \vec{r}^0$:

$$\| \vec{z}^1 \|_A^2 \equiv \| \vec{x}^1 - \vec{x} \|_A^2 \equiv \| (\vec{x}^0 - \tau_0 \cdot \vec{r}^0) - \vec{x} \|_A^2 \equiv \| \vec{z}^0 - \tau_0 \cdot \vec{r}^0 \|_A^2 =$$

$$= \min_{\tau} \| \vec{z}^0 - \tau \cdot \vec{r}^0 \|_A^2 .$$

2. Доказать неравенство

$$\| \vec{z}^1 \|_A^2 < \| \vec{z}^0 \|_A^2 \quad \forall\ \vec{z}^0 \neq 0.$$

Задача 12.2.

Дана система $A\vec{x} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \vec{b}$

Задан вектор $\vec{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Вычислить вектор невязки $\vec{r}^0 = A\vec{x}^0 - \vec{b}$.
2. Вычислить параметр τ_0 метода наискорейшего спуска.
3. Вычислить приближение $\vec{x}^1 = \vec{x}^0 - \tau_0 \cdot \vec{r}^0$ метода наискорейшего спуска.

Метод минимальных невязок

В итерационном процессе $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \tau_k (A\vec{x}^k - \vec{b})$

параметр τ_k выбираем из условия минимизации невязки:

$$(\vec{r}^{k+1}, \vec{r}^{k+1})_2 = \min_{\tau} (\vec{r}^k - \tau A\vec{r}^k,\ \vec{r}^k - \tau A\vec{r}^k)_2.$$

Теорема. Если матрица вещественной системы $Ax = b$ положительно определена, то метод минимальных невязок:

$$\begin{cases} \vec{x}^0 - \textit{задан}, \\ \vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \tau_k (A\vec{x}^k - \vec{b}),\ \tau_k = \dfrac{(A\vec{r}^k, \vec{r}^k)_2}{(A\vec{r}^k, A\vec{r}^k)_2}, \\ k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

сходится, а норма $\| \vec{r}^k \|_2 = \sqrt{(\vec{r}^k, \vec{r}^k)_2}$ его невязок строго убывает.

Задача 12.3.

Дана вещественная матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Доказать, что $A > 0$ в R^2.

Указание.

Используйте критерий Сильвестра, но не для матрицы A, а для матрицы $A + A^T$ (почему?).

Задача 12.4.

Дана вещественная система $A\vec{x}=\vec{b}$: $A>0$.

Задан вектор $\vec{x}^0$.

Известен вектор невязки $\vec{r}^0 = A\vec{x}^0 - \vec{b}$.

1. Построить вектор $\vec{x}^1 = \vec{x}^0 - \tau_0 \cdot (A\vec{x}^0 - \vec{b}) \equiv \vec{x}^0 - \tau_0 \cdot \vec{r}^0$:

$$\| \vec{r}^1 \|_2^2 \equiv \| A\vec{x}^1 - \vec{b} \|_2^2 \equiv \| \vec{r}^0 - \tau_0 \cdot A\vec{r}^0 \|_2^2 =$$

$$= \min_{\tau} \| \vec{r}^0 - \tau_0 \cdot A\vec{r}^0 \|_2^2 .$$

2. Доказать неравенство

$$\| \vec{r}^1 \|_2^2 < \| \vec{r}^0 \|_2^2 \quad \forall\ \vec{r}^0 \neq 0.$$

Задача 12.5.

Дана система $A\vec{x} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \vec{b}$

Задан вектор $\vec{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Вычислить вектор невязки $\vec{r}^0 = A\vec{x}^0 - \vec{b}$.
2. Вычислить параметр τ_0 метода минимальных невязок.
3. Вычислить приближение $\vec{x}^1 = \vec{x}^0 - \tau_0 \cdot \vec{r}^0$ метода минимальных невязок.

Тема 13. Метод простой итерации

$$\left.\begin{aligned} &\vec{x}^0 - \textit{задан}, \\ &\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \tau \cdot (A\vec{x}^k - \vec{b}), \\ &\quad k = 0, 1, \ldots \end{aligned}\right\}$$

сходится к решению системы $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\Leftrightarrow \quad \rho(S_\tau) = \rho(\underbrace{E - \tau \cdot A}_{S_\tau}) < 1,$$

т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} \| \underbrace{\vec{x}^k - \vec{x}}_{\vec{z}^k = S_\tau \vec{z}^{k-1}} \| = 0$

Задача 13.1. $\rho(S_\tau) = \max\limits_{\lambda(A)\in Sp(A)} |1 - \tau \cdot \lambda(A)|$.

Задача 13.2. Если $A = A^T > 0$, **то**

$$\rho(S_\tau) = \max\{ |1 - \tau \cdot \lambda_{\min}(A)|;\ |1 - \tau \cdot \lambda_{\max}(A)| \}.$$

Задача 13.3. Если $A = A^T > 0$, **то**

$$\| S_\tau \|_2 = \rho(S_\tau) = \max\{ |1 - \tau \cdot \lambda_{\min}(A)|;\ |1 - \tau \cdot \lambda_{\max}(A)| \}.$$

Задача 13.4. Если $A = A^T > 0$, **то** $\| \vec{z}^k \|_2 \le \rho(S_\tau) \cdot \| \vec{z}^{k-1} \|_2$.

Задача 13.5. Если $A = A^T > 0$**, то**

$$\| S_\tau \|_A = \rho(E - \tau \cdot A) = \max\{\, |1 - \tau \cdot \lambda_{\min}(A)|;\ |1 - \tau \cdot \lambda_{\max}(A)| \,\}$$

Задача 13.6. Если $A = A^T > 0$**, то** $\| \vec{z}^{\,k} \|_A \le \rho(S_\tau) \cdot \| \vec{z}^{\,k-1} \|_A$.

