МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Новосибирский государственный университет» (НГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ

____

"_____"_______________20__ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«Вычислительные методы линейной алгебры»

Основная образовательная программа подготовки бакалавров
ММФ НИУ-НГУ (Новосибирск, Россия) – Хэйлунцзянский университет (Харбин, Китай)

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ
010100 «Математика»
ПРОФИЛЬ
«Математика и прикладная математика»

Квалификация (степень) выпускника
Бакалавр

Форма обучения очная

Новосибирск
2013

Программа дисциплины «Вычислительные методы линейной алгебры» составлена в соответствии с требованиями к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированного бакалавра по профессиональному циклу дисциплин (базовая часть) по направлению подготовки «Математика», а также задачами, стоящими перед Новосибирским государственным университетом по реализации Программы развития НГУ как национального исследовательского института и сотрудничества с Хэйлунцзянским университетом (Харбин, Китайская народная республика).

Автор:
Мацокин Александр Михайлович, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры Вычислительной математики.

Механико-математический факультет
Кафедра Вычислительной математики

1. Цели освоения дисциплины «Вычислительные методы линейной алгебры»

Основная цель изучения дисциплины – познакомить студентов с классическими и современными методами решения задач линейной алгебры: вычисление определителя матрицы, решение системы линейных алгебраических уравнений, вычисление собственных значений и векторов матрицы. Для достижения этой цели

- определяются формальные постановки задач линейной алгебры;
- доказываются основные теоремы о точности решения системы линейных алгебраических уравнений с приближенно заданными матрицей и правой частью;
- формулируются прямые методы решения системы линейных алгебраических уравнений и условия их применения, устанавливается их связь с задачей вычисления определителя матрицы;
- формулируются итерационные методы решения системы линейных алгебраических, исследуется их сходимость;
- формулируются итерационные методы решения задач на собственные значения для самосопряженных матриц, исследуется их сходимость;
- каждый раздел теоретической части дисциплины сопровождается набором задач по соответствующей теме, их решением или указанием способов их решения.

Полученные теоретические знания позволяют сформировать представление о прямых и итерационных методах решения задач линейной алгебры, применять их для решения прикладных задач. Представление об этих понятиях является обязательной частью общематематической культуры и необходимо для проведения исследований по всем направлениям современной прикладной математики. Теоретические знания подкрепляются практическими навыками самостоятельного решения типичных задач.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина входит в базовую часть профессионального цикла образовательной программы подготовки дипломированного бакалавра по направлению подготовки «Математика», профиль «Математика и прикладная математика». Изучение дисциплины опирается на материал школьной программы, касающийся понятий вектор, матрица, решение систем уравнений, а также курсы алгебры и математического анализа, входящие в базовую часть математического и естественнонаучного цикла образовательной программы. Так как данная дисциплина формирует представления о точном или приближенном решении линейных задач, ее успешное освоение необходимо для дальнейшего изучения математических дисциплин, связанных с аппроксимацией и решением систем приближенных уравнений для прикладных задач естествознания на современных ЭВМ.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Вычислительные методы линейной алгебры»

При освоении дисциплины формируются

- общекультурные компетенции ОК-6, ОК-7, ОК-10, ОК-11, ОК-14 (применение в научно-исследовательской и профессиональной деятельности базовых знаний в области фундаментальной и прикладной математики, получение значительных навыков самостоятельной исследовательской работы, умение находить, анализировать и обрабатывать информацию, фундаментальная подготовка в области математики и компьютерных наук и готовность к использованию полученных знаний в профессиональной деятельности, способность к анализу и синтезу информации, полученной из различных источников);
- профессиональные компетенции ПК-1, ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-5, ПК-6, ПК-7, ПК-8, ПК-9, ПК-10, ПК-11, ПК-12, ПК-13, ПК-16, ПК-19, ПК-21, ПК-22, ПК-25, ПК-27, ПК-29 (умение определить формы, закономерности и средства предметной области, понять поставленную задачу, сформулировать результат и строго его доказать, умение на основе анализа корректно сформулировать возможные результаты и самостоятельно оценить их последствия,

