МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Новосибирский государственный университет» (НГУ)

Механико-математический факультет

ЭЛЕКТРОННЫЙ ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

«Вычислительные методы линейной алгебры»

Основная образовательная программа подготовки бакалавров
ММФ НИУ-НГУ (Новосибирск, Россия) – Хэйлунцзянский университет (Харбин, Китай)

Новосибирск

2013

Электронный лекционный курс

«Вычислительные методы линейной алгебры»

разработан в соответствии с требованиями к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированного бакалавра

по профессиональному циклу дисциплин (базовая часть) по направлению подготовки «Математика»,

а также задачами, стоящими перед Новосибирским государственным университетом по реализации Программы развития НГУ как национального исследовательского института и сотрудничества с Хэйлунцзянским университетом (Харбин, Китайская народная республика).

Автор:

Мацокин Александр Михайлович, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры Вычислительной математики.

Механико-математический факультет НГУ.

Вычислительные методы линейной алгебры

Электронный лекционный курс

Мацокин Александр Михайлович

профессор кафедры вычислительной математики
Новосибирского государственного университета

1. Прямые методы решения системы линейных алгебраических уравнений.
2. Итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений.
3. Итерационные методы решения задачи на собственные значения самосопряженной матрицы.

Часть 1. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Тема 1. Основные обозначения и определения.

Обозначения:

R – линейное множество вещественных чисел,

$C \equiv \{z = x + \underline{i} \cdot y: \ \ x, y \in R; \ \underline{i} = \sqrt{-1}\}$ – множество комплексных чисел:

$$z = x + \underline{i} \cdot y \equiv \operatorname{Re} z + \underline{i} \cdot \operatorname{Im} z,$$

$$\overline{z} = x - \underline{i} \cdot y \equiv \operatorname{Re} z - \underline{i} \cdot \operatorname{Im} z,$$

$$\alpha + z \equiv (\operatorname{Re}\alpha + \underline{i} \cdot \operatorname{Im}\alpha) + (\operatorname{Re} z + \underline{i} \cdot \operatorname{Im} z) = (\operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re} z) + \underline{i} \cdot (\operatorname{Im}\alpha + \operatorname{Im} z),$$

$$\alpha \cdot z = (\operatorname{Re}\alpha \cdot \operatorname{Re} z - \operatorname{Im}\alpha \cdot \operatorname{Im} z) + \underline{i} \cdot (\operatorname{Re}\alpha \cdot \operatorname{Im} z + \operatorname{Im}\alpha \cdot \operatorname{Re} z),$$

$$z \cdot \overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2,$$

$$|z| \equiv \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \geq 0,$$

$$|\alpha \cdot z| = |\alpha| \cdot |z|.$$

$$R = \{z \in C: \ z = x + \underline{i} \cdot 0\} \subset C.$$

$$R^n = \{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}: \ x_1 \in R,\ x_2 \in R,\ \ldots,\ x_n \in R\}$$ – линейное множество

вектор-столбцов $\vec{x}$ с вещественными компонентами x_i,

$\dim R^n = n$ – размерность векторного пространства R^n,

$$C^n = \{\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}: \ z_1 \in C,\ z_2 \in C,\ \ldots,\ z_n \in C\}$$ – линейное множество

вектор-столбцов $\vec{z}$ с комплексными компонентами z_i,

$\dim C^n = n$ – размерность векторного пространства C^n,

$R^n \subset C^n$.

$$\alpha\cdot\vec{z}=\begin{pmatrix}\alpha\cdot z_1\\ \alpha\cdot z_2\\ \vdots\\ \alpha\cdot z_n\end{pmatrix}\ \forall\ \alpha\in C\ \forall\ \vec{z}\in C^n,\qquad \vec{z}+\vec{w}=\begin{pmatrix}z_1+w_1\\ z_2+w_2\\ \vdots\\ z_n+w_n\end{pmatrix}\ \forall\ \vec{z},\vec{w}\in C^n,$$

$(\vec{z})^T=\begin{pmatrix}z_1 & z_2 & \dots & z_n\end{pmatrix}$ – вектор-строка (транспонирование),

$(\vec{z})^*=\begin{pmatrix}\bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \dots & \bar{z}_n\end{pmatrix}$ – вектор-строка (транспонирование + сопряжение),

$\vec{z}^*=\vec{z}^T\quad\forall\ \vec{z}\in R^n$,

$(\vec{z},\,\vec{w})_2\equiv(\vec{w})^*\cdot\vec{z}\equiv z_1\cdot\bar{w}_1+z_2\cdot\bar{w}_2+\dots+z_n\cdot\bar{w}_n$ – евклидово скалярное произведение векторов $\vec{z},\,\vec{w}\in C^n$,

$\|\vec{z}\|_2=\sqrt{(\vec{z},\,\vec{z})_2}\equiv\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+\dots+|z_n|^2}\geq 0$ – евклидова норма (длина) вектора $\vec{z}\in C^n$.

Векторные нормы

Отображение $\vec{z} \in C^n \;\to\; \|\vec{z}\| \in R$ – векторная норма в C^n, если

$\|\vec{z}\| \ge 0 \;\; \forall\, \vec{z} \in C^n; \quad \|\vec{z}\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{z} = 0;$

$\|\alpha \cdot \vec{z}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{z}\| \quad \forall\, \alpha \in C \;\; \forall\, \vec{z} \in C^n;$

$\|\vec{z} + \vec{w}\| \le \|\vec{z}\| + \|\vec{w}\| \quad \forall\, \vec{z}, \vec{w} \in C^n$ – неравенство треугольника.

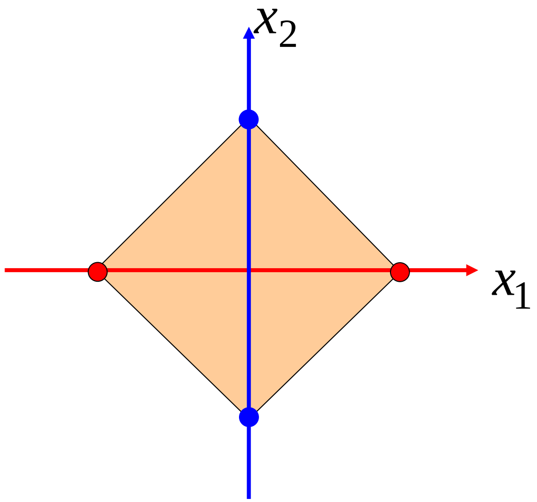
Примеры векторных норм:

1. $\|\vec{z}\|_1 = |z_1| + \ldots + |z_n|$ – октаэдрическая норма,
2. $\|\vec{z}\|_2 = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2}$ – евклидова (сферическая) норма,
3. $\|\vec{z}\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} |z_i|$ – кубическая или равномерная норма.

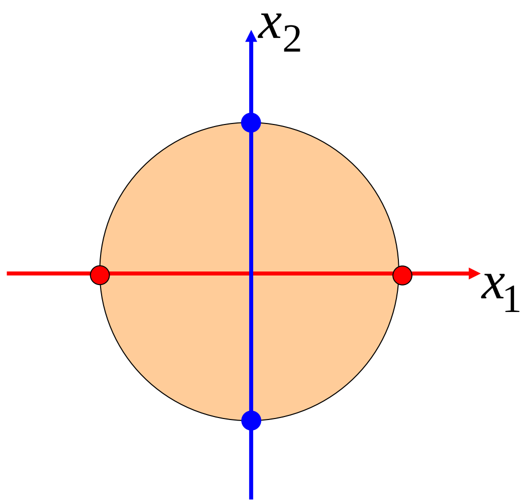
Теорема. Для любых векторных норм $\|\vec{z}\|_*$ и $\|\vec{z}\|_{**}$ в C^n $\exists\; 0 < c_0 \le c_1 < \infty$:

$c_0 \cdot \|\vec{z}\|_* \le \|\vec{z}\|_{**} \le c_1 \cdot \|\vec{z}\|_* \;\; \forall\, \vec{z} \in C^n,$

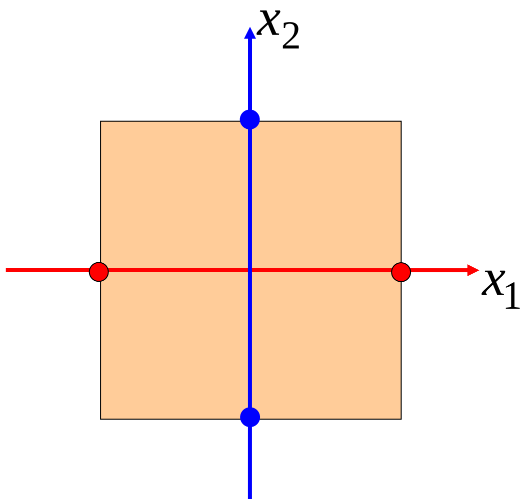
т.е. нормы эквивалентны.



Множество $\| \vec{x} \|_1 \le 1, \ \ \vec{x} \in R^2.$



Множество $\| \vec{x} \|_2 \le 1, \ \ \vec{x} \in R^2$



Множество $\| \vec{x} \|_\infty \le 1, \ \ \vec{x} \in R^2$

Скалярное произведение векторов и норма

Отображение $\vec{z}, \vec{w} \in C^n \;\to\; (\vec{z}, \vec{w}) \in C$ – скалярное произведение в C^n, если

$$1.\ (\vec{z}, \vec{z}) \ge 0 \;\; \forall\, \vec{z} \in C^n; \quad (\vec{z}, \vec{z}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{z} = 0;$$

$$2.\ (\vec{z}, \vec{w}) = \overline{(\vec{w}, \vec{z})} \;\; \forall\, \vec{z}, \vec{w} \in C^n;$$

$$3.\ (\alpha \cdot \vec{z}, \vec{w}) = \alpha \cdot (\vec{z}, \vec{w}) \;\; \forall\, \alpha \in C, \;\; \forall\, \vec{z}, \vec{w} \in C^n;$$

$$4.\ (\vec{z} + \vec{w}, \vec{v}) = (\vec{z}, \vec{v}) + (\vec{w}, \vec{v}) \;\; \forall\, \vec{z}, \vec{w}, \vec{v} \in C^n.$$

$\| \vec{z} \| \equiv \sqrt{(\vec{z}, \vec{z})}$ – векторная норма,

$| (\vec{z}, \vec{v}) | \le \| \vec{z} \| \cdot \| \vec{v} \|$ – неравенство Коши-Буняковского.

Пример скалярного произведения и векторной нормы:

$(\vec{z}, \vec{w})_2 = z_1 \cdot \overline{w}_1 + ... + z_n \cdot \overline{w}_n$ – евклидово скалярное произведение,

$\| \vec{z} \|_2 = \sqrt{| z_1 |^2 + | z_2 |^2 + ... + | z_n |^2}$ – евклидова норма вектора $\vec{z} \in C^n$.

Квадратные матрицы порядка n

$$A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix},\ a_{i,j}\in C \text{ – элементы матрицы;}$$

$$\alpha\cdot A=\alpha\cdot(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}=(\alpha\cdot a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}\quad \forall\ \alpha\in C;$$

$$A+B=(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}+(b_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}=(a_{i,j}+b_{i,j})_{i,j=1}^{n,n};$$

$$A\cdot B=(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}\cdot(b_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}=C=(c_{i,j}=\sum\nolimits_{k=1}^{n}a_{i,k}\cdot b_{k,j})_{i,j=1}^{n,n};$$

$$A\cdot\vec{z}=\begin{pmatrix} a_{1,1}\cdot z_1+a_{1,2}\cdot z_2+\ldots+a_{1,n}\cdot z_n \\ a_{2,1}\cdot z_1+a_{2,2}\cdot z_2+\ldots+a_{2,n}\cdot z_n \\ \vdots \\ a_{n,1}\cdot z_1+a_{n,2}\cdot z_2+\ldots+a_{n,n}\cdot z_n \end{pmatrix};$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix};$$

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1,1} & \bar{a}_{2,1} & \dots & \bar{a}_{n,1} \\ \bar{a}_{1,2} & \bar{a}_{2,2} & \dots & \bar{a}_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{1,n} & \bar{a}_{2,n} & \dots & \bar{a}_{n,n} \end{bmatrix};$$

$A = A^*$ – самосопряженная матрица;

$A = A^* = A^T$, если $\forall\ a_{i,j} \in R$;

$C^{n\times n} = \{A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n} :\ \forall\ a_{i,j} \in C\}$ – пространство матриц.

Матричные нормы

Отображение $A \in C^{n \times n} \rightarrow \| A \| \in R$ – матричная норма в $C^{n \times n}$, если

$\| A \| \geq 0 \;\; \forall\, A \in C^{n \times n}$; $\;\; \| A \| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0 \;\; (\forall\, a_{i,j} = 0)$;

$\| \alpha \cdot A \| = | \alpha | \cdot \| A \| \;\; \forall\, \alpha \in C \;\; \forall\, A \in C^{n \times n}$;

$\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \| \;\; \forall\, A, B \in C^{n \times n}$ – неравенство треугольника.

Матричная норма $\| A \|_{C^{n \times n}}$ подчинена векторной норме $\| \vec{z} \|_{C^n}$, если

$$\| A \|_{C^{n \times n}} = \sup_{\vec{z} \in C^n,\, \vec{z} \neq 0} \frac{\| A \cdot \vec{z} \|_{C^n}}{\| \vec{z} \|_{C^n}} \equiv \max_{\vec{z} \in C^n,\, \|\vec{z}\|_{C^n} = 1} \| A \cdot \vec{z} \|_{C^n} \,,$$

тогда $\forall\, \vec{z} \in C^n \;\; \forall\, A, B \in C^{n \times n}$:

$\| A \cdot \vec{z} \|_{C^n} \leq \| A \|_{C^{n \times n}} \cdot \| \vec{z} \|_{C^n}$;

$\| A \cdot B \|_{C^{n \times n}} \leq \| A \|_{C^{n \times n}} \cdot \| B \|_{C^{n \times n}}$ – мультипликативная норма.

Примеры матричных норм, подчиненных векторным нормам:

$$1.\ \ \|A\|_1 = \sup_{\vec{z}\in C^n,\ \vec{z}\neq 0} \frac{\|A\cdot\vec{z}\|_1}{\|\vec{z}\|_1} \equiv \max_{j=1,\dots,n}\{|a_{1,j}|+|a_{2,j}|+\dots+|a_{n,j}|\}\ ;$$

$$2.\ \ \|A\|_2 = \sup_{\vec{z}\in C^n,\ \vec{z}\neq 0} \frac{\|A\cdot\vec{z}\|_2}{\|\vec{z}\|_2}\ \ (\equiv \sqrt{\lambda_{\max}(A^*\cdot A)}\ )\ ,$$

– $\lambda_{\max}(A^*\cdot A)$ – максимальное собственное число (значение) матрицы;

$$3.\ \ \|A\|_\infty = \sup_{\vec{z}\in C^n,\ \vec{z}\neq 0} \frac{\|A\cdot\vec{z}\|_\infty}{\|\vec{z}\|_\infty} \equiv \max_{i=1,\dots,n}\{|a_{i,1}|+|a_{i,2}|+\dots+|a_{i,n}|\}\ .$$

Определитель квадратной матрицы

– $\det A = \sum\limits_{\substack{\forall\,(j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_{j_n}): \\ j_k \ne j_l\ \forall\ k,l \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}}} (-1)^{r(j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_{j_n})} a_{1,j_1} \cdot a_{1,j_2} \cdot \ldots \cdot a_{1,j_n}$:

– $(n-1)\cdot n!$ умножений и $n!$ сложенией;

– $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$;

– $\det(A^T) = \det(A)$;

– $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$;

– $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$;

– если $\det A \ne 0$, то столбцы $\{\ \vec{a}_{*,j} = (a_{i,j})_{i=1}^{n}\ \}_{j=1}^{n}$ – базис в C^n;

– если $\det A \ne 0$, то строки $\{\ \vec{a}_{i,*} = (a_{i,j})_{j=1}^{n}\ \}_{i=1}^{n}$ – базис в C^n.

Обратная матрица $A^{-1} = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ к матрице $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\cdot\det A_{1,1} & (-1)^{2+1}\cdot\det A_{2,1} & \dots & (-1)^{n+1}\cdot\det A_{n,1} \\ (-1)^{1+2}\cdot\det A_{1,2} & (-1)^{2+2}\cdot\det A_{2,2} & \dots & (-1)^{n+2}\cdot\det A_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{1+n}\cdot\det A_{1,n} & (-1)^{2+n}\cdot\det A_{2,n} & \dots & (-1)^{n+n}\cdot\det A_{n,n} \end{bmatrix},$$

где

$$A_{i,j} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ \hdashline a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{array}\right].$$

Собственные числа (значения) и векторы квадратной матрицы:

– $\lambda(A)$ и вектор $\vec{z}^{\,\lambda(A)} \neq 0$ – собственные **число** и **вектор** матрицы, если

$$A\vec{z}^{\,\lambda(A)} = \lambda(A) \cdot \vec{z}^{\,\lambda(A)},$$

т.е. $\lambda(A) \in C$ – корень характеристического полинома (многочлена):

$$P_n(A, \lambda) \equiv \det(A - \lambda \cdot E) = 0;$$

– $Sp(A) = \{ \lambda_1(A), \lambda_2(A), ..., \lambda_n(A) \}$ – спектр матрицы $A \in C^{n \times n}$.

Теорема (форма Жордана). $\forall\ A \in C^{n \times n} \quad \exists\ Q \in C^{n \times n}$:

$$Q^{-1}AQ = J \equiv diag\{ J_{k_1 \times k_1}, ..., J_{k_m \times k_m} \}, \quad k_1 + ... + k_m = n,$$

$$J_{t,t} = \begin{bmatrix} \lambda_t & 1 & & & \\ & \lambda_t & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_t & 1 \\ & & & & \lambda_t \end{bmatrix}, \quad \lambda_t \in Sp(A).$$

Теорема. Если $A = A^* \in C^{n\times n}$, то

1. все собственные числа $\{\lambda_j(A) \in R\}_{j=1}^n$ – вещественные,

2. собственные векторы $\{\vec{q}^{\,(j)} \in C^n: \ A\vec{q}^{\,(j)} = \lambda_j(A)\cdot\vec{q}^{\,(j)}\}_{j=1}^n$ – ортонормированный базис в C^n:

$$(\vec{q}^{\,(i)}, \vec{q}^{\,(j)})_2 = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$ – символ Кронекера,

т.е. $\vec{x} \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} (\vec{x}, q^{(j)})_2 \cdot q^{(j)}, \quad \|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |(\vec{x}, q^{(j)})_2|^2}$,

3. $A = Q\cdot\Lambda\cdot Q^*$, где $Q = \begin{bmatrix} \vec{q}^{\,(1)} & \dots & \vec{q}^{\,(n)} \end{bmatrix}$ – унитарная матрица,

$\Lambda = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ – диагональная матрица,

4. $\lambda_{\min}(A)\cdot(\vec{x}, \vec{x})_2 \le (A\vec{x}, \vec{x})_2 \le \lambda_{\max}(A)\cdot(\vec{x}, \vec{x})_2 \quad \forall\ \vec{x} \in C^n$.