Теорема. Метод простой итерации

для решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$, $A = A^* > 0$,

сходится $\forall\ \tau \in (0, \dfrac{2}{\lambda_{\max}(A)})$.

Задача 13.7. Вычислить $\lambda_{\min}(A) \le \lambda_{\max}(A)$ для $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Вычислить $\rho(S_\tau)$ для 1) $\tau = \tau_0 = 0$,

2) $\tau = \tau_1 = 1 / \lambda_{\max}(A)$,

3) $\tau = \tau_2 = 2 / \lambda_{\max}(A)$.

Оптимальный параметр $\tau_{опт}$ метода простой итерации:

$$\textbf{если } A = A^* > 0\textbf{, то} \quad \tau_{опт} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}, \quad \rho(S_{\tau_{опт}}) = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} < 1.$$

Задача 13.8. Вычислить $\lambda_{\min}(A) \le \lambda_{\max}(A)$ для $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Вычислить $\tau_{опт}$ и $\rho(S_{\tau_{опт}})$.

Задача 13.9. Вычислить $\lambda_{\min}(A) \le \lambda_{\max}(A)$ для $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Вычислить $\tau_{опт}$ и $\rho(S_{\tau_{опт}})$.

Вычислить $\rho(S_{\tau_1})$ для $\tau_1 = 1/10$.

Вычислить $\rho(S_{\tau_2})$ для $\tau_2 = 3/10$.

Оценка сходимости метода наискорейшего спуска (МНС)

Теорема. Если $A = A^* > 0$, то для ошибки $\vec{z}^k = \vec{x}^k - \vec{x}$ метода наискорейшего спуска:

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \tau_k (A\vec{x}^k - b), \quad \tau_k = \frac{(\vec{r}^k, \vec{r}^k)}{(A\vec{r}^k, \vec{r}^k)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

справедлива оценка $\| \vec{z}^{k+1} \|_A \le \rho(S_{\tau_{опт}}) \| \vec{z}^k \|_A$

Задача 13.10. Задана система $A\vec{x} \equiv \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \equiv \vec{b}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Задан $\vec{x}^0 = 0$. 1. Вычислить τ_{onm} и $\rho(S_{\tau_{onm}})$ (задача 13.9).

2. Вычислить $\vec{x}^1_{onm} = \vec{x}^0 - \tau_{onm} \cdot (A\vec{x}^0 - \vec{b})$.

3. Вычислить $\vec{z}^1_{onm} = \vec{x}^1_{onm} - \vec{x}$, $\| \vec{z}^1_{onm} \|_A$.

4. Вычислить $\vec{r}^0 = A\vec{x}^0 - b$, $\quad \tau_0 = \dfrac{(\vec{r}^0, \vec{r}^0)}{(A\vec{r}^0, \vec{r}^0)}$

5. Вычислить $\vec{x}^1_{MHC} = \vec{x}^0 - \tau_0 \cdot (A\vec{x}^0 - \vec{b})$.

6. Вычислить $\vec{z}^1_{MHC} = \vec{x}^1_{MHC} - \vec{x}$, $\| \vec{z}^1_{MHC} \|_A$.

7. Проверить неравенство $\| \vec{z}^1_{MHC} \|_A < \rho(S_{\tau_{onm}}) \| \vec{z}^0_{MHC} \|_A$.

8. Проверить неравенство $\| \vec{z}^1_{MHC} \|_A \le \| \vec{z}^1_{onm} \|_A$.

Оценка сходимости метода минимальных невязок (ММН)

Теорема. Если $A = A^* > 0$,

то для ошибки $\vec{z}^k = \vec{x}^k - \vec{x}$ метода минимальных невязок:

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \tau_k (A\vec{x}^k - \vec{b}), \quad \tau_k = \frac{(A\vec{r}^k, \vec{r}^k)}{(A\vec{r}^k, A\vec{r}^k)}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

справедлива оценка $\| \vec{r}^{k+1} \|_2 \leq \rho(S_{\tau_{опт}}) \cdot \| \vec{r}^k \|_2$.

Задача 13.11. Задана система $A\vec{x} \equiv \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \equiv \vec{b}$.

Задан $\vec{x}^0 = 0$.

1. Вычислить $\tau_{опт}$ и $\rho(S_{\tau_{опт}})$ (задача 13.9).
2. Вычислить $\vec{x}^1_{опт} = \vec{x}^0 - \tau_{опт} \cdot (A\vec{x}^0 - \vec{b})$.
3. Вычислить $\vec{r}^1_{опт} = A\vec{x}^1_{опт} - \vec{b}$, $\| \vec{r}^1_{опт} \|_2$.
4. Вычислить $\vec{r}^0 = A\vec{x}^0 - b$, $\quad \tau_0 = \dfrac{(A\vec{r}^0, \vec{r}^0)_2}{(A\vec{r}^0, A\vec{r}^0)_2}$
5. Вычислить $\vec{x}^1_{ММН} = \vec{x}^0 - \tau_0 \cdot (A\vec{x}^0 - \vec{b})$.
6. Вычислить $\vec{r}^1_{ММН} = A\vec{x}^1_{ММН} - \vec{b}$, $\| \vec{r}^1_{ММН} \|_2$.
7. Проверить неравенство $\| \vec{r}^1_{ММН} \|_2 < \rho(S_{\tau_{опт}}) \| \vec{r}^0_{ММН} \|_2$.
8. Проверить неравенство $\| \vec{r}^1_{ММН} \|_2 \le \| \vec{r}^1_{опт} \|_2$.