умение грамотно пользоваться языком предметной области, способность ориентироваться в постановках задач, знание постановок классических задач, представление о корректности постановки задачи, навыки построения алгоритмов и их анализа, понимание сути точности фундаментального знания и его значения для компьютерных наук, умение выделять главные смысловые аспекты математических рассуждений, владение методами алгоритмического моделирования и проблемно-задачной формой представления математических знаний, умение видеть прикладные следствия решения научной проблемы, представлять и интерпретировать их, умение самостоятельно формулировать проблемы и организовывать их решение в рамках небольших коллективов, умение точно представить математические знания в устной форме, возможность преподавания математических дисциплин и информатики в общеобразовательных школах и учебных заведениях среднего и высшего профессионального образования).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

- ***знать*** определения: векторных норм и согласованных или подчиненным им матричных норм, скалярного произведения, числа обусловленности матрицы; теорему об оценке относительной ошибки решения системы линейных алгебраических уравнений при возмущении правой части или матрицы системы, теорему об эквивалентности норм в конечномерном векторном пространстве; определения: прямых и итерационных методов решения системы линейных алгебраических уравнений, нижне-треугольных и верхне-треугольных матриц, элементарных матриц вращения и отражения, положительно определенных матриц; формулировки и условия применимости прямых методов решения системы линейных алгебраических уравнений: метода Гаусса исключения неизвестных, метода квадратного корня, метода вращений, метода отражений; формулировки, условия применимости и оценки скорости сходимости итерационных методов решения системы линейных алгебраических уравнений: стационарных методов Якоби, Гаусса-Зейделя, методов релаксации и простой итерации; нестационарных методов: метода минимальных невязок, метода скорейшего спуска, метода Ричардсона, метода сопряженных градиентов; определение задачи на собственные значения квадратной матрицы, методы ее решения, условия их применимости и оценки сходимости: степенной метод, метод деления пополам (бисекций), метод вращений (Якоби);
- ***уметь*** проводить математически строгие доказательства утверждений по материалу данного курса, проверять условия применимости прямых и итерационных методов для конкретных систем линейных алгебраических уравнений, оценивать объем арифметических операций для их решения с заданной точностью;
- ***владеть*** навыками построения решения систем линейных алгебраических уравнений прямыми и итерационными методами, приближенного вычисления собственных значений и векторов квадратной матрицы, оценки точности их решения.

4. Структура и содержание дисциплины «Вычислительные методы линейной алгебры»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 часов. Курс читается единым модулем в течение полутора месяцев. Аудиторная нагрузка составляет 108 часов. Специфика преподавания иностранным студентам не предусматривает разделения аудиторных занятий на лекционные и семинарские. В конце курса проводится приём экзамена.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)	Формы текущего контроля успеваемости (*по неделям семестра*) Форма промежуточной аттестации

				Аудиторные занятия	Самост. работа	Контр. работы	Сумма	
1	Введение в вычислительные методы линейной алгебры	5	1	2	2		4	
2	Классические задачи линейной алгебры	5	1	6	6		12	Текущий контроль выполнения домашних работ
3	Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений	5	2	18	20	2	40	Текущий контроль выполнения домашних работ, контрольная работа
4	Стационарные итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений	5	3	18	20	2	40	Текущий контроль выполнения домашних работ, контрольная работа
5	Нестационарные итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений	5	4	18	20	2	20	Текущий контроль выполнения домашних работ
6	Многопараметрические итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений	5	5	18	20	2	40	Текущий контроль выполнения домашних работ, контрольная работа
7	Итерационные методы решения задачи на собственные значения симметричной матрицы	5	6	18	20	2	40	Текущий контроль выполнения домашних работ
	Промежуточная аттестация	5	6					Экзамен
				98	**108**	**10**	**216**	