Теорема. Если $A = A^T \in R^{n\times n}$, то

1. все собственные числа $\{\lambda_j(A) \in R\}_{j=1}^n$ – вещественные,
2. собственные векторы $\{\vec{q}^{(j)} \in R^n: \ A\vec{q}^{(j)} = \lambda_j(A)\cdot \vec{q}^{(j)}\}_{j=1}^n$ – ортонормированный базис в R^n (и в C^n):

   $$(\vec{q}^{(i)}, \vec{q}^{(j)})_2 = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$ – символ Кронекера,

   т.е. $\vec{x} \equiv \sum_{j=1}^{n} (\vec{x}, q^{(j)})_2 \cdot q^{(j)}$,
3. $A = Q \cdot \Lambda \cdot Q^T$, где $Q = \begin{bmatrix} \vec{q}^{(1)} & \dots & \vec{q}^{(n)} \end{bmatrix}$ – ортогональная матрица, $\Lambda = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$,
4. $\lambda_{\min}(A)\cdot(\vec{x}, \vec{x})_2 \le (A\vec{x}, \vec{x})_2 \le \lambda_{\max}(A)\cdot(\vec{x}, \vec{x})_2 \quad \forall\ \vec{x} \in R^n$ (и $\forall\ \vec{x} \in C^n$).

Система линейных алгебраических уравнений

$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ – n неизвестных вещественных или комплексных чисел системы n линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\cdot x_1 & + & a_{1,2}\cdot x_2 & +\ldots+ & a_{1,n}\cdot x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}\cdot x_1 & + & a_{2,2}\cdot x_2 & +\ldots+ & a_{2,n}\cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}\cdot x_1 & + & a_{n,2}\cdot x_2 & +\ldots+ & a_{n,n}\cdot x_n & = & b_n \end{array}$$

$$A \equiv \{a_{i,j}\}_{i=1,\,j=1}^{n,n}, \qquad \vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \vec{b} \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

– матрица, неизвестный вектор, известный вектор системы $A\vec{x} = \vec{b}$.

Теорема. Если $\det A \neq 0$, то $\forall\ \vec{b} \in C^n \quad \exists!\ \vec{x} \in C^n :\ A\vec{x} = \vec{b}$.

Тема 2. Основные задачи линейной алгебры и классические методы их решения.

Вычисление определителя $\det A$ матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in C^{n\times n}$:

$$\det A \equiv \sum_{\substack{\forall\,(j_1,\, j_2,\, \ldots,\, j_{j_n}):\\ j_k \neq j_l\ \forall\, k,l \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}}} (-1)^{r(j_1,\, j_2,\, \ldots,\, j_{j_n})} a_{i,j_1} \cdot a_{i,j_2} \cdot \ldots \cdot a_{i,j_n}\,.$$

Вычисление обратной матрицы A^{-1} к матрице $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in C^{n\times n}$:

вычислить матрицу $A^{-1} = X$ такую, что $XA = AX = E$.

Вычисление решения $\vec{x} \in C^{n}$ системы линейных алгебраических уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$ с заданными матрицей $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in C^{n\times n}$ и вектором $\vec{b} \in C^{n}$.

Вычисление собственных чисел и векторов матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$:

вычислить числа λ и векторы $\vec{x}$ такие, что $A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$.

Классические методы решения основных задач линейной алгебры.

Определитель матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ можно вычислить по формуле (разложение по первой строке):

$$\det A = a_{1,1} \cdot (-1)^{1+1} \det A_{1,1} + a_{1,2} \cdot (-1)^{1+2} \det A_{1,2} + \ldots + a_{1,n} \cdot (-1)^{1+n} \det A_{1,n},$$

где матрицы $A_{1,j}$ порядка $n-1$ получены из матрицы A удалением 1-й строки и j-го столбца.

Если V_n – количество арифметических действий для вычисления определителя матрицы порядка n,

то $\begin{cases} V_n = n \cdot V_{n-1} + 2n - 1 > n \cdot V_{n-1} > n \cdot (n-1) \cdot V_{n-2} > \ldots \\ \ldots > n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot V_1 = n! \end{cases}$ **если** $V_1 = 1$.

Это очень много! вычислите $t_{\text{сек}} = (n!\text{оп}) / (10^9 \text{оп/сек})$:

$n = 10^1$	$t_{\text{сек}} >$	$n = 10^2$	$t_{\text{сек}} >$
$n = 10^3$	$t_{\text{сек}} >$	$n = 10^6$	$t_{\text{сек}} >$

Вычисление обратной матрицы A^{-1} к матрице $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{n}\in C^{n\times n}$:

по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}(-1)^{1+1}\cdot\det A_{1,1} & (-1)^{2+1}\cdot\det A_{2,1} & \dots & (-1)^{n+1}\cdot\det A_{n,1}\\ (-1)^{1+2}\cdot\det A_{1,2} & (-1)^{2+2}\cdot\det A_{2,2} & \dots & (-1)^{n+2}\cdot\det A_{n,2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (-1)^{1+n}\cdot\det A_{1,n} & (-1)^{2+n}\cdot\det A_{2,n} & \dots & (-1)^{n+n}\cdot\det A_{n,n}\end{bmatrix},$$

нужно затратить:

- n^2V_{n-1} операций на вычисление определителей $\{\det A_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$,

Это очень много! $> n\cdot n!$

- n умножений на вычисление (**не очень много):**

$$\det A=a_{1,1}\cdot(-1)^{1+1}\det A_{1,1}+a_{1,2}\cdot(-1)^{1+2}\det A_{1,2}+...+a_{1,n}\cdot(-1)^{1+n}\det A_{1,n},$$

- n^2 делений на вычисление элементов матрицы A^{-1}.

Вычисление решения $\vec{x} \in C^n$ системы линейных алгебраических уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$ с заданными матрицей $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in C^{n \times n}$ и вектором $\vec{b} \in C^n$:

Метод Крамера вычисляет любое неизвестное x_k**:**

$$x_k = \frac{1}{\det A} \cdot \det\begin{bmatrix} \vec{a}_{\bullet,1} & \ldots & \vec{a}_{\bullet,k-1} & \vec{b} & \vec{a}_{\bullet,k+1} & \ldots & \vec{a}_{\bullet,n} \end{bmatrix},$$

где $\vec{a}_{\bullet,j} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$. Нужно вычислить 2 определителя порядка n.

Прямое применение теории определителей для решения классических задач линейной алгебры требует много арифметических операций.

Вычисление собственных чисел и векторов матрицы $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$:

вычислить числа λ и векторы $\vec{x}$ такие, что $A\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}$.

Собственные числа (значения) матрицы A – корни полинома

$$P_n(\lambda)\equiv \det(A-\lambda E)=(-1)^n\lambda^n+p_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+p_0\lambda^0=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\lambda-d_1)\ldots(\lambda-d_{k-1})(\lambda-d_{k+1})\ldots(\lambda-d_n)}{(d_k-d_1)\ldots(d_k-d_{k-1})(d_k-d_{k+1})\ldots(d_k-d_n)}\det(A-d_kE),$$

где $d_i\neq d_j$ – заданные (любые) числа.

! Формул для корней уравнения $P_n(\lambda)=0$ при $n>4$ нет

$\Rightarrow$ ***нужно строить методы приближенного вычисления корней.***

Собственные векторы матрицы A

– ненулевые решения однородной системы $(A-\lambda E)\vec{x}=0$.

Тема 3. Ошибки округления и число обусловленности.

Округление чисел.

Вещественное число

$$x = 10^n \cdot (\underbrace{x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + x_6 \cdot 10^{-6} + \ldots + x_{15} \cdot 10^{-15}}_{x_1 \neq 0,\ x_k \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, 9\}} + \ldots)$$

приближается числом с одинарной (**float**) точностью

$$\tilde{x} = 10^n \cdot (x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + x_6 \cdot 10^{-6}),$$

$$| x - \tilde{x} | \leq \gamma \cdot | x |,\ \gamma = 10^{-6};$$

или числом с двойной (**double**) точностью

$$\tilde{x} = 10^n \cdot (x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + x_{15} \cdot 10^{-15}),$$

$$| x - \tilde{x} | \leq \gamma \cdot | x |,\ \gamma = 10^{-15};$$

где γ – точность представления числа.

Точность арифметических операций.

Сложение:

$$x + y = \tilde{x} + \tilde{y} + [(x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y})] =$$

$$= \underset{\approx (x+y)}{\overset{z}{\tilde{z}}} + \underbrace{(z - \tilde{z}) + [(x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y})]}_{\delta(x+y) \equiv (x+y) - \tilde{z}}$$

$\Rightarrow$

$$|\,\delta(x+y)\,| \le |\,z - \tilde{z}\,| + |\,x - \tilde{x}\,| + |\,y - \tilde{y}\,| \le$$

$$\le \gamma \cdot (\,|\,z\,| + |\,x - \tilde{x}\,| + |\,y - \tilde{y}\,|\,) \le$$

$$\le \gamma \cdot \{\,|[x - (x - \tilde{x})] + [y - (y - \tilde{y})]| + |\,x - \tilde{x}\,| + |\,y - \tilde{y}\,|\,\} \le$$

$$\le \gamma \cdot \{\,|\,x\,| + |\,y\,| + 2 \cdot |\,x - \tilde{x}\,| + 2 \cdot |\,y - \tilde{y}\,|\,\} \le$$

$$\le \gamma \cdot \{\,|\,x\,| + |\,y\,| + 2 \cdot \gamma \cdot |\,x\,| + 2 \cdot \gamma \cdot |\,y\,|\,\} =$$

$$= \gamma \cdot (1 + 2\gamma) \cdot \{|\,x\,| + |\,y\,|\} \approx \gamma \cdot \{|\,x\,| + |\,y\,|\}.$$

! равенство $(x+y)+z = x+(y+z)$ **не выполняется на компьютере!**

Умножение:

$$x\cdot y=\tilde x\cdot\tilde y+[\tilde x\cdot(y-\tilde y)+\tilde y\cdot(x-\tilde x)+(x-\tilde x)\cdot(y-\tilde y)]=$$

$$=\underset{\approx (x\cdot y)}{\overset{z}{\tilde z}}\ +\underbrace{(z-\tilde z)+[\tilde x\cdot(y-\tilde y)+\tilde y\cdot(x-\tilde x)+(x-\tilde x)\cdot(y-\tilde y)]}_{\delta(x\cdot y)\equiv(x\cdot y)-\tilde z}$$

$\Rightarrow$

$$|\,\delta(x\cdot y)\,|\le|\,z-\tilde z\,|+[\tilde x\cdot(y-\tilde y)+\tilde y\cdot(x-\tilde x)+(x-\tilde x)\cdot(y-\tilde y)]\le$$

$$\le\gamma\cdot(\,|\,z\,|+|\,\tilde x\,|\cdot|\,y\,|\ +|\,\tilde y\,|\cdot|\,x\,|+\gamma\cdot(|\,x\,|\cdot|\,y\,|\,)$$

$$\le\gamma\cdot(\,|\,\tilde x\,|\cdot|\,\tilde y\,|+|\,\tilde x\,|\cdot|\,y\,|\ +|\,\tilde y\,|\cdot|\,x\,|+\gamma\cdot(|\,x\,|\cdot|\,y\,|\,).$$

Так как $\begin{cases}|\,\tilde x\,|\le(1+\gamma)\cdot|\,x\,|\\ |\,\tilde y\,|\le(1+\gamma)\cdot|\,y\,|\end{cases}$

то $|\,\delta(x\cdot y)\,|\le\gamma\cdot[(1+\gamma)^2+2(1+\gamma)\ +\gamma)]\cdot|\,x\,|\cdot|\,y\,|\approx\gamma\cdot|\,x\,|\cdot|\,y\,|.$

! равенство $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ **не выполняется на компьютере!**

Итак, ***результат арифметической формулы на компьютере зависит от порядка ее выполнения и, например,***

число $d = \underbrace{(a+b)\cdot c}_{\tilde{d}_1 + \delta_1 d} \equiv \underbrace{a\cdot c + b\cdot c}_{\tilde{d}_2 + \delta_2 d}$ будет заменено

либо на число $\tilde{d}_1$, либо на число $\tilde{d}_2 \neq \tilde{d}_1$.

$\Rightarrow$

на компьютере реализация ***арифметической формулы зависит от ее представления*** **– алгоритма вычисления:**

разные алгоритмы $\Rightarrow$ разные (близкие) ответы.

Эти проблемы рассмотрены, например, в книге

Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И. «Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах».

Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988, – 456 с.

Число обусловленности матрицы $Cond\, A = \| A \|_{C^{n\times n}} \cdot \| A^{-1} \|_{C^{n\times n}}$**.**

Заданы: 1. матрица $A \in C^{n\times n}$: $\det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$,

2. векторная норма $\| \vec{x} \|_{C^n}$;

3. матричная норма $\| A \|_{C^{n\times n}}$: $\| A\vec{x} \|_{C^n} \le \| A \|_{C^{n\times n}} \cdot \| \vec{x} \|_{C^n} \quad \forall\, \vec{x} \in C^n$.

Оценки для $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ **(**$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \| \vec{x} \|_{C^n} \ge \| \vec{b} \|_{C^n} / \| A \|_{C^{n\times n}}$**):**

Если $\tilde{\vec{b}} = \vec{b} + \delta(\vec{b})$**, то** $\tilde{\vec{x}} \equiv \vec{x} + \delta(\vec{x}) = A^{-1}[\vec{b} + \delta(\vec{b})] \Rightarrow \delta(\vec{x}) = A^{-1} \cdot \delta(\vec{b})$ **и**

1. $\| \delta(\vec{x}) \|_{C^n} \le \| A^{-1} \|_{C^{n\times n}} \cdot \| \delta(\vec{b}) \|_{C^n}$ – **абсолютная ошибка**;

2. $$\frac{\| \delta(\vec{x}) \|_{C^n}}{\| \vec{x} \|_{C^n}} \le \frac{\| A^{-1} \|_{C^{n\times n}} \cdot \| \delta(\vec{b}) \|_{C^n}}{\| \vec{b} \|_{C^n} / \| A \|_{C^{n\times n}}} \le \underbrace{\| A \|_{C^{n\times n}} \cdot \| A^{-1} \|_{C^{n\times n}}}_{Cond\, A} \frac{\| \delta(\vec{b}) \|_{C^n}}{\| \vec{b} \|_{C^n}}$$

– **относительная ошибка**.

Число обусловленности матрицы $Cond\, A = \| A \|_{C^{n\times n}} \cdot \| A^{-1} \|_{C^{n\times n}}$

– **характеристика** трудности решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$:

если $\dfrac{\| \delta(\vec{b}) \|_{C^n}}{\| \vec{b} \|_{C^n}}$ – исходная ошибка, то нельзя гарантировать ответ

лучше, чем $\dfrac{\| \delta(\vec{x}) \|_{C^n}}{\| \vec{x} \|_{C^n}} \le Cond\, A \cdot \dfrac{\| \delta(\vec{b}) \|_{C^n}}{\| \vec{b} \|_{C^n}}$.

Для матрицы $A = A^*$ с положительными собственными числами $\lambda(A) > 0$

$$Cond_2\, A = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}, \text{ так как } \| A \|_2 = \lambda_{\max},\ \| A^{-1} \|_2 = 1/\lambda_{\min}.$$

! Заметим, что $Cond\, A \equiv Cond\,(d \cdot A) \quad \forall\, d \ne 0$

$\Rightarrow$ ***величина*** $d = \det A \ne 0$ ***– не влияет на*** $Cond\, A$.

Итак, мы сейчас знаем, что вместо решения $\vec{x}$ системы $A\vec{x} = \vec{b}$ вычисляется решение $\tilde{\vec{x}} = \vec{x} + \delta(\vec{x})$ системы $A\tilde{\vec{x}} = \tilde{\vec{b}}$ с приближенной правой частью $\tilde{\vec{b}} = \vec{b} + \delta(\vec{b})$, где

1. $\dfrac{\|\delta(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} \le Cond\, A \cdot \dfrac{\|\delta(\vec{b})\|}{\|\vec{b}\|}$ – оценка ошибки решения $\tilde{\vec{x}} = A^{-1}\tilde{\vec{b}}$;
2. но, **если** мы матрицу A разложим на произведение $A = L \cdot U$,

   то решение системы $A\tilde{\vec{x}} = \tilde{\vec{b}}$ **получим**, решая подсистемы:

   - $A\tilde{\vec{x}} \equiv L\underset{\vec{y}}{(U\tilde{\vec{x}})} = \tilde{\vec{b}} \Rightarrow \vec{y}^{L} = \vec{y} + \delta(\vec{y})$ – результат округления;
   - $U(\vec{x}^{U}) = \vec{y}^{L} \Rightarrow \vec{x}^{LU} = \vec{x}^{U} + \delta(\vec{x}^{U})$ – результат округления;
   - $\Rightarrow \dfrac{\|\delta(\vec{x}^{LU})\|}{\|\vec{x}\|} \le \underbrace{Cond\, U \cdot Cond\, L}_{\ge Cond\, A} \cdot \dfrac{\|\delta(\vec{b})\|}{\|\vec{b}\|}.$

3. $\Rightarrow$ ***для разных*** $A = L \cdot U$ ***получаем на компьютере разные*** $\vec{x}^{LU} = \vec{x} + \delta(\vec{x}^{LU})$, и,

если $\dfrac{\| \vec{x}^{L_1U_1} - \vec{x}^{L_2U_2} \|}{\| \vec{x}^{L_1U_1} \|} << 1$, **то** $\vec{x} \approx \vec{x}^{L_1U_1}$.

$\Rightarrow$

1. **либо** мы должны создать алгоритм для вычисления решения $\vec{x}$ системы $A\vec{x} = \vec{b}$ с заданной точностью $\dfrac{\| \delta(\vec{x}) \|}{\| \vec{x} \|} \le \varepsilon$;
2. **либо** приближенно решить задачу $A\vec{x} = \vec{b}$ несколькими методами, и выбрать из полученных приближений ответ $\tilde{\vec{x}}$;
3. **затем** вычислить **«невязку»** $\tilde{\vec{r}} = A\tilde{\vec{x}} - \vec{b} \equiv A\underbrace{(\tilde{\vec{x}} - \vec{x})}_{\equiv \delta(\tilde{\vec{x}})}$ и оценить

«ошибку» $\dfrac{\| \delta(\tilde{\vec{x}}) \|}{\| \vec{x} \|} \le \dfrac{\| A^{-1} \| \cdot \| \tilde{\vec{r}} \|}{\| \vec{x} \|} \approx \| A^{-1} \| \cdot \dfrac{\| \tilde{\vec{r}} \|}{\| \tilde{\vec{x}} \|}$.

Тема 4. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Методы Гаусса исключения неизвестных.

Прямой метод решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$ порядка n

– **формула** (*простая или сложная*) для вычисления неизвестных $\{x_k\}_{k=1}^n$ за **конечное число арифметических действий** над заданными коэффициентами $(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ и компонентами $\{b_i\}_{i=1}^n$.

Методы Гаусса исключения неизвестных

– **прямые методы** для решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$, в основе которых лежит: **выражение очередного неизвестного** из уравнения и **подстановка** этого выражения в **остальные уравнения** системы

$$[P_{строк} A P_{столбцов}^T](P_{столбцов}\vec{x}) = P_{строк}\vec{b},$$

где $P_{\dots}$ – ортогональная матрица перестановок: $(P_{\dots})^{-1} \equiv (P_{\dots})^T$,

- **перестановка уравнений** в системе $A\vec{x}=\vec{b}$ – умножение системы на ортогональную матрицу $P_{строк}$:

$$[P_{строк}A]\vec{x}=[P_{строк}A]\vec{b}$$

- **изменение нумерации неизвестных** в системе $[P_{строк}A]\vec{x}=[P_{строк}A]\vec{b}$ – умножение вектора $\vec{x}$ на ортогональную матрицу $P_{столбцов}$:

$$[P_{строк}AP^T_{столбцов}](P_{столбцов}\vec{x})=P_{строк}\vec{b}$$

- **исключение неизвестных** – умножение системы на нижнюю треугольную матрицу L^{-1}:

$$L^{-1}\cdot[P_{строк}AP^T_{столбцов}](P_{столбцов}\vec{x})\equiv U(P_{столбцов}\vec{x})=L^{-1}\cdot P_{строк}\vec{b}$$

- **решение системы** $U(P_{столбцов}\vec{x})=L\cdot P_{строк}\vec{b}$ с **верхней треугольной** матрицей $U \Rightarrow \vec{x}=(P_{столбцов})^T[U^{-1}(L^{-1}\cdot P_{строк}\vec{b})]$.

Нижняя треугольная матрица $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^{n} \equiv \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & l_{n,n} \end{bmatrix}$:

1. L^{-1} – нижняя треугольная матрица
2. **если** L_1 и L_2, **то** $L = L_1 \cdot L_2$ – нижняя треугольная матрица
3. **формулы** для решения системы $L\vec{x} = \vec{b}$:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 / l_{1,1} \\ x_2 = (b_1 - l_{2,1} \cdot x_1) / l_{2,2} \\ \dots \\ x_n = (b_n - l_{n,1} \cdot x_1 - l_{n,2} \cdot x_2 - \ldots - l_{n,n-1} \cdot x_{n-1}) / l_{n,n} \end{cases}$$

$-\ 1 + 3 + \ldots + (2n-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ арифметических операций.

Верхняя треугольная матрица $U=(u_{i,j})_{i,j=1}^{n} \equiv \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{n,n} \end{bmatrix}$:

1. U^{-1} – верхняя треугольная матрица
2. **если** U_1 и U_2, **то** $U=U_1 \cdot U_2$ – верхняя треугольная матрица
3. **формулы** для решения системы $U\vec{x}=\vec{b}$:

$$\begin{cases} x_n = b_n / u_{n,n} \\ x_{n-1} = (b_{n-1} - u_{n-1,n} \cdot x_n) / u_{n-1,n-1} \\ \dots \\ x_1 = (b_1 - u_{1,2} \cdot x_2 - \ldots - u_{1,n-1} \cdot x_{n-1}) / u_{1,1} \end{cases}$$

– $1+3+\ldots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ арифметических операций.

Итак, **методы Гаусса** решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$:

1. перестановка уравнений в системе $A\vec{x} = \vec{b}$ и изменение нумерации неизвестных: $[P_{строк} A P^T_{столбцов}](P_{столбцов}\vec{x}) = P_{строк}\vec{b}$;
2. вычисление нижней треугольной матрицы L^{-1} такой, что матрица $U = L^{-1}(P_{строк} A P^T_{столбцов})$ – верхняя треугольная матрица;
3. вычисление вектора $\vec{y} = L^{-1}\vec{b}$;
4. решение системы: $U\vec{z} = \vec{y}$;
5. получение решения $\vec{x} = (P_{столбцов})^T \vec{z}$.

Зачем нужны перестановки уравнений изменение нумерации неизвестных?

1. для существования факторизации матрицы $P_{строк} A P^T_{столбцов} = LU$;
2. для уменьшения влияния на ответ $\vec{x}$ ошибок округления.

Элементарная нижняя треугольная матрица

$$L^{(k)} = \left[\begin{array}{ccc:cccc} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & l_{k,k}^{(k)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & l_{k+1,k}^{(k)} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & l_{n,k}^{(k)} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right], \quad \det L^{(k)} = l_{k,k}^{(k)}.$$

При умножении матрицы A на матрицу $L^{(k)}$ слева ($L^{(k)}A$):

- первые k строк матрицы A не изменяются;
- k-я строка матрицы A умножается на $l_{k,k}^{(k)}$;
- к $(k+i)$-й строке прибавляется k-я строка, умноженная на $l_{k+i,k}^{(k)}$.

Главные миноры $d_m \equiv \det A_m$ матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$, где матрица

$A_m = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m}$ порядка m – диагональный блок матрицы A:

$$A = \left[\begin{array}{c:c} A_m & A_{m,n-m} \\ \hdashline A_{n-m,m} & A_{n-m,n-m} \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{c:c} (a_{i,j})_{i,j=1}^{m} & (a_{i,j})_{i=1,\,j=m+1}^{m\quad n} \\ \hdashline (a_{i,j})_{i=m+1,\,j=1}^{n\qquad m} & (a_{i,j})_{i,j=m+1}^{n} \end{array}\right].$$

Теорема. Если все главные миноры $\det A_m \neq 0$ матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$

и $\det L_m \neq 0$ нижней треугольной матрицы L

то все главные миноры $\det (LA)_m \neq 0$.

Доказательство следует из тождества:

$$LA = \left[\begin{array}{c:c} L_m & O_{m,n-m} \\ \hdashline L_{n-m,m} & L_{n-m,n-m} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} A_m & A_{m,n-m} \\ \hdashline A_{n-m,m} & A_{n-m,n-m} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} L_m A_m & (LA)_{m,n-m} \\ \hdashline (LA)_{n-m,m} & (LA)_{n-m,n-m} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\ (LA)_m = L_m A_m \ \Rightarrow\ \det (LA)_m \equiv \det (L)_m \cdot \det (A)_m \neq 0.$$

Тема 4.1. Методы Гаусса исключения неизвестных: схема единственного деления.

Теорема (прямой ход схемы единственного деления**).**

Если все главные миноры $\det A_k \neq 0$ матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$,

то $\exists$ $L^{(1)}, L^{(2)}, ..., L^{(n)}$ (элементарные нижние треугольные матрицы) такие, что

$$\underbrace{L^{(n)}...L^{(2)}L^{(1)}}_{\equiv L^{-1}} A = U = (u_{i,j})_{i,j=1}^{n} \equiv \begin{bmatrix} 1 & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,n} \\ & 1 & u_{2,3} & \dots & u_{2,n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & u_{n-1,n} \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

– верхняя треугольная матрица.

Доказательство. Построим эти матрицы.

1 шаг. Так как $\det A_1 \neq 0 \;\Rightarrow\; a_{1,1} \neq 0$, то вычислим элементы

$$l_{1,1}^{(1)} = 1/a_{1,1},\ l_{2,1}^{(1)} = -l_{1,1}^{(1)} \cdot a_{2,1},\ \ldots,\ l_{n,1}^{(1)} = -l_{1,1}^{(1)} \cdot a_{n,1} \qquad \text{матрицы } L^{(1)},$$

а для матрицы $A^{(1)} = L^{(1)} A \equiv \left[\begin{array}{c:ccc} 1 & a_{1,2}^{(1)} & \ldots & a_{1,n}^{(1)} \\ \hdashline 0 & a_{2,2}^{(1)} & \ldots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & \ldots & a_{n,n}^{(1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:ccc} 1 & u_{1,2} & \ldots & u_{1,n} \\ \hdashline 0 & a_{2,2}^{(1)} & \ldots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & \ldots & a_{n,n}^{(1)} \end{array}\right]$

$$a_{1,2}^{(1)} = l_{1,1}^{(1)} a_{1,2}, \qquad \ldots, \quad a_{1,n}^{(1)} = l_{1,1}^{(1)} a_{1,n};$$

$$a_{2,2}^{(1)} = l_{2,1}^{(1)} \cdot a_{1,2} + a_{2,2}, \quad \ldots, \quad a_{2,n}^{(1)} = l_{2,1}^{(1)} \cdot a_{1,n} + a_{2,n};$$

$$\ldots$$

$$a_{n,2}^{(1)} = l_{n,1}^{(1)} \cdot a_{1,2} + a_{n,2}, \quad \ldots, \quad a_{n,n}^{(1)} = l_{n,1}^{(1)} \cdot a_{1,n} + a_{n,n}.$$

Объем вычислений $\approx 2n^2$ операций: из них ***только 1 деление***!

Далее применим метод математической индукции.

Пусть вычислены $L^{(1)}, \ldots, \ L^{(k)}$ такие, что $\{\det L^{(m)} \neq 0\}_{m=1}^{k}$ и

$$A^{(k)} = L^{(k)} \ldots L^{(1)} A \equiv \left[\begin{array}{c:ccc} U_k & & U_{k,n-k} & \\ \hdashline & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ O_{n-k,k} & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(k)} \end{array}\right].$$

Заметим, что минор $0 \neq \det(A^{(k)})_{k+1} = \det(L^{(k)})_{k+1} \ldots \det(L^{(1)})_{k+1} \det A_{k+1} = \det U_k \cdot a_{k+1,k+1}^{(k)} \equiv a_{k+1,k+1}^{(k)} \Rightarrow$ можно определить элементы матрицы $L^{(k+1)}$:

$$l_{k+1,k+1}^{(k+1)} = 1 / a_{k+1,k+1}^{(k)},$$

$$l_{k+2,k+1}^{(k+1)} = -l_{k+1,k+1}^{(k+1)} \cdot a_{k+2,k+1}^{(k)}, \quad \ldots,$$

$$l_{n,k+1}^{(k+1)} = -l_{k+1,k+1}^{(k+1)} \cdot a_{n,k+1}^{(k)}.$$

Матрица $A^{(k+1)} = L^{(k+1)} A^{(k)}$ имеет вид

$$A^{(k+1)} = \left[\begin{array}{c|c:cccc} U_k & & & U_{k,n-k} & & \\ \hdashline & 1 & a^{(k+1)}_{k+1,k+2} & \dots & a^{(k+1)}_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O_{n-k,k} & 0 & a^{(k+1)}_{k+2,k+2} & \dots & a^{(k+1)}_{k+2,n} \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & a^{(k+1)}_{n,k+2} & \dots & a^{(k+1)}_{n,n} \end{array}\right],$$ где элементы

$$a^{(k+1)}_{k+1,k+2} = l^{(k+1)}_{k+1,k+1} a^{(k)}_{k+1,k+2}, \qquad \dots, \quad a^{(k+1)}_{k+1,n} = l^{(k+1)}_{k+1,k+1} a^{(k)}_{k+1,n};$$

$$a^{(k+1)}_{k+2,k+2} = l^{(k+1)}_{k+2,k+1} a^{(k)}_{k+1,k+2} + a^{(k)}_{k+2,k+2}, \dots, \quad a^{(k+1)}_{k+2,n} = l^{(k+1)}_{k+2,k+1} \cdot a^{(k)}_{k+1,n} + a^{(k)}_{k+2,n};$$

$\dots$

$$a^{(k+1)}_{n,k+2} = l^{(k+1)}_{n,k+1} \cdot a^{(k)}_{k+1,k+2} + a^{(k)}_{n,k+2}, \qquad \dots, \quad a^{(k+1)}_{n,n} = l^{(k+1)}_{n,k+1} \cdot a^{(k)}_{k+1,n} + a^{(k)}_{n,n}.$$

Объем вычислений $\approx 2(n-k)^2$ операций: из них ***только 1 деление***!

Итак, методом математической индукции доказали теорему:

1. построили рекуррентные формулы вычисления элементарных нижних треугольных матриц $L^{(k)} = L^{(k)}(A^{(k-1)})$ и матриц $A^{(k)} = L^{(k)} A^{(k-1)}$, где $A^{(0)} \equiv 0$, $k = 1, 2, ..., n$, таких, что $U \equiv A^{(n)}$;
2. оценили объем вычислений $\approx 2(n)^2 + 2(n-1)^2 + ... + 2(1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3} = \dfrac{2}{3} n^3$ операций: из них ***только*** n ***делений***!
3. Обычно сохраняют элементы $\{l_{i,k}^{(k)}\}_{i=k}^{n}$, определяющие матрицы $\{L^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ – это $n(n+1)/2$ чисел и $\{u_{i,j}\}_{i=1,\ j=i+1}^{n-1\ \ n-1}$, определяющие матрицу U – это $n(n-1)/2$ чисел, всего: n^2 чисел.

4. Обычно **прямым ходом** схемы единственного деления для $A\vec{x}=\vec{b}$ называют вычисление матриц $L^{(1)}, L^{(2)}, ..., L^{(n)}, U$ и вектора $\vec{b}^{(n)}=L^{(n)}...L^{(2)}L^{(1)}\vec{b}$.

Теорема (вычисление вектора $\vec{b}^{(n)}=L^{(n)}...L^{(2)}L^{(1)}\vec{b}$ и **обратный ход** схемы единственного деления для $A\vec{x}=\vec{b}$: $\vec{x}=U^{-1}\vec{b}^{(n)}$**).**

Если для $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ $\forall$ $\det A_k \neq 0$ и известно разложение

$L^{(n)}...L^{(2)}L^{(1)}A=U=(u_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ – треугольная матрица ($\forall$ $u_{i,i}=1$),

то

1. системы $A\vec{x}=\vec{b}$ и $U\vec{x}=\vec{b}^{(n)}\equiv L^{(n)}...L^{(2)}L^{(1)}\vec{b}$ эквивалентны,
2. вектор $\vec{b}^{(n)}=L^{(n)}...L^{(2)}L^{(1)}\vec{b}$ вычисляется за $\approx n^2$ операций,
3. решение $\vec{x}=U^{-1}\vec{b}^{(n)}$ вычисляется за $\approx n^2$ операций;

итого: решение $\vec{x}=U^{-1}L^{(n)}...L^{(2)}L^{(1)}\vec{b}$ вычисляется за $\approx 2n^2$ операций.

Доказательство. Первое утверждение очевидно.

2. Построим формулы вычисления вектор $\vec{b}^{(n)} = L^{(n)} ... L^{(2)} L^{(1)} \vec{b}$:
$\vec{b}^{(0)} = \vec{b}$;

$$\vec{b}^{(k+1)} = L^{(k+1)} \vec{b}^{(k)} \equiv \begin{pmatrix} \vec{b}_1^{(k)} \\ \vdots \\ \vec{b}_k^{(k)} \\ \hline l_{k+1,k+1}^{(k+1)} \vec{b}_{k+1}^{(k)} \\ l_{k+2,k+1}^{(k+1)} \vec{b}_{k+1}^{(k)} + \vec{b}_{k+2}^{(k)} \\ \vdots \\ l_{n,k+1}^{(k+1)} \vec{b}_{k+1}^{(k)} + \vec{b}_n^{(k)} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$

$\approx 2(n-k)$ операций для $\forall\ k$,

$\Rightarrow$ вектор $\vec{b}^{(n)}$ вычисляется за $\approx n^2$ операций (***без делений***!).

3. Построим формулы вычисления решения системы $U\vec{x}=\vec{b}^{(n)}$ (**обратный ход** схемы единственного деления для $A\vec{x}=\vec{b}$):

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)} \\ x_{n-1} = b_{n-1}^{(n)} - u_{n-1,n}\cdot x_n \\ \vdots \\ x_2 = b_2^{(n)} - u_{2,n}\cdot x_n - \ldots - u_{2,3}\cdot x_3 \\ x_1 = b_1^{(n)} - u_{1,n}\cdot x_n - \ldots - u_{1,3}\cdot x_3 - u_{1,2}\cdot x_2 \end{cases}$$

$2[1+\ldots+(n-2)+(n-1)]$ умножений и вычитаний.

$\Rightarrow$ решение $\vec{x}$ системы $U\vec{x}=\vec{b}^{(n)}$ вычисляется за $\approx n^2$ операций (***без делений***!).

Суммируя число операций формул 2. и 3. получим:

решение $\vec{x}=U^{-1}[L^{(n)}\ldots L^{(2)}L^{(1)}\vec{b}]$ вычисляется за $\approx 2n^2$ операций (***без делений***!).

Применения схемы единственного деления, если $\forall\ \det A_m \neq 0$.

1. Решение системы $A\vec{x} = \vec{b}$: число операций $\approx \dfrac{2}{3}n^3 + 2n^2$.
2. Вычисление $\det A = \det U \,/\, [\det L^{(1)} \ldots \det L^{(n)}] \equiv a_{1,1}^{(0)} \ldots a_{n,n}^{(n-1)}$:

   число операций $\approx \dfrac{2}{3}n^3 + n$.
3. Вычисление обратной матрицы $A^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{x}^{[1]} & \ldots & \vec{x}^{[n]} \end{bmatrix}$, решая системы $\{A\vec{x}^{[j]} = \vec{e}^{[j]}\}_{j=1}^{n}$, где $\{\vec{e}^{[j]}\}_{j=1}^{n}$ – столбцы единичной матрицы $E = \begin{bmatrix} \vec{e}^{[1]} & \ldots & \vec{e}^{[n]} \end{bmatrix}$:

   число операций $\approx \dfrac{2}{3}n^3 + (2n^2)n = \dfrac{8}{3}n^3$.

Тема 4.2. Методы Гаусса исключения неизвестных: схема единственного деления с выбором главного элемента.

Схема единственного деления для решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$ **не работает**, **если**, например, **главный минор** $\det A_1 \equiv a_{1,1}=0$, так как $\neg\exists\ L^{(1)}$.