Темы занятий

1. **Введение в вычислительные методы линейной алгебры (2 часа):** Предмет изучения, связь с другими дисциплинами. История возникновения и развития вычислительных методов линейной алгебры. Современные направления исследований.
2. **Классические задачи линейной алгебры (6 часов):** Основные понятия линейной алгебры. Векторы и матрицы. Определитель матрицы. Вычисление определителя матрицы. Система линейных алгебраических уравнений. Теорема (без доказательства) о существовании и единственности решения системы линейных алгебраических уравнений. Характеристический полином матрицы. Теорема (без доказательства) о количестве собственных чисел матрицы. Векторные и матричные нормы, согласованные и подчиненные нормы. Теорема (без доказательства) об эквивалентности норм в конечномерном линейном пространстве. Скалярное произведение в векторном пространстве. Положительно определенные матрицы. Скалярное произведение и норма, порождаемые самосопряженной, положительно определенной матрицей. Число обусловленности матрицы. Оценка возмущения решения системы линейных алгебраических уравнений при возмущении правой части и матрицы.
3. **Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (18 часов):** Теорема о разложении матрицы в произведение нижней и верхней треугольной матриц. Теорема об единственности разложения матрицы в произведение нижней, диагональной и

верхней треугольной матриц. Критерий Сильвестра о положительности собственных чисел (положительной определенности) самосопряженной матрицы. Вычисление определителя матрицы на основе этих разложений. Замена задачи решения системы линейных алгебраических уравнений на последовательное решение систем линейных алгебраических уравнений с нижней и верхней треугольной матрицами. Оценка относительной ошибки решения исходной системы линейных алгебраических уравнений при возмущении правой части. Метод исключения неизвестных: схема единственного деления. Метод квадратного корня. Метод прогонки для систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами. Диагональное преобладание. Метод (формулы) матричной прогонки. Выбор главного элемента по столбцу. Элементарная матрица вращения. Теорема о разложении матрицы в произведение элементарных матриц вращения и верхней треугольной матрицы. Элементарная матрица отражения. Теорема о разложении матрицы в произведение элементарных матриц отражения и верхней треугольной матрицы. Замена задачи решения системы линейных алгебраических уравнений на последовательное решение систем линейных алгебраических уравнений с ортогональной (унитарной) и верхней треугольной матрицами. Оценка относительной ошибки решения исходной системы линейных алгебраических уравнений при возмущении правой части. О решении систем линейных алгебраических уравнений с прямоугольными (или вырожденными) матрицами.

4. **Стационарные итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (18 часов):** Двухслойные (одношаговые) итерационные методы. Вектор ошибки, вектор невязки, матрицы перехода для ошибок и невязок. Канонический вид двухслойного однопараметрического итерационного метода. Достаточное условие сходимости стационарного итерационного метода. Теорема о необходимом и достаточном условии сходимости стационарного итерационного метода. Метод простой итерации, теорема о сходимости, выбор оптимального параметра. Метод Якоби, достаточное условие сходимости (лемма Гершгорина). Метод Зейделя (Гаусса-Зейделя). Сходимость метода Зейделя для систем с симметричными, положительно определенными матрицами. Определение функционала ошибки Φ(z), подчиненного итерационному методу, существование такого функционала – достаточное условие сходимости итерационного метода. Релаксация, сходимость методов релаксации для решения систем алгебраических уравнений с симметричными, положительно определенными матрицами.
5. **Нестационарные итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (18 часов):** Вариационный принцип выбора параметров нестационарного одношагового итерационного метода решения системы линейных алгебраических уравнений. Функционал ошибки Φ(z) = (Az, z), где A – самосопряженная, положительно определенная матрица. Метод наискорейшего спуска: $x^{k+1} = x^k - \tau_k \cdot (Ax^k - b)$, где параметр τ_k определяется из условия минимизации функционала $\Phi(z^{k+1}) = \Phi(z^k - \tau_k \cdot Az^k)$, $z^k = x - x^k$. Оценка сходимости метода наискорейшего спуска для систем с симметричными, положительно определенными матрицами. Функционал ошибки Φ(z) = (Az, Az), где A – положительно определенная матрица. Метод минимальных невязок: $x^{k+1} = x^k - \tau_k \cdot (Ax^k - b)$, где параметр τ_k определяется из условия минимизации функционала $\Phi(z^{k+1})$. Оценка сходимости метода минимальных невязок для систем с положительно определенными матрицами.
6. **Многопараметрические итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (18 часов):** Стационарный m-шаговый итерационный метод Ричардсона решения системы линейных алгебраических уравнений: $x^{k+1} = x^k - \tau_{k+1} \cdot (Ax^k - b)$, $\tau_{k+m} = \tau_k$. Чебышевские параметры $\tau^* = \{\tau_1^*, ..., \tau_m^*\}$ – решение задачи минимизации спектрального радиуса матрицы перехода для ошибки за m итераций:

$$\hat{\rho}_{\tau^*}(S_{\tau^*}(A)) = \min_{\tau}\{\max_{\lambda_{\min}(A)\le\lambda\le\lambda_{\max}(A)} |S_\tau(\lambda)|\}, \qquad \text{где} \qquad S_\tau(\lambda) = (1-\tau_m\cdot\lambda)\cdot\ldots\cdot(E-\tau_1\cdot\lambda).$$

Оценка сходимости метода Ричардсона с чебышевским набором параметров. Об устойчивости метода Ричардсона с чебышевским набором итерационных параметров. Трехчленные формулы метода Ричардсона. Метод сопряженных градиентов. Оценка сходимости метода. Построение A-ортогонального базиса, двухчленные формулы реализации, трехчленные формулы реализации.

7. **Итерационные методы решения задачи на собственные значения симметричной матрицы (18 часов):** Характеристический полином матрицы, непрерывная зависимость его корней от коэффициентов. Степенной метод приближенного вычисления максимального собственного значения и соответствующего ему собственного вектора симметричной, положительно определенной матрицы. Его применение для вычисления минимального собственного значения. Закон инерции и L*D*L'- разложение симметричной матрицы, идея метода деления пополам для вычисления собственного числа самосопряженной матрицы. Приведение симметричной матрицы к трехдиагональному виду ортогональным преобразованием подобия (с помощью матриц вращения). Якобиевая симметричная матрица, свойства последовательности ее главных миноров, теорема о количестве ее отрицательных собственных значений, простота собственных значений. Схема метода деления пополам (метода бисекций) приближенного вычисления i-того собственного значения якобиевой матрицы, вычисление соответствующего ему собственного вектора. Метод Якоби. Инвариантность суммы квадратов элементов матрицы при умножении ее на ортогональную матрицу: S(A)=S(QA)=S(AQ). Изменение суммы квадратов внедиагональных элементов матрицы при ортогональном преобразовании подобия с помощью элементарных матриц вращения. Формулы элементов матрицы вращения. Оценка сходимости к нулю сумм квадратов внедиагональных элементов последовательности матриц метода вращения. Оценка точности приближения собственных значений. Оценка точности приближения собственных векторов (случай простых собственных значений).

5. Образовательные технологии

При реализации учебной работы используются активная и интерактивная формы обучения в сочетании с внеаудиторной работой. На занятиях происходит изложение материала, разбираются типичные задачи и упражнения, а также проводится контроль самостоятельной работы.

Для лучшего понимания материала иностранными студентами предполагается предварительная раздача им текста с теоретическим материалом, чтобы во время изложения доказательств они могли уточнять по тексту вещи, непонятные со слуха. Организация занятий предполагает диалог со студентами по вопросам, связанным с изученным материалом и примерами из ранее прослушанных школьных и университетских курсов, а также самостоятельным построением доказательств студентами. Для закрепления материала предлагаются упражнения для самостоятельной работы (включая применение теоретического материала в частных случаях и проведение фрагментов доказательств), а также осуществляется контроль самостоятельной работы студентов. Во время контроля выполнения заданий, предложенных для внеаудиторной самостоятельной работы, производится выступление студентов с их вариантами решений. Примерная структура занятия:

- контроль выполнения домашней работы и разбор заданий, вызвавших затруднения (15 минут) с обязательным участием студентов; проводится выборочный контроль выполнения домашней работы, в разборе важная роль отводится студентам, предлагающим свои решения или альтернативные варианты решений;
- изложение нового теоретического материала (25 минут); во время изложения материала осуществляется контроль понимания в форме краткого опроса по излагаемому материалу;
- самостоятельное решение практических задач студентами, обсуждение подходов к решению и предлагаемых аргументов (35 минут) с обязательным участием студентов; организуется в форме самостоятельной работы, обсуждения подходов, предложения готовых реше-

ний, обсуждения этих решений, поиска и исправления неточностей, выявление границ применимости использованных методов;
- формулировка домашнего задания и указаний по его выполнению (5 минут).

Самостоятельная внеаудиторная работа студентов состоит из двух взаимосвязанных частей. Первая представляет собой освоение теоретического материала, вторая — приобретение практических навыков решения задач и применения методов исследования и решения задач линейной алгебры. Освоение теоретического материала производится по лекциям и указанной основной и дополнительной литературе. Для контроля усвоения материала студентам предлагается значительное количество упражнений, состоящих в сравнении свойств близких понятий, применении общих утверждений в частных случаях классических математических объектов или объектов, знакомых по другим математическим курсам, построении фрагментов доказательств утверждений, нахождении примеров, иллюстрирующих границы применения тех или иных методов, проверке громоздких технических утверждений, необходимых для доказательства теорем на лекциях. Выполнение этих упражнений и заданий из используемого сборника задач позволяет студентам научиться решать типичные задачи по вычислительным методам линейной алгебры и ее приложениям в других разделах математики, лучше понять возможности практического применения теоретического материала курса.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Самостоятельная внеаудиторная работу студентов организована в виде освоения теоретического материала и выполнения задач и упражнений по материалу, изложенному в лекциях. Задания для самостоятельной работы формулируются на лекциях.

Текущий контроль. Материал курса разбит на тематические блоки. Освоение материала каждого блока подразумевает решение типичных задач и разбор домашних работ (контроль самостоятельной работы студентов). Осуществляется выборочный контроль выполнения домашних работ. В конце каждого блока проводится контрольная работа.

Промежуточный контроль. Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен. На экзамене проверяется уровень усвоения теоретического материала. На экзамене учитываются результаты выполнения контрольных работ.

Текущий и промежуточный контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы, принятой в образовательной программе.

Типичные темы заданий, предлагаемых в контрольных работах и на зачете

1. Векторы и матрицы (дать определения основных векторных норм (равномерной, октаэдрической, евклидовой) и подчиненным им матричным нормам). Определить константы эквивалентности векторных норм (равномерной, октаэдрической, евклидовой) Доказать, что самосопряженная, положительно определенная (относительно евклидова скалярного произведения $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y}_i$) матрица A порождает в векторном пространстве «энергетическое» скалярное произведение $(x, y)_A \equiv (Ax, y)$. Доказать, что заданное скалярное произведение $(x, y)_*$ в векторном пространстве совпадает с «энергетическим» скалярным произведением $(x, y)_A \equiv (Ax, y)$, где элементы $a_{i,j}$ самосопряженной, положительно определенной (относительно евклидова скалярного произведения) матрицы A определяются по формуле $a_{i,j} = (e_i, e_j)_*$. Доказать неравенство Коши (Коши-Буняковского): для любых векторов x, y справедливо неравенство $|(x, y)_*| \le \sqrt{(x, x)_*} \cdot \sqrt{(y, y)_*}$. Вычислить число обусловленности заданной матрицы относительно нормы, подчиненной векторной (равномерной, октаэдрической) норме.