Но эта схема **«плохо работает»** и в случае $\forall\ \det A_k \neq 0$, но $\exists\ m$ такое, что элемент $l_{m,m}^{(m)}=1/a_{m,m}^{(m)}$, $0<|a_{m,m}^{(m)}|<<1$, и **есть ошибки округления**.

Пример. Умножим систему $\begin{bmatrix} 10^{-6} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ на $L^{(1)}=\begin{bmatrix} 10^{6} & 0 \\ 10^{6} & 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 10^{6} \\ 0 & 10^{6}+1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10^{6} \\ 10^{6}+1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2=1, \\ x_1=10^{6}-10^{6}x_2=0, \end{cases} \text{но} \begin{cases} \tilde{x}_2=1+10^{-6}, \\ \tilde{x}_1=10^{6}-10^{6}\tilde{x}_2=1, \end{cases} \text{т.е. } \frac{\|\vec{x}-\tilde{\vec{x}}\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty}=\frac{1}{1}>>0.$$

Но, если

1. уравнения поменять местами: $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 10^{-6} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

2. умножить эту систему на $L^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 10^{-6} & 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1+10^{-6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+10^{-6} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = 1, \\ x_1 = -1 + x_2 = 0, \end{cases} \text{ но } \begin{cases} \tilde{x}_2 = 1 + 10^{-6}, \\ \tilde{x}_1 = -1 + \tilde{x}_2 = 10^{-6}, \end{cases} \text{т.е. } \frac{\| \vec{x} - \tilde{\vec{x}} \|_\infty}{\| \vec{x} \|_\infty} = \frac{10^{-6}}{1} \approx 0.$$

Вывод: при наличии ошибок округления арифметических операций **изменение нумерации** уравнений может «сильно» **уменьшить** относительную **ошибку приближения** решения системы.

Элементарная матрица перестановок $P_{i,j}$

– матрица, полученная перестановкой в матрице E её i-й и j-й строк:

$$P_{i,j} = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & 0 & & & & 1 & & & \\
\hline
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
\hline
 & & & 1 & & & & 0 & & & \\
\hline
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\
\leftarrow i-строка \\
\\ \\ \\
\leftarrow j-строка \\
\\ \\ \\
\end{array}$$

Легко проверить, что

- $P_{i,i} = E \quad \forall\ i$, $\det P_{i,i} = 1$; $\det P_{i,j} = -1 \quad \forall\ i \neq j$,
- $P_{i,j} = P_{i,j}^T \quad \forall\ i, j \qquad \Rightarrow P_{i,j}$ – симметричная матрица,
- $P_{i,j} \cdot P_{i,j} = E \quad \forall\ i, j \Rightarrow P_{i,j}$ – ортогональная матрица: $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j} = P_{i,j}^T$,
- умножение $P_{i,j}A$ – это перестановка i-й и j-й строк матрицы A:

$$A = \begin{bmatrix} (\vec{a}_1)^T \\ \vdots \\ \hdashline (\vec{a}_i)^T \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline (\vec{a}_j)^T \\ \hdashline \vdots \\ (\vec{a}_n)^T \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P_{i,j}A = \begin{bmatrix} (\vec{a}_1)^T \\ \vdots \\ \hdashline (\vec{a}_j)^T \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline (\vec{a}_i)^T \\ \hdashline \vdots \\ (\vec{a}_n)^T \end{bmatrix}.$$

Теорема (прямой ход схемы единственного деления с выбором главного элемента по столбцу**).**

Если $\det A \neq 0$ матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$,

то $\exists$ $(L^{(1)}, P_{1,i_1})$, $(L^{(2)}, P_{2,i_2})$, ..., $(L^{(n)}, P_{n,i_n})$, где

$L^{(k)}$ – элементарные нижние треугольные матрицы,

P_{k,i_k} – элементарные матрицы перестановок, такие, что

$$(L^{(n)}P_{n,i_n})\ldots(L^{(2)}P_{2,i_2})(L^{(1)}P_{1,i_1})A = U \equiv \begin{bmatrix} 1 & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ & 1 & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & u_{n-1,n} \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

– верхняя треугольная матрица.

Доказательство. Построим эти матрицы.

1 шаг. *Сначала* построим P_{1,i_1} и определим $A^{(1/2)} = P_{1,i_1} A$:

1. $i_1 : \ |a_{i_1,1}| \ge \max\limits_{i=1,\dots,n} |a_{i,1}| \quad (\det A \ne 0 \Rightarrow \exists\, a_{i_1,1} \ne 0)$,

2. 1-ю и i_1-ю строки матрицы A меняем местами:
$A^{(1/2)} = P_{1,i_1} A\,, \quad a_{1,1}^{(1/2)} = a_{i_1,1} \ne 0.$

Теперь построим $L^{(1)}$ и определим $A^{(1)} = L^{(1)} A^{(1/2)}$:

3. так как $a_{1,1}^{(1/2)} \ne 0$, то

$$l_{1,1}^{(1)} = 1/\,a_{1,1}^{(1/2)},\ l_{2,1}^{(1)} = -l_{1,1}^{(1)} \cdot a_{2,1}^{(1/2)},\ \dots,\ l_{n,1}^{(1)} = -l_{1,1}^{(1)} \cdot a_{n,1}^{(1/2)},$$

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{c:ccc} l_{1,1}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline l_{2,1}^{(1)} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1}^{(1)} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:ccc} a_{1,1}^{(1/2)} & a_{1,2}^{(1/2)} & \dots & a_{1,n}^{(1/2)} \\ \hdashline a_{2,1}^{(1/2)} & a_{2,2}^{(1/2)} & \dots & a_{2,n}^{(1/2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}^{(1/2)} & a_{n,2}^{(1/2)} & \dots & a_{n,n}^{(1/2)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:ccc} 1 & a_{1,2}^{(1)} & \dots & a_{1,n}^{(1)} \\ \hdashline 0 & a_{2,2}^{(1)} & \dots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & \dots & a_{n,n}^{(1)} \end{array}\right]$$

Далее применим метод математической индукции.

Пусть вычислены $(L^{(1)}, P_{1,i_1})$, $(L^{(2)}, P_{2,i_2})$, ..., $(L^{(k)}, P_{k,i_k})$ и

$$A^{(k)} = (L^{(k)} P_{2,i_k}) \ldots (L^{(1)} P_{1,i_1}) A \equiv \left[\begin{array}{c:ccc} U_k & & U_{k,n-k} & \\ \hdashline & a^{(k)}_{k+1,k+1} & \cdots & a^{(k)}_{k+1,n} \\ O_{n-k,k} & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a^{(k)}_{n,k+1} & \cdots & a^{(k)}_{n,n} \end{array}\right].$$

Заметим, $0 \neq \det A^{(k)} = \det U_k \det(a^{(k)}_{i,j})^{(n)}_{i,j=k+1} = \det(a^{(k)}_{i,j})^{(n)}_{i,j=k+1} \Rightarrow$

1. $\exists\, i_{k+1}: \ |a_{i_{k+1},k+1}| \geq \max\limits_{i=k+1,\ldots,n} |a_{i,k+1}| > 0,$

2. $(k+1)$-ю и i_{k+1}-ю строки матрицы $A^{K)}$ меняем местами:
   $A^{(k+1/2)} = P_{k+1,i_{k+1}} A^{(k)}$, $\quad a^{(k+1/2)}_{k+1,k+1} = a^{(k)}_{i_{k+1},k+1} \neq 0.$

Теперь построим $L^{(k+1)}$ и определим $A^{(k+1)} = L^{(k+1)} A^{(k+1/2)}$:

3. так как $a_{k+1,k+1}^{(k+1/2)} \neq 0$, то вычислим элементы матрицы $L^{(k+1)}$:

$$l_{k+1,k+1}^{(k+1)} = 1/a_{k+1,k+1}^{(k)},$$

$$l_{k+2,k+1}^{(k+1)} = -l_{k+1,k+1}^{(k+1)} \cdot a_{k+2,k+1}^{(k)},$$

$$\ldots$$

$$l_{n,k+1}^{(k+1)} = -l_{k+1,k+1}^{(k+1)} \cdot a_{n,k+1}^{(k)};$$

и матрицы $A^{(k+1)} = L^{(k+1)} A^{(k+1/2)}$:

$$A^{(k+1)} = \left[\begin{array}{c|cccc} U_k & & U_{k,n-k} & & \\ \hline & 1 & a_{k+1,k+2}^{(k+1)} & \ldots & a_{k+1,n}^{(k+1)} \\ \cline{2-5} & 0 & a_{k+2,k+2}^{(k+1)} & \ldots & a_{k+2,n}^{(k+1)} \\ O_{n-k,k} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & a_{n,k+2}^{(k+1)} & \ldots & a_{n,n}^{(k+1)} \end{array}\right], \ \det A^{(k+1)\neq 0}.$$

Замечания.

1. Формулы вычисления элементов матриц $A^{(k)} = L^{(k)} A^{(k-1/2)}$ в теореме не приведены в явном виде, но они практически совпадают с формулами, приведенными в теореме о приведении матрицы к верхней треугольной матрицы без перестановок строк.
2. Объем вычислений также $\approx \dfrac{2}{3} n^3$ операций (из них ***только*** n ***делений***!), если не учитывать затраты на поиск номеров максимальных по модулю элементов в столбцах.
3. Кроме сохранения элементов $\{l_{i,k}^{(k)}\}_{i=k}^{n}$, определяющих матрицы $\{L^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ – это $n(n+1)/2$ чисел и $\{u_{i,j}\}_{i=1,\ j=i+1}^{n-1\ \ n-1}$, определяющих матрицу U – это $n(n-1)/2$ чисел, сохраняют номера $i_1,\ i_2,\ \ ,i_{n-1}$, определяющие матрицы P_{k,i_k}, всего: (n^2+1) чисел.

Теорема (вычисление вектора $\vec{b}^{(n)} = (L^{(n)}P_{n,i_n})\ldots(L^{(2)}P_{2,i_2})(L^{(1)}P_{1,i_1})\vec{b}$ и **обратный ход** схемы единственного деления для $A\vec{x} = \vec{b}$: $\vec{x} = U^{-1}\vec{b}^{(n)}$**).**

Если $\det A \neq 0$ и известно разложение $(L^{(n)}P_{n,i_n})\ldots(L^{(2)}P_{2,i_2})(L^{(1)}P_{1,i_1})A = U = (u_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ – треугольная матрица ($\forall\ u_{i,i} = 1$),

то

1. вектор $\vec{b}^{(n)} = (L^{(n)}P_{n,i_n})\ldots(L^{(2)}P_{2,i_2})(L^{(1)}P_{1,i_1})\vec{b}$ вычисляется за $\approx n^2$ операций,
2. системы $A\vec{x} = \vec{b}$ и $U\vec{x} = \vec{b}^{(n)}$ эквивалентны,
3. решение $\vec{x} = U^{-1}\vec{b}^{(n)}$ вычисляется за $\approx n^2$ операций;

итого: решение $\vec{x} = U^{-1}\vec{b}^{(n)}$ вычисляется за $\approx 2n^2$ операций.

Доказательство – упражнение для студентов.

Замечания.

1. Выбор главного элемента в схеме единственного деления можно делать по строке:

$$L^{(n)}...L^{(1)}AP_{1,j_1}...P_{n,j_n}=U, \quad \vec{x}=(P_{1,j_1}...P_{n,j_n})^T[U^{-1}(L^{(n)}...L^{(1)}\vec{b})].$$

   Упражнение. Постройте формулы этого метода.

2. Выбор главного элемента в схеме единственного деления можно делать по всей матрице:

$$L^{(n)}P_{n,i_n}...L^{(1)}P_{1,i_1}AP_{1,j_1}...P_{n,j_n}=U,$$

$$\vec{x}=(P_{1,j_1}...P_{n,j_n})^T[U^{-1}(L^{(n)}P_{n,i_n}...L^{(1)}P_{1,i_1}\vec{b})].$$

   Упражнение. Постройте формулы этого метода.

3. **Ошибки округления** при вычислениях $\Rightarrow$ **разные методы – разные ответы**.

Тема 4.3. Методы Гаусса исключения неизвестных: метод прогонки решения систем с трехдиагональной матрицей.

Применим схему единственного деления для решения системы с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & 0 & c_n & a_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix},$$

где диагональные блоки a_i либо числа (**метод прогонки**),

либо квадратные матрицы порядка n_i (**метод матричной прогонки**),

и все ”главные миноры” не равны нулю.

1-й шаг.

Умножим 1-е уравнение на a_1^{-1}:

$$\begin{bmatrix} E_1 & \beta_1 & & & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & 0 & c_n & a_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = a_1^{-1} b_1, \quad z_1 = a_1^{-1} f_1.$$

2-й шаг. Исключим x_1 из 2-го уравнения:

$$\begin{bmatrix} E_1 & \beta_1 & & & 0 \\ 0 & a_2 - c_2\beta_1 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & 0 & c_n & a_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ f_2 - c_2 z_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix},$$

и разделим его на $a_2 - c_2\beta_1$:

$$\begin{bmatrix} E_1 & \beta_1 & & & & 0 \\ 0 & E_2 & \beta_2 & & & \\ & c_3 & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & & c_n & a_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \beta_2 &= (a_2 - c_2\beta_1)^{-1} b_2 \\ z_2 &= (a_2 - c_2\beta_1)^{-1}(f_2 - c_2 z_1) \end{aligned}$$

После n шагов:

$$\begin{bmatrix} E_1 & \beta_1 & & & 0 \\ 0 & E_2 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & E_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & & & 0 & E_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{l:l} \beta_1 = a_1^{-1} b_1 & z_1 = a_1^{-1} f \\ \beta_2 = (a_2 - c_2\beta_1)^{-1} b_2 & z_2 = (a_2 - c_2\beta_1)^{-1}(f_2 - c_2 z_1) \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \beta_k = (a_k - c_k\beta_{k-1})^{-1} b_k & z_k = (a_k - c_k\beta_{k-1})^{-1}(f_k - c_k z_{k-1}) \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ & z_n = (a_n - c_n\beta_{n-1})^{-1}(f_n - c_n z_{n-1}) \end{array}$$

Обратный ход: метода прогонки:

$$x_n = z_n$$

$$x_{n-1} = -\beta_{n-1} x_n + z_{n-1}$$

$$\ldots$$

$$x_i = -\beta_i x_{i+1} + z_i$$

$$\ldots$$

$$x_1 = -\beta_1 x_2 + z_1$$

Упражнение. Оцените объем арифметических операций метода прогонки.

Упражнение. Оцените объем арифметических операций метода матричной прогонки, если для обращения матриц применяется схема единственного деления метода Гаусса.

Тема 5. LU разложение матрицы.

Теорема. Если все главные миноры $\det A_k \neq 0$ матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$,

то $A = LU$, где L – нижняя треугольная матрица,

U – верхняя треугольная матрица.

Доказательство.

Если $$A \equiv \left[\begin{array}{c:c} A_k & A_{k,n-k} \\ \hdashline A_{n-k,k} & A_{n-k,n-k} \end{array}\right] \stackrel{?}{=} \left[\begin{array}{c:c} L_k & 0 \\ \hdashline L_{n-k,k} & L_{n-k,n-k} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} U_k & U_{k,n-k} \\ \hdashline 0 & U_{n-k,n-k} \end{array}\right] \equiv LU,$$

то $A_k = L_k U_k$.

Элементы $l_{1,1}$ и $u_{1,1}$ матриц L_1 и U_1 определяются из уравнения

$$A_1 \equiv a_{1,1} = l_{1,1} \cdot u_{1,1} \equiv L_1 U_1 \Rightarrow \forall\, l_{1,1} \neq 0 \;\; \exists\, u_{1,1} = a_{1,1} / l_{1,1} \text{ (1 деление).}$$

Предположим, что матрицы L_k и U_k вычислены: $A_k = L_k U_k$.

Заметим, что $\det A_k = \det L_k \cdot \det U_k \neq 0$, т.е. $\det L_k \neq 0$ и $\det U_k \neq 0$

$$\Rightarrow \exists\, L_k^{-1} \text{ и } U_k^{-1}.$$

Тогда для матриц

$$L_{k+1} = \left[\begin{array}{ccc:c} & L_k & & 0 \\ \hdashline l_{k+1,1} & \dots & l_{k+1,k} & l_{k+1,k+1} \end{array}\right] \text{ и } U_{k+1} = \left[\begin{array}{c:c} & u_{1,k+1} \\ U_k & \vdots \\ & u_{k,k+1} \\ \hdashline 0 & u_{k+1,k+1} \end{array}\right]$$

мы имеем уравнение $A_{k+1} = L_{k+1}U_{k+1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} & & & a_{1,k+1} \\ & A_k & & \vdots \\ & & & a_{k,k+1} \\ \hdashline a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} & L_k & & 0 \\ \hdashline l_{k+1,1} & \dots & l_{k+1,k} & l_{k+1,k+1} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} & u_{1,k+1} \\ U_k & \vdots \\ & u_{k,k+1} \\ \hdashline 0 & u_{k+1,k+1} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$

$$L_k \begin{pmatrix} u_{1,k+1} \\ \vdots \\ u_{k,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,k+1} \\ \vdots \\ a_{k,k+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{k+1,1} & \dots & l_{k+1,k} \end{pmatrix} U_k = \begin{pmatrix} a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} \end{pmatrix},$$

$$l_{k+1,k+1} \cdot u_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - \sum_{m=1}^{k} l_{k+1,m} \cdot u_{m,k+1}.$$

Решим уравнения:

$$L_k \begin{pmatrix} u_{1,k+1} \\ \vdots \\ u_{k,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,k+1} \\ \vdots \\ a_{k,k+1} \end{pmatrix}, \ (U_k)^T \begin{pmatrix} l_{k+1,1} \\ \vdots \\ l_{k+1,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1,1} \\ \vdots \\ a_{k+1,k} \end{pmatrix},$$

затратив $2k^2$ арифметических операций.

Вычислим $c_{k+1} = a_{k+1,k+1} - \sum_{m=1}^{k} l_{k+1,m} \cdot u_{m,k+1}$ ($2k$ операций),

определим числа $l_{k+1,k+1}$ и $u_{k+1,k+1}$ из уравнения $l_{k+1,k+1}u_{k+1,k+1} = c_{k+1}$:

$$\forall\ l_{k+1,k+1} \neq 0 \Rightarrow u_{k+1,k+1} = c_{k+1} / l_{k+1,k+1} \text{ (1 деление).}$$

Для вычисления последних столбца матрицы U_{k+1} и строки матрицы L_{k+1} достаточно выполнить $2k^2 + 2k + 1$ арифметических операций.

Итак, элементы треугольных матриц L и U из разложения $A = LU$ вычисляются по формулам:

- $\forall\ l_{1,1}$ и $u_{1,1}$ такие, что $l_{1,1} \cdot u_{1,1} = a_{1,1} \neq 0$;
- **для** $k = 2, ..., n$ **цикл**

$$\begin{pmatrix} u_{1,k} \\ \vdots \\ u_{k-1,k} \end{pmatrix} = (L_{k-1})^{-1} \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{k-1,k} \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} l_{k,1} \\ \vdots \\ l_{k,k-1} \end{pmatrix} = (U_{k-1})^{-T} \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ \vdots \\ a_{k,k} \end{pmatrix};$$

$\forall\ l_{k,k}$ и $u_{k,k}$ такие, что $l_{k,k} \cdot u_{k,k} = c_k \equiv a_{k,k} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{k,m} \cdot u_{m,k} \neq 0$.

Итого: $\sum_{k=1}^{n}[2(k-1)^2+2(k-1)+1]=2\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}+2\dfrac{(n-1)n}{2}+n\approx$

$\approx\dfrac{2}{3}n^3$ арифметических операций для вычисления $A=LU$;

– диагональные элементы $l_{k,k}$ и $u_{k,k}$ определяются с точностью до уравнения $l_{k,k}\cdot u_{k,k}=c_k\equiv\det A_k/\det A_{k-1}\neq 0$ (где $\det A_0=1$);

– **разные** задания $l_{k,k}$ и $u_{k,k}\Rightarrow$ **разные** LU разложения.

Заметим, что при вычислении элементов матриц L и U используются операции умножения и сложения и операции деления на числа $l_{k,k}$ и $u_{k,k}$. Если эти числа «**малы**», то деление на них – «**плохая**» операция:

1) нельзя делить на 0 – «**нет ответа**»,

2) деление на число $\approx 0\Rightarrow$ «**рост ошибок**» округления.

Следствие. Если $\forall\ \det A_k \neq 0$ матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$,

то $\exists!\ \ A = LDU$, где L – нижняя треугольная матрица: $\forall\ l_{k,k} = 1$,

$D = diag\{d_1, d_2, ..., d_n\}$,

U – верхняя треугольная матрица: $\forall\ u_{k,k} = 1$;

$$\det A_k = d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_k \quad \forall\ k.$$

Доказательство.

Из теоремы о LU разложении $\exists\ A = LU : l_{k,k} \neq 0,\ \ u_{k,k} \neq 0\ \ \forall\ k$.

Зададим $\begin{cases} D_L = diag\{l_{1,1}, ..., l_{nn}\} \\ D_U = diag\{u_{1,1}, ..., u_{nn}\} \end{cases} \Rightarrow A = (L \cdot D_L^{-1}) \cdot (D_L \cdot D_U) \cdot (D_U^{-1} \cdot U)$

$\Rightarrow$ искомые матрицы: $\begin{cases} L := L \cdot D_L^{-1} \\ D := D_L \cdot D_U \\ U := D_U^{-1} \cdot U \end{cases}$

Применим это следствие для самосопряженной матрицы $A = A^*$.

Утверждение. Если $A \equiv (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} = A^* \equiv (\overline{a}_{j,i})_{i,j=1}^{n}$ и $\forall \det A_k \neq 0$,

то $\exists!\ A = LDL^*$, где L – нижняя треугольная матрица: $\forall\ l_{k,k} = 1$,

$D = diag\{d_1, d_2, ..., d_n\}$: $d_k = \operatorname{Re} d_k \quad \forall\ k$;

$\det A_k = d_1 \cdot ... \cdot d_k \quad \forall\ k$.

Доказательство.

Из следствия имеем: $\exists!\ A = LDU \Rightarrow$

$$LDU = A = A^* = (LDU)^* = U^* D^* L^* \Rightarrow \begin{cases} L = U^* \\ D = D^* \Rightarrow d_k = \overline{d}_k = \operatorname{Re} d_k. \\ U = L^* \end{cases}$$

Пусть $A = A^*$ и $\forall \det A_k > 0 \Rightarrow \forall\ d_k > 0 \Rightarrow \exists\ D^{1/2} = diag\{\sqrt{d_1}, ..., \sqrt{d_n}\}$

$\Rightarrow A = LDL^* = (LD^{1/2})(D^{1/2}L^*)$ – **метод квадратного корня**.

Тема 5.1. Метод квадратного корня.

Теорема (формулы метода квадратного корня)**. Если** $A = A^*$ и $\forall \det A_k > 0$, **то** $A = LL^*$, где $L = (l_{k,m})_{k,m=1}^{n}$: $\quad l_{k,m} = 0 \ \forall\ m > k$ и

$$k = 2, \ldots, n-1$$

$$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}};$$

$$\begin{cases} l_{2,1} = a_{2,1} / l_{1,1}; \\ l_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - |l_{2,1}|^2}; \end{cases} \quad \begin{cases} l_{k+1,1} = a_{k+1,1} / l_{1,1} \\ l_{k+1,2} = (a_{k+1,2} - \overline{l}_{2,1} l_{k+1,1}) / l_{2,2} \\ \qquad \vdots \\ l_{k+1,k} = (a_{k+1,k} - \overline{l}_{k,1} l_{k+1,1} - \ldots - \overline{l}_{k,k-1} l_{k+1,k-1}) / l_{k,k}; \\ l_{k+1,k+1} = \sqrt{a_{k+1,k+1} - \sum_{m=1}^{k} |l_{k+1,m}|^2}; \end{cases}$$

$$\ldots$$

Доказательство. Т.к. $A_1 = L_1 L_1^*$, то элемент $l_{1,1}$ матрицы L_1 определяется из уравнения $A_1 \equiv a_{1,1} = l_{1,1} \cdot l_{1,1} \Rightarrow l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$.

Предположим, что матрица L_k вычислена: $A_k = L_k L_k^*$.

Тогда из уравнения $A_{k+1} = L_{k+1} L_{k+1}^*$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1,k+1} \\ & A_k & & \vdots \\ & & & a_{k,k+1} \\ \hline a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & L_k & & 0 \\ \hline l_{k+1,1} & \dots & l_{k+1,k} & l_{k+1,k+1} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} & \bar{l}_{k+1,1} \\ L_k^* & \vdots \\ & \bar{l}_{k+1,k} \\ \hline 0 & l_{k+1,k+1} \end{array}\right]$$

1) $$L_k \begin{pmatrix} \bar{l}_{k+1,1} \\ \vdots \\ \bar{l}_{k+1,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,k+1} \\ \vdots \\ a_{k,k+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{l}_{k+1,1} = a_{1,k+1} / l_{1,1} \\ \bar{l}_{k+1,2} = (a_{2,k+1} - l_{2,1}\bar{l}_{k+1,1}) / l_{2,2} \\ \dots \\ \bar{l}_{k+1,k} = (a_{k,k+1} - l_{k,1}\bar{l}_{k+1,1} - \dots - l_{k,k-1}\bar{l}_{k+1,k-1}) / l_{k,k} \end{cases}$$

2) $$(l_{k+1,k+1})^2 = a_{k+1,k+1} - \sum_{m=1}^{k} l_{k+1,m} \cdot \bar{l}_{k+1,m} \equiv c_{k+1} \Rightarrow l_{k+1,k+1} = \sqrt{c_{k+1}}.$$

Теорема (обусловленность метода квадратного корня)**.**

Если $A = A^* = LL^*$ (det $A > 0$, т.е. $0 \notin Sp(A)$),

то $Cond_2 A = Cond_2 L \cdot Cond_2 L^*$.

Док-во.

$$\begin{cases} A = A^* = LL^* \\ A\vec{x} = LL^*\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \\ (L^*L)\underbrace{L^*\vec{x}}_{\vec{y}} = \lambda \cdot \underbrace{L^*\vec{x}}_{\vec{y}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A\vec{x},\vec{x})_2 = (L^*\vec{x}, L^*\vec{x})_2 > 0 \quad \forall\ \vec{x} \neq 0 \\ \lambda = (A\vec{x},\vec{x})_2 \,/\, (\vec{x},\vec{x})_2 > 0 \\ \lambda = ((L^*L)\vec{y},\ \vec{y})_2 \,/\, (\vec{y},\ \vec{y})_2 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} Sp(A) = Sp(LL^*) = Sp(L^*L) \subseteq [0 < \lambda_{\min}(A),\ \lambda_{\max}(A)] \\ Sp(A^{-1}) = Sp((LL^*)^{-1}) = Sp((L^*L)^{-1}) \subseteq [0 < \lambda_{\max}^{-1}(A),\ \lambda_{\min}^{-1}(A)] \end{cases}.$$

Напомним:

$$\begin{cases} Cond_2 A \equiv \| A \|_2 \cdot \| A^{-1} \|_2 \quad \forall\ A : \det A \neq 0; \\ \| A \|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)} \equiv \sqrt{\lambda_{\max}(A^* A)}; \\ \| A^{-1} \|_2 = \sqrt{\rho((A^{-1})^* A^{-1})} \equiv \sqrt{\lambda_{\max}((AA^*)^{-1}))} = \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}((AA^*)^{-1}))}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Cond_2 A = \sqrt{\rho(A^2)} \cdot \sqrt{\rho(A^{-2})} \qquad = \lambda_{\max}(A) \cdot \lambda_{\min}^{-1}(A) \\ Cond_2 L = \sqrt{\rho(L^* L)} \cdot \sqrt{\rho((LL^*)^{-1})} = \sqrt{\lambda_{\max}(A)} \cdot \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(A)} \\ Cond_2 L^* = \sqrt{\rho(LL^*)} \cdot \sqrt{\rho((L^* L)^{-1})} = \sqrt{\lambda_{\max}(A)} \cdot \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(A)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $Cond_2 A = Cond_2 L \cdot Cond_2 L^*$, что и требовалось доказать.

Теорема (ошибки округления в методе квадратного корня)**.**

Если $A = A^* = LL^*$ ($\det A > 0$), γ – машинная точность и

$$\left.\begin{array}{l} A\vec{x} = \vec{b} \;\; \Leftrightarrow \begin{cases} L\vec{y} = \vec{b} \\ L^*\vec{x} = \vec{y} \end{cases} \\ A(\vec{x} + \delta(\vec{x})) = \vec{b} + \delta(\vec{b}) \end{array}\right\} \to \begin{cases} L(\underbrace{\vec{y} + \delta(\vec{y})}_{\tilde{\vec{y}}}) = \vec{b} + \delta(\vec{b}): \; \dfrac{\|\delta(\vec{b})\|_2}{\|\vec{b}\|_2} \le \gamma \\ L^*(\vec{x} + \delta(\tilde{\vec{x}}_{LL^*})) = \underbrace{\vec{y} + \delta(\vec{y})}_{\tilde{\vec{y}}} + \delta(\tilde{\vec{y}}): \; \dfrac{\|\delta(\tilde{\vec{y}})\|_2}{\|\vec{y}\|_2} \le \gamma \end{cases}$$

то $$\begin{cases} 1) \quad \dfrac{\|\delta(\vec{x})\|_2}{\|\vec{x}\|_2} \le Cond_2 A \cdot \dfrac{\|\delta(\vec{b})\|_2}{\|\vec{b}\|_2} \le Cond_2 A \cdot \gamma \\ 2) \quad \dfrac{\|\delta(\tilde{\vec{x}}_{LL^*})\|_2}{\|\vec{x}\|_2} \le Cond_2 A \cdot 2\gamma \end{cases}$$

Док-во. Мы знаем: 1) $\dfrac{\|\delta(\vec{x})\|_2}{\|\vec{x}\|_2} \le Cond_2 A \cdot \dfrac{\|\delta(\vec{b})\|_2}{\|\vec{b}\|_2} \le Cond_2 A \cdot \gamma \quad \forall\ A.$

Тогда 2):

$$L(\vec{y}+\delta(\vec{y})) = \vec{b}+\delta(\vec{b}) \;\Rightarrow\; \frac{\|\delta(\vec{y})\|_2}{\|\vec{y}\|_2} \le Cond_2 L \cdot \frac{\|\delta(\vec{b})\|_2}{\|\vec{b}\|_2} \le Cond_2 L \cdot \gamma;$$

$$L^*(\vec{x}+\delta(\tilde{\vec{x}}_{LL^*})) = \underbrace{\vec{y}+\delta(\vec{y})}_{\tilde{\vec{y}}} + \delta(\tilde{\vec{y}}) : \;\frac{\|\delta(\tilde{\vec{y}})\|_2}{\|\vec{y}\|_2} \le \gamma \Rightarrow$$

$$\frac{\|\delta(\tilde{\vec{x}}_{LL^*})\|_2}{\|\vec{x}\|_2} \le Cond_2 L^* \cdot \frac{\|\delta(\vec{y})+\delta(\tilde{\vec{y}})\|_2}{\|\vec{y}\|_2} \le$$

$$\Rightarrow \qquad \le Cond_2 L^* \cdot \left(\frac{\|\delta(\vec{y})\|_2}{\|\vec{y}\|_2} + \frac{\|\delta(\tilde{\vec{y}})\|_2}{\|\vec{y}\|_2}\right) \le$$

$$\le Cond_2 L^* \cdot (Cond_2 L \cdot \gamma + \gamma) \le 2 \cdot Cond_2 A \cdot \gamma$$

Тема 5.2. Положительно определенные матрицы. Критерий Сильвестра. Лемма Гершгорина.

Определение. $A = A^* > 0$ – положительно определенная матрица, если

$$(A\vec{x}, \vec{x})_2 > 0 \quad \forall\ \vec{x} \in C^n,\ \vec{x} \neq 0.$$

Теорема (оценка квадратичной формы $(A\vec{x}, \vec{x})_2$)**.**

Если $A = A^*$ и $\forall\ \lambda(A) > 0$,

то $(A\vec{x}, \vec{x})_2 \geq \lambda_{\min}(A) \cdot (\vec{x}, \vec{x})_2 \quad \forall\ \vec{x} \in C^n,\ \vec{x} \neq 0$**.**

Доказательство – **упражнение** для студентов.

Теорема. $A = A^* > 0 \Leftrightarrow A = A^*,\ \forall \det A_k > 0$.

Доказательство. 1) $A = A^* > 0 \Rightarrow A_k = A_k^* > 0 \Rightarrow \det A_k > 0$.

2) $\forall \det A_k > 0 \Rightarrow A = LL^* \Rightarrow (A\vec{x}, \vec{x})_2 = (L^*\vec{x}, L^*\vec{x})_2 > 0 \quad \forall\ \vec{x} \neq 0$

– **упражнение** для студентов.

Следствие (критерий Сильвестра положительности собственных чисел самосопряженной матрицы)**.**

Если $A = A^*$ и $\forall \det A_k > 0$, **то** $\forall\ \lambda(A) > 0.$

Доказательство – **упражнение** для студентов.

Лемма Гершгорина.

$$\forall\ \lambda(A) \in \bigcup_{k=1}^{n} S_k : \begin{cases} S_k = \{z \in C : |\, z - a_{k,k} \,| \le R_k\}, \\ R_k \equiv |\, a_{k,1} \,| + \ldots + |\, a_{k,k-1} \,| + |\, a_{k,k+1} \,| + \ldots + |\, a_{k,n} \,| \end{cases}$$

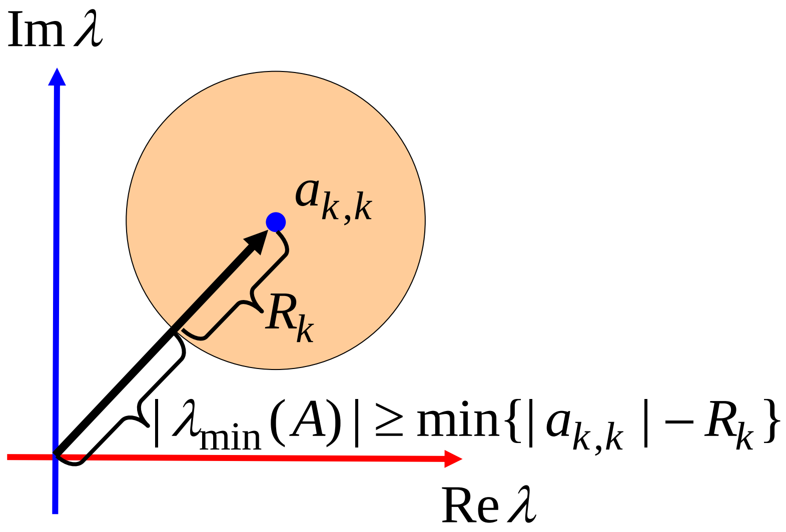
Доказательство. Если $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ & $0 \ne |\, x_k \,| \ge |\, x_j \,|\ \ \forall\ j$, то

$$(a_{k,k} - \lambda)x_k = -a_{k,1}x_1 - \ldots - a_{k,k-1}x_{k-1} - a_{k,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{k,n}x_n$$

$\Rightarrow$

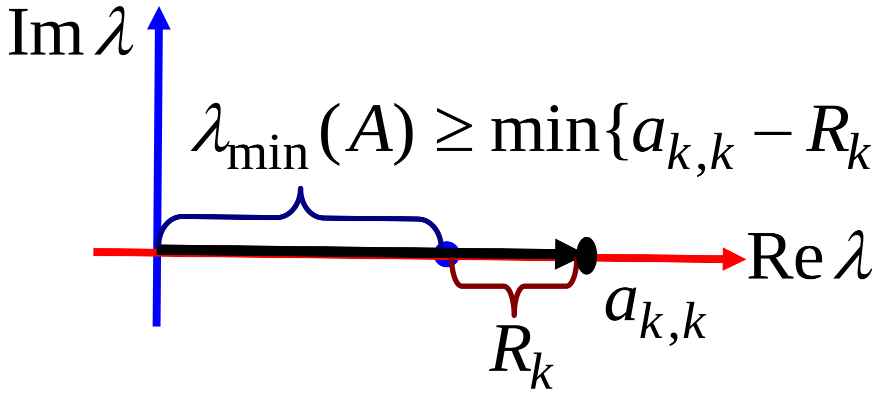
$$|\, a_{k,k} - \lambda \,| \le |\, a_{k,1} \,| \frac{|\, x_1 \,|}{|\, x_k \,|} + \ldots + |\, a_{k,k-1} \,| \frac{|\, x_{k-1} \,|}{|\, x_k \,|} + |\, a_{k,k+1} \,| \frac{|\, x_{k+1} \,|}{|\, x_k \,|} + \ldots + |\, a_{k,n} \,| \frac{|\, x_n \,|}{|\, x_k \,|} \le$$

$$\le |\, a_{k,1} \,| + \ldots + |\, a_{k,k-1} \,| + |\, a_{k,k+1} \,| + \ldots + |\, a_{k,n} \,| \equiv R_k.$$



Следствие. Если матрица $A = A^*$, $\forall\ a_{k,k} > 0$, со строгим диагональным преобладанием по строкам: $a_{k,k} > R_k$, то

$$\lambda_{\min}(A) \geq \min_{1 \leq k \leq n} \{a_{k,k} - R_k\} > 0:$$



Тема 6. Разложение матрицы на произведение ортогональной и верхней треугольной матриц. Метод вращений.