2. Доказать теорему о разложении матрицы в произведение нижней и верхней треугольной матриц. Проверить достаточные условия ее применимости для конкретных матриц. Построить разложение конкретной матрицы в произведение нижней треугольной матрицы и верхней треугольной матрицы с единичной диагональю. Вычислить числа обусловленности исходной матрицы и матриц ее факторизации, сравнить их и сделать выводы о точности решения системы линейных алгебраических уравнений по схеме единственного деления. Построить разложение конкретной матрицы в произведение нижней треугольной и верхней треугольной матриц с одинаковыми диагоналями. Вычислить числа обусловленности исходной матрицы и матриц ее факторизации, сравнить их и сделать выводы о точности решения системы линейных алгебраических уравнений по методу квадратного корня. Решить конкретные системы линейных алгебраических уравнений по схеме единственного деления и методу квадратного корня. Сформулировать метод (формулы) матричной прогонки для системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Решить конкретную систему методом прогонки (схема единственного деления). Оценка решения системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей со строгим диагональным преобладанием по строкам.
3. Дать определение элементарной матрицы вращения. Построить элементарную матрицу вращения $Q_{i,j}$ такую, что элемент $b_{i,j}$ матрицы $B = Q_{i,j}A$ равен нулю. Оценить объем арифметических действий построения QR разложения матрицы A порядка n с помощью элементарных матриц вращения. Дать определение элементарной матрицы отражения. Построить элементарную матрицу отражения H_j такую, что элементы $b_{i,j}$, $i = j+1, \ldots, n$, матрицы $B = H_jA$ равны нулю. Оценить объем арифметических действий построения HR разложения матрицы A порядка n с помощью элементарных матриц отражения.
4. Дать определения: стационарного итерационного метода для решения системы линейных алгебраических уравнений, приближения на k-ой итерации, ошибки (приближения) на k-ой итерации, невязки системы на k-ой итерации, матрицы шага (перехода) для ошибки, матрицы шага (перехода) для невязки, сходимости итерационного метода. Проверить достаточные условия сходимости для заданного итерационного метода. Применить теорему о необходимом и достаточном условии стационарного итерационного метода для заданного конкретного метода и системы уравнений. Исследовать применимость итерационных методов Якоби и Зейделя для заданной системы уравнений. Определить (или оценить) для заданной системы уравнений интервал значений параметра метода простой итерации, при которых метод сходится. Вычислить оптимальный параметр метода простой итерации для заданной системы уравнений. Вычислить оптимальный параметр метода неполной релаксации для заданной системы уравнений.
5. Для заданной вещественной, симметричной, положительно определенной матрицы A рассмотреть функционал $\Phi(z) = (Az, z)$. Для итерационного метода $x^{k+1} = x^k - \tau_k \cdot (Ax^k - b)$ определить: вектор ошибки на k-ой итерации, матрицы шага (перехода) для ошибки; параметр τ_k такой, что $\Phi(z^{k+1}) = \inf\limits_{\tau} \Phi(z^k - \tau \cdot Az^k)$. Для заданной вещественной, положительно определенной матрицы A рассмотреть функционал $\Phi(z) = (Az, Az)$. Для итерационного метода $x^{k+1} = x^k - \tau_k \cdot (Ax^k - b)$ определить: вектор невязки системы на k-ой итерации, матрицы шага (перехода) для невязки; параметр τ_k такой, что $\Phi(z^{k+1}) = \inf\limits_{\tau} \Phi(z^k - \tau \cdot Az^k)$, $z^k = x^k - x$. Доказать, что параметр τ_k в действительности выбирается из условия $\| r^{k+1} \|_2 = \inf\limits_{\tau} \| r^k - \tau \cdot Ar^k \|_2$, $r^k = Ax^k - b$. Для решения системы $Ax = b, \det A \neq 0$, исследовать сходимость итерационного метода

$x^{k+1} = x^k - \tau_k \cdot A^T \cdot (Ax^k - b)$: 1) при $\tau_k \equiv \tau \ \ \forall\, k$, 2) при τ_k таком, что $\| x^{k+1} - x \|_2 = \inf\limits_{\tau} \| (E - \tau \cdot A^T A) \cdot (x^k - x) \|_2$.