Теорема (обусловленность разложения $A = QR$).

Если $A = QR$ $(\det A \neq 0)$: Q – ортогональная (унитарная) матрица,

R – верхняя треугольная матрица,

то $\begin{cases} 1) \quad Cond_2\, Q = 1, \\ 2) \quad Cond_2\, R = Cond_2\, A, \end{cases} \Rightarrow Cond_2\, A = Cond_2\, Q \cdot Cond_2\, R.$

Доказательство – упражнение для студентов.

Следствие.

Если $A = QR$ $(\det A \neq 0)$: Q – ортогональная (унитарная) матрица,

R – верхняя треугольная матрица,

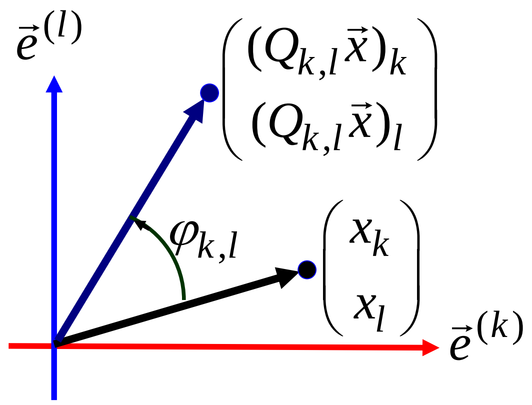
то обусловленности систем $A\vec{x} = \vec{b}$ и $\begin{cases} Q\vec{y} = \vec{b}, \\ R\vec{x} = \vec{y} \end{cases}$ одинаковые.

Элементарная матрица вращения

$$Q_{k,l} = \left[\begin{array}{c|ccc|c} E_{k-1} & & 0 & & 0 \\ \hline & \bar{c}_{k,l} & 0 & -\bar{s}_{k,l} & \\ 0 & 0 & E_{l-k-1} & 0 & 0 \\ & s_{k,l} & 0 & c_{k,l} & \\ \hline 0 & & 0 & & E_{n-l} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ - k - \textit{я строка} \\ \\ - l - \textit{я строка} \\ \\ \end{array}$$

$$c_{k,l} \cdot \bar{c}_{k,l} + s_{k,l} \cdot \bar{s}_{k,l} = 1$$

Пример в R^n:



$$\begin{pmatrix} (Q_{k,l}\vec{x})_k \\ (Q_{k,l}\vec{x})_l \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_{k,l}) & -\sin(\varphi_{k,l}) \\ \sin(\varphi_{k,l}) & \cos(\varphi_{k,l}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (\vec{x})_k \\ (\vec{x})_l \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_{k,l} = c_{k,l} = \cos(\varphi_{k,l})$$

$$\bar{s}_{k,l} = s_{k,l} = \sin(\varphi_{k,l})$$

Упражнения.

1. Проверить равенства:

$$Q_{k,l}\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ \hdashline (Q_{k,l}\vec{x})_k \\ \hdashline x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{l-1} \\ \hdashline (Q_{k,l}\vec{x})_l \\ \hdashline x_{l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} (Q_{k,l}\vec{x})_k \\ (Q_{k,l}\vec{x})_l \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{k,l} & -\bar{s}_{k,l} \\ s_{k,l} & c_{k,l} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_l \end{pmatrix} = \\ \qquad = \begin{pmatrix} \bar{c}_{k,l} \cdot x_k - \bar{s}_{k,l} \cdot x_l \\ s_{k,l} \cdot x_k + c_{k,l} \cdot x_l \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. **Доказать**, что $Q_{k,l}$ – унитарная матрица:

$$Q_{k,l}(Q_{k,l})^* = (Q_{k,l})^* Q_{k,l} = E \;\Rightarrow\; (Q_{k,l})^{-1} = (Q_{k,l})^*,$$

$$Cond_2\, Q = Cond_2\, Q^* = 1.$$

3. **Доказать**, что $\det Q_{k,l} = 1$.

4. Определить для вектора $\vec{a}_{\bullet,k} \equiv \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix}$ матрицу $Q_{k,l}$:

$$(Q_{k,l}\vec{a}_{\bullet,k})_l \equiv s_{k,l} \cdot a_{k,k} + c_{k,l} \cdot a_{l,k} = 0.$$

Ответ: $s_{k,l} \cdot \underbrace{\dfrac{a_{k,k}}{\sqrt{|a_{k,k}|^2 + |a_{l,k}|^2}}}_{c_{k,l}} + c_{k,l} \cdot \underbrace{\dfrac{a_{l,k}}{\sqrt{|a_{k,k}|^2 + |a_{l,k}|^2}}}_{-s_{k,l}} = 0.$

Построение разложения $A = QR$ умножением A на элементарные матрицы вращения.

Теорема ($Q^* A = R$).

$$\forall\ A\ \exists\ Q^*:\ \ Q^* A = R,\ Q^* = \underbrace{Q_{n-1,n}}_{Q_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{Q_{2,n} \cdot \ldots \cdot Q_{2,3}}_{Q_2} \cdot \underbrace{Q_{1,n} \cdot \ldots \cdot Q_{1,2}}_{Q_1},$$

где $Q_{k,l}$ – элементарные матрицы вращений.

Доказательство. Построим эти матрицы.

1-й шаг: строим $Q_{1,2}$, $A^{(1,2)} = Q_{1,2}A$; …; $Q_{1,n}$, $A^{(1,n)} = Q_{1,n}A^{(1,n-1)} \equiv A^{(1)}$:

$$Q_{1,n}\cdot\ldots\cdot Q_{1,2}\cdot\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:ccc} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \dots & a_{1,n}^{(1)} \\ \hdashline 0 & a_{2,2}^{(1)} & \dots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & \dots & a_{n,n}^{(1)} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_{1,2} & -\bar{s}_{1,2} \\ s_{1,2} & c_{1,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{r^{1,2}}\begin{bmatrix} \bar{a}_{1,1} & \bar{a}_{2,1} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix},\ r^{1,2} = \sqrt{|a_{1,1}|^2 + |a_{2,1}|^2};\quad ...$$

$$\ldots;\quad \begin{bmatrix} \bar{c}_{1,n} & -\bar{s}_{1,n} \\ s_{1,n} & c_{1,n} \end{bmatrix} = \frac{1}{r^{1,n}}\begin{bmatrix} \bar{a}_{1,1}^{(1,n-1)} & \bar{a}_{n,1}^{(1,n-1)} \\ -a_{n,1}^{(1,n-1)} & a_{1,1}^{(1,n-1)} \end{bmatrix},\ r^{1,n} = \sqrt{|a_{1,1}^{(n-1)}|^2 + |a_{n,1}|^2}$$

2**-й шаг:** строим

$$Q_{2,3},\ A^{(2,3)} = Q_{2,3}A^{(1)};\ \ldots;\ Q_{2,n},\ A^{(2,n)} = Q_{2,n}A^{(2,n-1)} \equiv A^{(2)}:$$

$$Q_{2,n}\cdot\ldots\cdot Q_{2,3}\cdot\left[\begin{array}{c|cccc} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \ldots & a_{1,n}^{(1)} \\ \hline 0 & a_{2,2}^{(1)} & \ldots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & \ldots & a_{n,n}^{(1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|ccc} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & \ldots & a_{1,n}^{(1)} \\ \hline 0 & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & \ldots & a_{2,n}^{(2)} \\ \hline 0 & 0 & a_{3,3}^{(2)} & \ldots & a_{3,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(2)} & \ldots & a_{n,n}^{(2)} \end{array}\right]$$

Упражнение. Проверить формулы:

$$\begin{bmatrix} \overline{c}_{2,l} & -\overline{s}_{2,l} \\ s_{2,l} & c_{2,l} \end{bmatrix} = \frac{1}{r^{2,l}}\begin{bmatrix} \overline{a}_{2,2}^{(2,l-1)} & \overline{a}_{l,2}^{(2,l-1)} \\ -a_{l,2}^{(2,l-1)} & a_{2,2}^{(2,l-1)} \end{bmatrix},\ \ r^{2,l} = \sqrt{|\,a_{2,2}^{(2,l-1)}\,|^2 + |\,a_{l,2}^{(2,l-1)}\,|^2}$$

$$l = 3,\ \ldots,\ n.$$

k **-й шаг:** после $k-1$ шага имеем $A^{(k-1)} = \left[\begin{array}{c|ccc} R_{k-1} & & R_{k-1,n-k+1} & \\ \hline & a_{k,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k,n}^{(k-1)} \\ 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ & a_{n,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{n,n}^{(k-1)} \end{array}\right].$

Строим матрицы вращений $Q_{k,k+1}, \ldots, Q_{k,n}$**:**

$$Q_{k,k+1} \ldots Q_{k,n} A^{(k-1)} = \left[\begin{array}{c|c:ccc} R_{k-1} & & & R_{k-1,n-k+1} & \\ \hline & a_{k,k}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ \hdashline & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ 0 & \vdots & & \cdots & \vdots \\ & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(k)} \end{array}\right].$$

Упражнение. Построить формулы для решения $A\vec{x}=\vec{b}$, если $Q^*A=R$ и $\det A\neq 0$.

Теорема (ошибки округления в методе вращений).

Если $A=QR$ ($\det A\neq 0$), γ – машинная точность и

$$\left.\begin{aligned} A\vec{x}=\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad &\begin{cases} Q\vec{y}=\vec{b} \\ R\vec{x}=\vec{y} \end{cases} \\ A(\vec{x}+\delta(\vec{x}))=\vec{b}&+\delta(\vec{b}) \end{aligned}\right\} \to \begin{cases} Q(\underbrace{\vec{y}+\delta(\vec{y})}_{\tilde{\vec{y}}})=\vec{b}+\delta(\vec{b}):\ \dfrac{\|\delta(\vec{b})\|_2}{\|\vec{b}\|_2}\leq\gamma \\ R(\vec{x}+\delta(\tilde{\vec{x}}_{QR}))=\underbrace{\vec{y}+\delta(\vec{y})}_{\tilde{\vec{y}}}+\delta(\tilde{\vec{y}}):\ \dfrac{\|\delta(\tilde{\vec{y}})\|_2}{\|\vec{y}\|_2}\leq\gamma \end{cases}$$

то
$$\begin{cases} 1)\quad \dfrac{\|\delta(\vec{x})\|_2}{\|\vec{x}\|_2}\leq Cond_2 A\cdot\dfrac{\|\delta(\vec{b})\|_2}{\|\vec{b}\|_2}\leq Cond_2 A\cdot\gamma \\ 2)\quad \dfrac{\|\delta(\tilde{\vec{x}}_{QR})\|_2}{\|\vec{x}\|_2}\leq Cond_2 A\cdot 2\gamma \end{cases}$$

Тема 6.1. Разложение матрицы на произведение ортогональных и двухдиагональной матриц.

Теорема ($Q^* A T^* = R$).

$$\forall\ A\ \exists\ Q^*, T^* :\ Q^* A T^* = R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & & & 0 \\ & r_{2,2} & r_{2,3} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 & r_{n,n} \end{bmatrix},$$

$$Q^* = (Q_{n-1,n}) \cdot \ldots \cdot (Q_{2,n} \cdot \ldots \cdot Q_{2,3}) \cdot (Q_{1,n} \cdot \ldots \cdot Q_{1,2}) \ ,$$

$$T^* = (T_{2,3} \cdot \ldots \cdot T_{2,n}) \cdot (T_{3,4} \cdot \ldots \cdot T_{3,n}) \cdot \ldots \cdot (T_{n-1,n}) \ ,$$

где $Q_{k,l}$ и $T_{k,l}$ – элементарные матрицы вращений.

Доказательство. Построим эти матрицы.

1-й шаг: строим $A^{(1,2)} = Q_{1,2}A; \quad \ldots; \quad A^{(1,n)} = Q_{1,n}A^{(1,n-1)} \equiv A^{(Q_1)}$:

$$Q_{1,n} \cdot \ldots \cdot Q_{1,2} \cdot \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cccc} a_{1,1}^{(Q_1)} & a_{1,2}^{(Q_1)} & a_{1,3}^{(Q_1)} & \ldots & a_{1,n}^{(Q_1)} \\ \hline 0 & a_{2,2}^{(Q_1)} & a_{2,3}^{(Q_1)} & \ldots & a_{2,n}^{(Q_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(Q_1)} & a_{n,3}^{(Q_1)} & \ldots & a_{n,n}^{(Q_1)} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} \overline{c}_{1,2} & -\overline{s}_{1,2} \\ s_{1,2} & c_{1,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{r^{1,2}} \begin{bmatrix} \overline{a}_{1,1} & \overline{a}_{2,1} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix}, \; r^{1,2} = \sqrt{|\, a_{1,1}\,|^2 + |\, a_{2,1}\,|^2}; \quad \ldots$$

$$\ldots; \quad \begin{bmatrix} \overline{c}_{1,n} & -\overline{s}_{1,n} \\ s_{1,n} & c_{1,n} \end{bmatrix} = \frac{1}{r^{1,n}} \begin{bmatrix} \overline{a}_{1,1}^{(1,n-1)} & \overline{a}_{n,1}^{(1,n-1)} \\ -a_{n,1}^{(1,n-1)} & a_{1,1}^{(1,n-1)} \end{bmatrix}, \; r^{1,n} = \sqrt{|\, a_{1,1}^{(n-1)}\,|^2 + |\, a_{n,1}\,|^2}$$

Теперь строим $A^{(Q_1;2,3)} = A^{(Q_1)}T_{2,3};\ \ \ldots,\ \ A^{(Q_1;2,n)} = A^{(Q_1;2,n-1)}T_{2,n} \equiv A^{(1)}$:

$$\left[\begin{array}{c:cccc} a_{1,1}^{(Q_1)} & a_{1,2}^{(Q_1)} & a_{1,3}^{(Q_1)} & \ldots & a_{1,n}^{(Q_1)} \\ \hdashline 0 & a_{2,2}^{(Q_1)} & a_{2,3}^{(Q_1)} & \ldots & a_{2,n}^{(Q_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(Q_1)} & a_{n,3}^{(Q_1)} & \ldots & a_{n,n}^{(Q_1)} \end{array}\right] T_{2,3}\cdot\ldots\cdot T_{2,n} \equiv \left[\begin{array}{c|cccc} a_{1,1}^{(Q_1)} & a_{1,2}^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & a_{2,2}^{(1)} & a_{2,3}^{(1)} & \ldots & a_{2,2}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & a_{n,3}^{(1)} & \ldots & a_{n,n}^{(1)} \end{array}\right]$$

Элементы матрицы $T_{2,l}$, $l > 2$:

$$\begin{bmatrix} a_{1,2}^{(Q_1;2,l-1)} & a_{1,l}^{(Q_1;2,l-1)} \\ a_{l,2}^{(Q_1;2,l-1)} & a_{l,l}^{(Q_1;2,l-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{c}_{2,l} & -\overline{s}_{2,l} \\ s_{2,l} & c_{2,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,2}^{(Q_1;2,l)} & a_{1,l}^{(Q_1;2,l)} = 0 \\ a_{l,2}^{(Q_1;2,l)} & a_{l,l}^{(Q_1;2,l)} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} a_{1,2}^{(Q_1;2,l-1)}(-\overline{s}_{2,l}) + a_{1,l}^{(Q_1;2,l-1)}c_{2,l} = 0 \\ r_{2,l} = \sqrt{|\,a_{1,2}^{(Q_1;2,l-1)}\,|^2 + |\,a_{1,l}^{(Q_1;2,l-1)}\,|^2} \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_{2,l} = a_{1,2}^{(Q_1;2,l-1)} \,/\, r_{2,l} \\ \overline{s}_{2,l} = a_{1,l}^{(Q_1;2,l-1)} \,/\, r_{2,l} \end{cases}$$

2-й шаг: строим $A^{(2,3)} = Q_{2,3}A^{(1)};\ \ldots;\ A^{(2,n)} = Q_{2,n}A^{(2,n-1)} \equiv A^{(Q_2)}$:

$$Q_{2,n}\cdot\ldots\cdot Q_{2,3}\cdot\left[\begin{array}{c|cccc} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & a_{2,2}^{(1)} & a_{2,3}^{(1)} & \ldots & a_{2,2}^{(1)} \\ 0 & a_{3,2}^{(1)} & a_{3,3}^{(1)} & \ldots & a_{3,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & a_{n,3}^{(1)} & \ldots & a_{n,n}^{(1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c:ccc} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & a_{2,2}^{(Q_2)} & a_{2,3}^{(Q_2)} & \ldots & a_{2,n}^{(Q_2)} \\ \hdashline 0 & 0 & a_{3,3}^{(Q_2)} & \ldots & a_{3,n}^{(Q_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(Q_2)} & \ldots & a_{n,n}^{(Q_2)} \end{array}\right]$$

Упражнение. Построить формулы матриц $Q_{2,3}$, ..., $Q_{2,n}$.

Далее, последовательно, обнуляем элементы 2-й строки матрицы $A^{(Q_2)}$, начиная с 4-го, умножением на элементарные матрицы вращения $T_{3,4}$, $T_{3,5}$, …, $T_{3,n}$: $A^{(2)} \equiv \{[(A^{(Q_2)} \cdot T_{3,4}) \cdot T_{3,5}] \cdot ... \cdot T_{3,n}\}$:

получим

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{cc|cccc} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2}^{(Q_2)} & a_{2,3}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{3,3}^{(2)} & a_{3,4}^{(2)} & \dots & a_{3,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(2)} & a_{n,4}^{(2)} & \dots & a_{n,n}^{(2)} \end{array}\right]$$

Упражнение. Построить формулы матриц $T_{3,4}$, $T_{3,5}$, …, $T_{3,n}$.

k **-й шаг:** после $k-1$ шага имеем $A^{(k-1)} = \left[\begin{array}{c|ccc} R_{k-1} & & R_{k-1,n-k+1} & \\ \hline & a_{k,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k,n}^{(k-1)} \\ 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ & a_{n,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{n,n}^{(k-1)} \end{array}\right] \equiv$

$$A^{(k-1)} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} a_{1,1}^{(k-1)} & a_{1,2}^{(k-1)} & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & 0 & a_{k,k}^{(k-1)} & a_{k,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{k,n}^{(k-1)} \\ & & 0 & a_{k+1,k}^{(k-1)} & a_{k+1,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k-1)} \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & a_{n,k}^{(k-1)} & a_{n,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{n,n}^{(k-1)} \end{array}\right].$$

Строим матрицы вращений $Q_{k,k+1}$, ..., $Q_{k,n}$ и $T_{k+1,k+2}$, ..., $T_{k+1,n}$:

$$A^{(k)} \equiv Q_{k,k+1} \dots Q_{k,n} A^{(k-1)} T_{k+1,k+2}, \dots, T_{k+1,n} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c:cccc}
a_{1,1}^{(k-1)} & a_{1,2}^{(k-1)} & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
 & & 0 & a_{k,k}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & 0 & \dots & 0 \\
\hdashline
 & & 0 & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} & a_{k+1,k+2}^{(k)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k)} \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & 0 & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & a_{n,k+2}^{(k)} & \dots & a_{n,n}^{(k)}
\end{array}\right].$$

Упражнение. Построить формулы матрицы вращений $Q_{k,k+1}$, ..., $Q_{k,n}$ и $T_{k+1,k+2}$, ..., $T_{k+1,n}$, $k=1, \dots, n-1$.

Теорема (число обусловленности $Q^* A T^* = R$)).

Если $A = QRT$ ($\det A \neq 0 \Rightarrow \det R \neq 0$),

то $Cond_2 A = Cond_2 R \equiv \sqrt{\lambda_{\max}(R^* R)} \,/\, \sqrt{\lambda_{\min}(R^* R)}$,

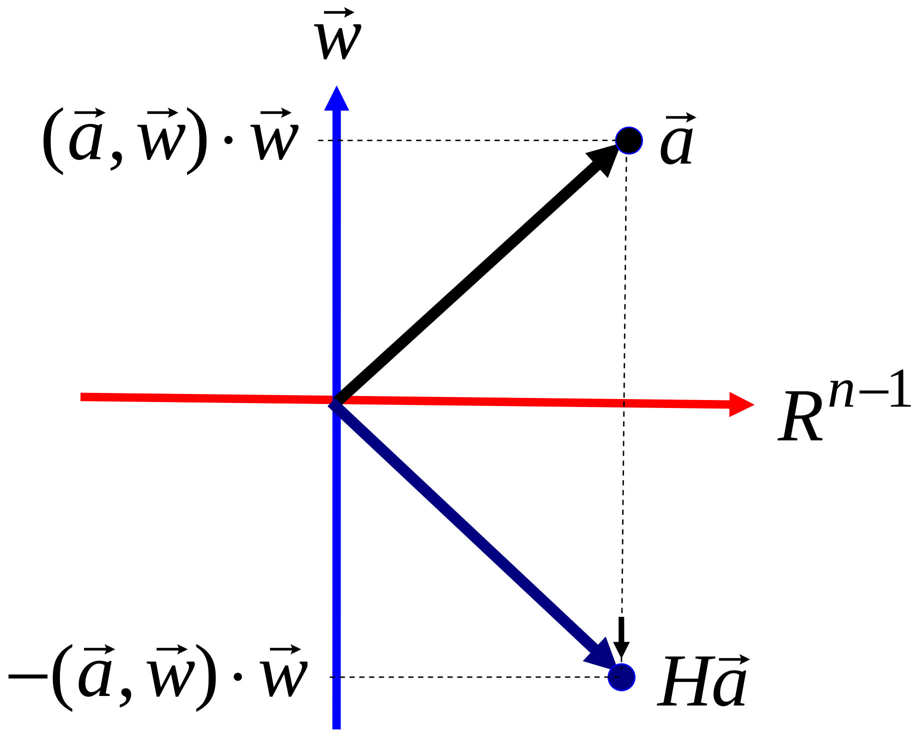
т.е. системы $A\vec{x} = \vec{b}$ и $\begin{cases} Q\vec{y} = \vec{b} \\ R\vec{z} = \vec{y} \\ T\vec{x} = \vec{z} \end{cases}$ одинаково обусловлены.

Доказательство – упражнение для студентов.

Замечание. Матрица $R^* R$ – трехдиагональная матрица с положительными собственными числами, для их приближенного вычисления мы в третьей части курса предложим метод деления пополам (бисекций).

Тема 6.2. Разложение матрицы на произведение ортогональной и верхней треугольной матриц. Метод отражений.

Элементарная матрица отражения:



$$H = E - 2\vec{w}\vec{w}^*, \quad \vec{w}^*\vec{w} \equiv (\vec{w},\vec{w}) = 1.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $H\vec{a}$ заданы, т.е.

$$H\vec{a} = \vec{a} - 2[\vec{w}\vec{w}^*]\vec{a} \equiv \vec{a} - 2(\vec{a},\vec{w})\vec{w},$$

то

$$\vec{w} = \frac{\vec{a} - H\vec{a}}{2(\vec{a},\vec{w})} = \frac{\vec{a} - H\vec{a}}{\|\vec{a} - H\vec{a}\|_2}$$

Упражнения.

5. Доказать, если $H = E - 2\vec{w}\vec{w}^*$, $\vec{w}^*\vec{w} \equiv (\vec{w}, \vec{w}) = 1$, то

$$H = H^*,\ \ H \cdot H^* = E \ \Rightarrow\ H^{-1} = H^*,\ \ Cond_2 H = 1,\ \ \det H = -1$$

6. Построить $H^{(k)} = E - 2\vec{w}^{(k)}(\vec{w}^{(k)})^*$:

$$H^{(k)} \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ \dfrac{a_{k-1,k}}{a_{k,k}} \\ \cdots\cdots \\ a_{k+1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ \dfrac{a_{k-1,k}}{(H^{(k)}\vec{a}_{\bullet,k})_{k,k}} \\ \cdots\cdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ (H^{(k)}\vec{a}_{\bullet,k})_{k,k} = \begin{cases} \alpha_k \cdot r_k,\ r_k = \sqrt{\sum\limits_{i=k}^{n} |\, a_{i,k}\,|^2} \\ \alpha_k = \begin{cases} \dfrac{-a_{k,k}}{|\, a_{k,k}\,|}, & a_{k,k} \neq 0 \\ 1, & a_{k,k} \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $\vec{w}^{(k)} = \dfrac{\vec{a}_{\bullet,k} - H^{(k)}\vec{a}_{\bullet,k}}{\|\, \vec{a}_{\bullet,k} - H^{(k)}\vec{a}_{\bullet,k}\,\|_2} \equiv \dfrac{(0_1, \ldots, 0_{k-1}, [a_{k,k} - \alpha_k \cdot r_k], a_{k+1,k}, \ldots, a_{n,k})^T}{\|\, \vec{a}_{\bullet,k} - H^{(k)}\vec{a}_{\bullet,k}\,\|_2}$

Теорема ($H^* A = R$).

$\forall\ A\ \exists\ H^*:\ \ H^* A = R,\ H^* = H^{(n-1)} \cdot \ldots \cdot H^{(2)} \cdot H^{(1)}$,

где $H^{(k)}$ – элементарные матрицы отражения.

Доказательство. Построим эти матрицы.

1-й шаг: для $A \equiv \begin{bmatrix} \vec{a}_{\bullet,1} & \ldots & \vec{a}_{\bullet,n} \end{bmatrix}$ строим $H^{(1)}$:

$$\begin{cases} H^{(1)} \vec{a}_{\bullet,1} \equiv \alpha_1 r_1 \cdot \vec{e}_1,\ \alpha_1 = -a_{1,1} / \,|\, a_{1,1} \,|,\ r_1 = \|\, a_{\bullet,1} \,\|_2 \\ \vec{w}^{(1)} = \dfrac{\vec{a}_{\bullet,1} - H^{(1)} \vec{a}_{\bullet,1}}{\|\, \vec{a}_{\bullet,1} - H^{(1)} \vec{a}_{\bullet,1} \,\|_2} \\ H^{(1)} = E - 2\vec{w}^{(1)} (\vec{w}^{(1)})^* \end{cases}$$

и вычисляем

$$A^{(1)} = H^{(1)} \cdot A = \begin{bmatrix} H^{(1)} \vec{a}_{\bullet,1} & \ldots & H^{(1)} \vec{a}_{\bullet,n} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{a}^{(1)}_{\bullet,1} & \ldots & \vec{a}^{(1)}_{\bullet,n} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\alpha_1 r_1 \cdot \vec{e}_1 \quad \vec{a}^{(1)}_{\bullet,2} \quad \ldots \quad \vec{a}^{(1)}_{\bullet,n} \right]:$$

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|ccc} a^{(1)}_{1,1} & a^{(1)}_{1,2} & \ldots & a^{(1)}_{1,n} \\ \hline 0 & a^{(1)}_{2,2} & \ldots & a^{(1)}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a^{(1)}_{n,2} & \ldots & a^{(1)}_{n,n} \end{array} \right], \quad |\, a^{(1)}_{1,1} \,| = r_1 \equiv \|\, a_{\bullet,1} \,\|_2$$

Упражнение. Построить формулы для вычисления $\vec{a}^{(1)}_{\bullet,2} = H^{(1)} \vec{a}_{\bullet,2} \equiv$

$$\equiv [E - 2\vec{w}^{(1)} (\vec{w}^{(1)})^*] \cdot \vec{a}_{\bullet,2}.$$

Ответ. $\vec{a}^{(1)}_{\bullet,2} = \vec{a}_{\bullet,2} - 2(\vec{a}_{\bullet,2},\, \vec{w}^{(1)}) \cdot \vec{w}^{(1)}$ ($\approx 4n$ умножений и сложений).

2-й шаг: для $A^{(1)} = \begin{bmatrix} \vec{a}^{(1)}_{\bullet,1} & \dots & \vec{a}^{(1)}_{\bullet,n} \end{bmatrix}$ строим $H^{(2)}$:

$$\begin{cases} r_2 = \sqrt{|a^{(1)}_{2,2}|^2 + |a^{(1)}_{3,2}|^2 + \dots + |a^{(1)}_{n,2}|^2} \\ H^{(2)}\vec{a}^{(1)}_{\bullet,2} \equiv \begin{pmatrix} \vec{a}^{(1)}_{1,2} \\ \alpha_2 r_2 \cdot \vec{e}^{(n-1)}_1 \end{pmatrix}, \ \alpha_2 = -a^{(1)}_{2,2} / |a^{(1)}_{2,2}| \\ \vec{w}^{(2)} = \dfrac{\vec{a}^{(1)}_{\bullet,2} - H^{(2)}\vec{a}^{(1)}_{\bullet,2}}{\| \vec{a}^{(1)}_{\bullet,2} - H^{(2)}\vec{a}^{(1)}_{\bullet,2} \|_2} \\ H^{(2)} = E - 2\vec{w}^{(2)}(\vec{w}^{(2)})^* \end{cases}$$

и вычисляем

$$A^{(2)} = H^{(2)} \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} H^{(1)}\vec{a}^{(2)}_{\bullet,1} & \dots & H^{(2)}\vec{a}^{(1)}_{\bullet,n} \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \vec{a}^{(2)}_{\bullet,1} & \vec{a}^{(2)}_{\bullet,2} & \vec{a}^{(2)}_{\bullet,3} & \dots & \vec{a}^{(2)}_{\bullet,n} \end{bmatrix}:$$

$$A^{(2)}=\left[\begin{array}{cc|ccc} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & \dots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & \dots & a_{2,n}^{(2)} \\ \hline 0 & 0 & a_{3,3}^{(2)} & \dots & a_{3,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(2)} & \dots & a_{n,n}^{(2)} \end{array}\right], \quad |a_{2,2}^{(2)}| = r_2 \equiv \sqrt{|a_{2,2}^{(1)}|^2 + \ldots + |a_{n,2}^{(1)}|^2}$$

Упражнение. Построить формулы для вычисления $\vec{a}_{\bullet,3}^{(2)} = H^{(2)}\vec{a}_{\bullet,3}^{(1)} \equiv$

$$\equiv [E - 2\vec{w}^{(2)}(\vec{w}^{(2)})^*] \cdot \vec{a}_{\bullet,3}^{(1)}.$$

Ответ. $\vec{a}_{\bullet,3}^{(2)} = \vec{a}_{\bullet,3}^{(1)} - 2(\vec{a}_{\bullet,3}^{(1)},\ \vec{w}^{(2)}) \cdot \vec{w}^{(2)}$ ($\approx 4(n-1)$ умножений и сложений), так как $w_1^{(2)} = 0$.

Далее метод математической индукции.

Предположим, что построены матрицы $H^{(1)}, \ldots, H^{(k-1)}$ и

$$A^{(k-1)} = H^{(k-1)} \cdot \{\ldots \cdot [H^{(2)} \cdot (H^{(1)} \cdot A)]\}:$$

$$A^{(k-1)} = \left[\begin{array}{ccc|cccc}
a_{1,1}^{(k-1)} & & a_{1,k-1}^{(k-1)} & a_{1,k}^{(k-1)} & a_{1,k+1}^{(k-1)} & \ldots & a_{1,n}^{(k-1)} \\
0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & a_{k-1,k+1}^{(k-1)} & \ldots & a_{k-1,n}^{(k-1)} \\
\hline
0 & \ldots & 0 & a_{k,k}^{(k-1)} & a_{k,k+1}^{(k-1)} & \ldots & a_{k,n}^{(k-1)} \\
0 & \ldots & 0 & a_{k+1,k}^{(k-1)} & a_{k+1,k+1}^{(k-1)} & \ldots & a_{k+1,n}^{(k-1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & a_{n,k}^{(k-1)} & a_{n,k+1}^{(k-1)} & \ldots & a_{n,n}^{(k-1)}
\end{array}\right]$$

k **-й шаг:** для $A^{(k-1)} = \begin{bmatrix} \vec{a}_{\bullet,1}^{(k-1)} & \dots & \vec{a}_{\bullet,n}^{(k-1)} \end{bmatrix}$ строим $H^{(k)}$:

$$\begin{cases} r_k = \sqrt{|a_{k,k}^{(k-1)}|^2 + |a_{k+1,k}^{(k-1)}|^2 + \ldots + |a_{n,k}^{(k-1)}|^2} \\ H^{(k)}\vec{a}_{\bullet,k}^{(k-1)} \equiv \begin{pmatrix} \vec{a}_{1,k}^{(k-1)} \\ \vdots \\ \vec{a}_{k-1,k}^{(k-1)} \\ \hline \alpha_k r_k \cdot \vec{e}_1^{(n-k+1)} \end{pmatrix}, \ \alpha_k = -a_{k,k}^{(k-1)} / |a_{k,k}^{(k-1)}| \\ \vec{w}^{(k)} = \dfrac{\vec{a}_{\bullet,k}^{(k-1)} - H^{(k)}\vec{a}_{\bullet,k}^{(k-1)}}{\| \vec{a}_{\bullet,k}^{(k-1)} - H^{(k)}\vec{a}_{\bullet,k}^{(k-1)} \|_2} \\ H^{(k)} = E - 2\vec{w}^{(k)}(\vec{w}^{(k)})^* \end{cases}$$

и вычисляем

$$A^{(k)} = H^{(k)} \cdot A^{(k-1)} = \left[H^{(k)} \vec{a}_{\bullet,1}^{(k-1)} \quad \ldots \quad H^{(k)} \vec{a}_{\bullet,n}^{(k-1)} \right] \equiv$$

$$\equiv \left[\vec{a}_{\bullet,1}^{(k)} \quad \vec{a}_{\bullet,2}^{(k)} \quad \vec{a}_{\bullet,3}^{(k)} \quad \ldots \quad \vec{a}_{\bullet,n}^{(k)} \right];$$

$$A^{(k)} = \left[\begin{array}{ccc|c:ccc}
a_{1,1}^{(k-1)} & & a_{1,k-1}^{(k-1)} & a_{1,k}^{(k-1)} & a_{1,k+1}^{(k-1)} & \ldots & a_{1,n}^{(k-1)} \\
0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & a_{k-1,k+1}^{(k-1)} & \ldots & a_{k-1,n}^{(k-1)} \\
\hline
0 & \ldots & 0 & a_{k,k}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{k,n}^{(k)} \\
\hdashline
0 & \ldots & 0 & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{k+1,n}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{n,n}^{(k)}
\end{array} \right]$$

После $(n-1)$-го шага получим

$$A^{(n-1)} = \underbrace{H^{(n-1)} \cdot \ldots \cdot H^{(2)} \cdot H^{(1)}}_{H^*} \cdot A \equiv R:$$

$$R = A^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(n-1)} & \ldots & a_{1,k-1}^{(n-1)} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,n}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$ – верхняя треугольная матрица,

т.е. $A = H \cdot R$ и теорема доказана.

Упражнение. Построить формулы для решения $A\vec{x} = \vec{b}$,

если $H^* A = R$ и $\det A \neq 0$.

Теорема (ошибки округления в методе отражений).

Если $A = HR$ ($\det A > 0$), γ – машинная точность и

$$
\left.\begin{array}{l}
A\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} H\vec{y} = \vec{b} \\ R\vec{x} = \vec{y} \end{cases} \\
A(\vec{x} + \delta(\vec{x})) = \vec{b} + \delta(\vec{b})
\end{array}\right\} \to
\begin{cases}
Q(\underbrace{\vec{y} + \delta(\vec{y})}_{\tilde{\vec{y}}}) = \vec{b} + \delta(\vec{b}) : \ \dfrac{\|\delta(\vec{b})\|_2}{\|\vec{b}\|_2} \le \gamma \\
R(\vec{x} + \delta(\tilde{\vec{x}}_{HR})) = \underbrace{\vec{y} + \delta(\vec{y})}_{\tilde{\vec{y}}} + \delta(\tilde{\vec{y}}) : \ \dfrac{\|\delta(\tilde{\vec{y}})\|_2}{\|\vec{y}\|_2} \le \gamma
\end{cases}
$$

$$
\text{то} \begin{cases}
1) \quad \dfrac{\|\delta(\vec{x})\|_2}{\|\vec{x}\|_2} \le Cond_2 A \cdot \dfrac{\|\delta(\vec{b})\|_2}{\|\vec{b}\|_2} \le Cond_2 A \cdot \gamma \\
2) \quad \dfrac{\|\delta(\tilde{\vec{x}}_{HR})\|_2}{\|\vec{x}\|_2} \le Cond_2 A \cdot 2\gamma
\end{cases}
$$

Тема 7. Решение системы $A\vec{x}=\vec{b}$, если $\det A=0$.

Напомним определения для $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{n}:\ C^n \to C^n$:

1. $\operatorname{Im} A=\{\vec{z}\in C^n:\ \exists\ \vec{x}\in C^n:\ A\vec{x}=\vec{z}\}$,
   $\dim(\operatorname{Im} A)$ – число линейно независимых столбцов (строк) A
2. $\operatorname{Ker} A=\{\vec{z}\in C^n:\ A\vec{z}=0\}$
3. $C^n=\operatorname{Im} A\oplus \operatorname{Ker} A^*=\operatorname{Im} A^*\oplus \operatorname{Ker} A$:
   $\forall\ \vec{z}\in C^n\ \exists!\, \vec{b}\in \operatorname{Im} A,\ \vec{y}\in \operatorname{Ker} A^*:\ \ \vec{z}=\vec{b}+\vec{y},\ \begin{cases}(\vec{b},\ \vec{y})_2=0\\ \|\vec{z}\|_2^2=\|\vec{b}\|_2^2+\|\vec{y}\|_2^2\end{cases}$
4. Система $A\vec{x}=\vec{b}$ совместна, если $\vec{b}\in \operatorname{Im} A$
5. Все решения совместной системы $A\vec{x}=\vec{b}$: $\vec{x}=\vec{x}^{(*)}+\vec{z}\ \ \forall\ \vec{z}\in \operatorname{Ker} A$,
   где $\vec{x}^{(*)}$ – любое решение: $A\vec{x}^{(*)}=\vec{b}$

6. Если система $A\vec{x}=\vec{b}$ совместна, то и система $HA\vec{x}=H\vec{b}$ совместна и множества их решений совпадают, если $\det H\neq 0$
7. Если $\vec{b}\notin \operatorname{Im} A$, то система $A\vec{x}=\vec{b}$ несовместна, её обобщенные решения: $\{\vec{x}\in C^n : \| A\vec{x}-\vec{b}\|_2 = \min\limits_{\vec{y}\in C^n} \| A\vec{y}-\vec{b}\|_2\}$

Упражнение. Доказать: система $A^*A\vec{x}=A^*\vec{b}$ совместна $\forall\ \vec{b}\in C^n$.

Упражнение. Доказать: $\min\limits_{\vec{y}\in C^n} \| A\vec{y}-\vec{b}\|_2 = \| A\vec{x}-\vec{b}\|_2\ \forall\ \vec{x} : A^*A\vec{x}=A^*\vec{b}$.

Упражнение. Доказать: множество обобщенных решений системы $A\vec{x}=\vec{b}$ совпадает с множеством решений совместной системы $A^*A\vec{x}=A^*\vec{b}$.

Упражнение. Доказать: множество обобщенных решений системы $A\vec{x}=\vec{b}$ совпадает с множеством обобщенных решений системы $HAP(P^*\vec{x})=H\vec{b}$,
где H, P – ортогональные матрицы.

Доказательство.

Множество обобщенных решений системы $A\vec{x}=\vec{b}$
= множеству решений совместной системы $A^*A\vec{x}=A^*\vec{b}$;
и
множество обобщенных решений системы $HAP(P^*\vec{x})=H\vec{b}$,
= множеству решений совместных систем:

$$(HAP)^*(HAP)(P^*\vec{x})=(HAP)^*H\vec{b} \;\Rightarrow\; P^*(A^*A\vec{x})=P^*(A^*\vec{b})$$

$$\Rightarrow\; A^*A\vec{x}=A^*\vec{b},$$

что и требовалось доказать.

Теорема* (решение $\vec{y}$ системы $HAP\,\underbrace{P^*\vec{x}}_{\vec{y}} = \underbrace{H\vec{b}}_{\vec{g}}$). **Если**

1. система $A\vec{x} = \vec{b}$ преобразована в систему $\begin{cases} (HAP)\vec{y} = \vec{g} \equiv H\vec{b} \\ \vec{x} = P\vec{y} \end{cases}$

   где H, P – ортогональные матрицы;

2. $m = \operatorname{rang} A = \dim(\operatorname{Im} A) \le n$,

   $$HAP = \left[\begin{array}{c|c} R_{m,m} & R_{m,n-m} \\ \hline 0_{n-m,m} & 0_{n-m,n-m} \end{array}\right],\ \det R_{m,m} \neq 0;\ \vec{g} = \left(\begin{array}{c} \vec{g}^{(m)} \\ \hline \vec{g}^{(n-m)} \end{array}\right);$$

то $\left\{\vec{y} = \left(\begin{array}{c} \vec{y}^{(m)} \\ \hline \vec{y}^{(n-m)} \end{array}\right):\ \vec{y}^{(m)} = (R_{m,m})^{-1}(\vec{g}^{(m)} - R_{m,n-m}\vec{y}^{(n-m)})\ \ \forall\ \vec{y}^{(n-m)}\right\}$

– множество обобщенных решений системы $(HAP)\vec{y} = \vec{g}$.

Замечание. Если система $A\vec{x} = \vec{b}$ совместна, то $\vec{g}^{(n-m)} = 0$.

Теорема ($HAP = R$).

$\forall\ A \in C^{n\times n} \quad \exists\ H = H^{(n-1)} \cdot ... \cdot H^{(1)} \quad \exists\ P = P^{(1)} \cdot ... \cdot P^{(n-1)}$:

1. $H^{(k)}$ – элементарные матрицы отражения,
2. $P^{(k)}$ – элементарные матрицы перестановок,
3. $HAP = R$ – верхняя треугольная матрица:

$$R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ & r_{2,2} & \cdots & r_{2,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & r_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} |r_{1,1}| \ge |r_{i,j}| \ \ \forall\ i, j = 1, 2, ..., n \\ |r_{2,2}| \ge |r_{i,j}| \ \ \forall\ i, j = \quad 2, ..., n \\ |r_{k,k}| \ge |r_{i,j}| \ \ \forall\ i, j = \quad\quad k, ..., n \\ \quad k = 1, ..., n-1 \end{cases}$$

Доказательство. Построим эти матрицы.

1-й шаг. Вычислим $d_1 = \| a_{\bullet,1} \|_2,\ d_2 = \| a_{\bullet,2} \|_2,\ \dots,\ d_n = \| a_{\bullet,n} \|_2$;

найдем $j_1:\ d_{j_1} \ge \max\limits_{1 \le j \le n} d_j$ и зададим $P^{(1)} = P_{1,j_1}$.

«Вычислим» $A^{(1/2)} = AP^{(1)} \equiv \begin{bmatrix} a_{\bullet,1}^{(1/2)} & \dots & a_{\bullet,n}^{(1/2)} \end{bmatrix}$.

Построим

$$H^{(1)}:\ H^{(1)} a_{\bullet,1}^{(1/2)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } A^{(1)} = H^{(1)} A^{(1/2)} = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \dots & a_{1,n}^{(1)} \\ \hline 0 & a_{2,2}^{(1)} & \dots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & \dots & a_{n,n}^{(1)} \end{array}\right].$$

Заметим, что $| a_{1,1}^{(1)} | = \| a_{\bullet,1}^{(1/2)} \|_2 \ge \| a_{\bullet,j}^{(1)} \|_2 \quad \forall\ j > 1$

$$\Rightarrow \quad | a_{1,1}^{(1)} | \ge | a_{i,j}^{(1)} | \quad \forall\ i, j \ge 1.$$

2-й шаг. Вычислим $d_2 = (\sum_{i=2}^{n} | a_{i,2}^{(1)} |^2)^{1/2}, \ldots, d_n = (\sum_{i=2}^{n} | a_{i,n}^{(1)} |^2)^{1/2}$;

найдем $j_2 : \ d_{j_2} \ge \max_{2 \le j \le n} d_j$ и зададим $P^{(2)} = P_{2, j_2}$.

«Вычислим» $A^{(3/2)} = A^{(1)} P^{(2)} \equiv \left[a_{\bullet,1}^{(1)} \;\middle|\; a_{\bullet,2}^{(3/2)} \quad \ldots \quad a_{\bullet,n}^{(3/2)} \right]$.

Построим

$$H^{(2)}\colon \ H^{(2)} a_{\bullet,2}^{(3/2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{1,2}^{(3/2)}}{a_{2,2}^{(2)}} \\ \hdashline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ | a_{2,2}^{(2)} | = d_{j_2}$$

и

$$A^{(2)} = H^{(2)} A^{(3/2)} = \left[\begin{array}{c|c:ccc} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & \dots & a_{1,n}^{(2)} \\ \hline 0 & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & \dots & a_{2,n}^{(2)} \\ \hdashline 0 & 0 & a_{3,3}^{(2)} & \dots & a_{3,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(2)} & \dots & a_{n,n}^{(2)} \end{array}\right].$$

Заметим, что $\begin{cases} |\, a_{1,1}^{(1)} \,| \geq \|\, a_{\bullet,j}^{(2)} \,\|_2 \quad \forall\ j > 1 \\ |\, a_{2,2}^{(2)} \,| \geq \left(\sum\limits_{i=2}^{n} |\, a_{i,j}^{(2)} \,|^2 \right)^{1/2} \quad \forall\ j > 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} |\, a_{1,1}^{(1)} \,| \geq |\, a_{i,j}^{(2)} \,| \quad \forall\ i, j \geq 1 \\ |\, a_{2,2}^{(2)} \,| \geq |\, a_{i,j}^{(2)} \,| \quad \forall\ i, j \geq 2 \end{cases}$$

Далее метод математической индукции. После $(k-1)$-го шага имеем $A^{(k-1)} = (H^{(k-1)} \cdot \ldots \cdot H^{(1)}) \cdot A \cdot (P^{(1)} \cdot \ldots \cdot P^{(k-1)})$:

$$A^{(k-1)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
a_{1,1}^{(k-1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(k-1)} & a_{1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{1,n}^{(k-1)} \\
 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} \\
\hline
0 & & 0 & a_{k,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k,n}^{(k-1)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & & 0 & a_{n,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{n,n}^{(k-1)}
\end{array}\right]$$

и $\begin{cases} |a_{l,l}^{(k-1)}| \geq (\sum\limits_{i=l}^{n} |a_{i,j}^{(k-1)}|^2)^{1/2} \quad \forall\ j > l \\ l = 1, \ldots, k-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a_{l,l}^{(k-1)}| \geq |a_{i,j}^{(k-1)}| \quad \forall\ i, j \geq l \\ l = 1, \ldots, k-1 \end{cases}$

k**-й шаг.** Вычислим $d_k = (\sum_{i=k}^{n} |a_{i,k}^{(k-1)}|^2)^{1/2}, \ldots, d_n = (\sum_{i=k}^{n} |a_{i,n}^{(k-1)}|^2)^{1/2}$;

найдем $j_k: \; d_{j_k} \geq \max\limits_{k \leq j \leq n} d_j$ и зададим $P^{(k)} = P_{k, j_k}$.

«Вычислим»

$$A^{(k-1/2)} = A^{(k-1)} P^{(k)} \equiv \left[a_{\bullet,1}^{(k-1)} \quad \ldots \quad a_{\bullet,k-1}^{(k-1)} \;\middle|\; a_{\bullet,k}^{(k-1/2)} \quad \ldots \quad a_{\bullet,n}^{(k-1/2)} \right],$$

т.е. в матрице $A^{(k-1)}$ переставим столбцы $a_{\bullet,k}^{(k-1)}$ и $a_{\bullet,j_k}^{(k-1)}$.

Построим $H^{(k)}$:

$$H^{(k)} a_{\bullet,2}^{(k-1/2)} = \begin{pmatrix} a_{1,k}^{(k-1/2)} \\ \vdots \\ a_{k-1,k}^{(k-1/2)} \\ \hline a_{k,k}^{(k)} \\ \hdashline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |a_{k,k}^{(k)}| = d_{j_k} \geq \left(\sum_{i=k}^{n} |a_{i,j}^{(k-1)}|^2\right)^{1/2} \quad \forall\ j > k$$

и вычислим $A^{(k)} = H^{(k)} A^{(k-1/2)}$:

$$A^{(k)} = H^{(k)} A^{(k-1/2)} = \left[\begin{array}{ccc|c:ccc}
a_{1,1}^{(k-1)} & \dots & a_{1,k-1}^{(k-1)} & a_{1,k}^{(k)} & a_{1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{1,n}^{(k)} \\
 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k)} & a_{k-1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k-1,n}^{(k)} \\
\hline
0 & \dots & 0 & a_{k,k}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k,n}^{(k)} \\
\hdashline
0 & \dots & 0 & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & \dots & a_{n,n}^{(k)}
\end{array}\right]$$

и $\begin{cases} |a_{l,l}^{(k)}| \ge (\sum\limits_{i=l}^{n} |a_{i,j}^{(k-1)}|^2)^{1/2} \quad \forall\ j > l \\ l = 1, \dots, k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a_{l,l}^{(k)}| \ge |a_{i,j}^{(k)}| \quad \forall\ i, j \ge l \\ l = 1, \dots, k \end{cases}$

После $(n-1)$-го шага: $A^{(n-1)} = \underbrace{H^{(n-1)} \cdot \ldots \cdot H^{(1)}}_{H} \cdot A \cdot \underbrace{P^{(1)} \cdot \ldots \cdot P^{(n-1)}}_{P} = R$:

$$A^{(n-1)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1}^{(n-1)} & \ldots & a_{1,m}^{(n-1)} & a_{1,m+1}^{(n-1)} & \ldots & a_{1,n}^{(n-1)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & a_{m,m}^{(n-1)} & a_{m,m+1}^{(n-1)} & \ldots & a_{m,n}^{(n-1)} \\ \hline 0 & \ldots & 0 & a_{m+1,m+1}^{(n-1)} & \ldots & a_{m+1,n}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & a_{n,n}^{(n-1)} \end{array} \right] \equiv R = (r_{i,j})_{i,j=1}^{n}$$

и $\begin{cases} |r_{l,l}| \geq (\sum\limits_{i=l}^{n} |r_{i,j}|^2)^{1/2} \quad \forall \ j > l \\ l = 1, \ldots, n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |r_{l,l}| \geq |r_{i,j}| \quad \forall \ i, j \geq l \quad \forall \ l \\ |r_{1,1}| \geq |r_{2,2}| \geq \ldots \geq |r_{m,m}| \geq \\ \qquad \geq |r_{m+1,m+1}| \geq \ldots \geq |r_{n,n}| \end{cases}$

Следствие. Если $m = \operatorname{rang} A = \dim(\operatorname{Im} A) < n$,

то из теоремы о $HAP = R$ следует, что

$$R \equiv A^{(n-1)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1}^{(n-1)} & \dots & a_{1,m}^{(n-1)} & a_{1,m+1}^{(n-1)} & \dots & a_{1,n}^{(n-1)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & a_{m,m}^{(n-1)} & a_{m,m+1}^{(n-1)} & \dots & a_{m,n}^{(n-1)} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right],$$

где $|a_{1,1}^{(n-1)}| \geq |a_{2,2}^{(n-1)}| \geq \ldots \geq |a_{m,m}^{(n-1)}| > 0.$

Замечание. Если $m = \operatorname{rang} A = \dim(\operatorname{Im} A) < n$, и вычисления в теореме о $HAP = R$ выполняются приближенно, то

$$\tilde{R} \equiv \tilde{A}^{(n-1)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \tilde{a}_{1,1}^{(n-1)} & \dots & \tilde{a}_{1,m}^{(n-1)} & \tilde{a}_{1,m+1}^{(n-1)} & \dots & \tilde{a}_{1,n}^{(n-1)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \tilde{a}_{m,m}^{(n-1)} & \tilde{a}_{m,m+1}^{(n-1)} & \dots & \tilde{a}_{m,n}^{(n-1)} \\ \hline 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{m+1,m+1}^{(n-1)} & \dots & \varepsilon_{m+1,n}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{n,n}^{(n-1)} \end{array}\right],$$

где $|\tilde{a}_{1,1}^{(n-1)}| \geq |\tilde{a}_{2,2}^{(n-1)}| \geq \ldots \geq |\tilde{a}_{m,m}^{(n-1)}| >> |\varepsilon_{m+1,m+1}^{(n-1)}| \geq \ldots \geq \varepsilon_{n,n}^{(n-1)}$.

Эта группа неравенств *«определяет»* $m = \operatorname{rang} A$.

Следствие (алгоритм решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$, если $m=\operatorname{rang} A \le n$).

1. Строим ортогональные матрицы H, P:

$$HAP = \left[\begin{array}{c|c} R_{m,m} & R_{m,n-m} \\ \hline 0_{n-m,m} & 0_{n-m,n-m} \end{array}\right],\ \det R_{m,m} \ne 0.$$

2. Систему $A\vec{x}=\vec{b}$ преобразуем в систему $\begin{cases} (HAP)\vec{y} = \vec{g} \equiv H\vec{b} \\ \vec{x} = P\vec{y} \end{cases}$

$$\vec{y} = \left(\begin{array}{c} \vec{y}^{(m)} \\ \hline \vec{y}^{(n-m)} \end{array}\right),\ \vec{g} = \left(\begin{array}{c} \vec{g}^{(m)} \\ \hline \vec{g}^{(n-m)} \end{array}\right).$$

3. Вычисляем $\vec{y}^{(g^{(m)})} = \left(\begin{array}{c} (R_{m,m})^{-1}\vec{g}^{(m)} \\ \hline 0^{(n-m)} \end{array}\right)$, $\vec{x}^{(g^{(m)})} = P\vec{y}^{(g^{(m)})}$ – частное решение.

4. Для построения общего решения строим

$$\operatorname{Ker} HAP = \{\ \vec{y}^{[k]} = \left(\frac{\vec{y}^{(m;\,k)} = -(R_{m,m})^{-1} R_{m,n-m} \vec{e}^{(n-m;\,k)}}{\vec{y}^{(n-m;\,k)} = \vec{e}^{(n-m;\,k)} \in C^{(n-m)\times(n-m)}} \right) \}_{k=1}^{n-m},$$

тогда

$$\begin{cases} \vec{y}^{[\alpha]} = \vec{y}^{(g^{(m)})} + \alpha_1 \cdot \vec{y}^{[1]} + \ldots + \alpha_{n-m} \cdot \vec{y}^{[n-m]}, \\ \vec{x}^{[\alpha]} = \vec{x}^{(g^{(m)})} + \alpha_1 \cdot P\vec{y}^{[1]} + \ldots + \alpha_{n-m} \cdot P\vec{y}^{[n-m]} \end{cases} \quad \forall\ \underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-m}}_{\alpha} \in C$$

– множество обобщенных решений системы $\begin{cases} (HAP)\vec{y} = \vec{g} \equiv H\vec{b} \\ \vec{x} = P\vec{y} \end{cases}.$

Упражнение. Постройте систему уравнений для $\alpha^{(*)}$:

$\| \vec{x}^{[\alpha^{(*)}]} \|_2 = \min\limits_{\alpha} \| \vec{x}^{[\alpha]} \|_2$ – ***нормальное*** *обобщенное решение*.