6. Для решения заданной системы $Ax = b,\ A = A^T > 0$, исследовать сходимость двухшагового итерационного метода $x^{k+1} = x^k - \tau_{k+1} \cdot (Ax^k - b)$ при $\tau_{k+2} \equiv \tau_k \ \ \forall\, k$. Сформулировать этот метод как одношаговый стационарный итерационный метод с двумя параметрами γ_1 и γ_2: $\underset{x^{2(k+1)}}{y^{k+1}} = \underset{x^{2k}}{y^k} - [\gamma_1 \cdot E + \gamma_2 \cdot A] \cdot (A \underset{x^{2k}}{y^k} - b)$. Выписать матрицы перехода для ошибки этих методов: $x^{2(k+1)} - x = S_\tau(A) \cdot (x^{2k} - x)$ и $y^{k+1} - x = S^{(\gamma)}(A) \cdot (y^k - x)$. Проверить, что $S^{(\gamma)}(A) \equiv E - \gamma_1 \cdot A - \gamma_2 \cdot A^2 = S_\tau(A) \equiv (E - \tau_2 \cdot A) \cdot (E - \tau_1 \cdot A)$, то есть параметры τ_1 и τ_2 равны обратным значениям корней полинома $S^{(\gamma)}(\lambda) \equiv E - \gamma_1 \cdot \lambda - \gamma_2 \cdot \lambda^2$. Найти полином $S^{(\gamma^*)}(\lambda)$: $\| S^{(\gamma^*)}(\lambda) \|_{C[\lambda_{\min}(A),\ \lambda_{\max}(A)]} = \min\limits_{\gamma} \| S^{(\gamma)}(\lambda) \|_{C[\lambda_{\min}(A),\ \lambda_{\max}(A)]}$. Вычислить его корни, определить параметры $\tau^* = (\tau_1^*,\ \tau_2^*)$ и оценить $\rho_{\tau^*}(S_{\tau^*}(A))$. Сформулировать m-шаговый метод $x^{k+1} = x^k - \tau_{k+1} \cdot (Ax^k - b)$ при $\tau_{k+m} \equiv \tau_k \ \ \forall\, k$ как одношаговый стационарный итерационный метод с m параметрами $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$: $\underset{x^{m(k+1)}}{y^{k+1}} = \underset{x^{2m}}{y^k} - [\gamma_1 \cdot E + \gamma_2 \cdot A + \ldots + \gamma_m \cdot A^{m-1}] \cdot (A \underset{x^{2m}}{y^k} - b)$. Выписать матрицы перехода для ошибки этих методов: $x^{m(k+1)} - x = S_\tau(A) \cdot (x^{mk} - x)$ и $y^{k+1} - x = S^{(\gamma)}(A) \cdot (y^k - x)$. Сформулировать задачу о поиске полинома $S^{(\gamma^*)}(\lambda)$, наименее уклоняющегося от нуля на интервале $[\lambda_{\min}(A),\ \lambda_{\max}(A)]$, изложить схему решения этой задачи. Графически проиллюстрировать чебышевский альтернанс – необходимое и достаточное условие решения этой задачи. Оценить $\| S_{\tau^*}(A) \|_2 \equiv \rho_{\tau^*}(S_{\tau^*}(A))$. Доказать, что $\| S_{\tau^*}(A) \|_A = \| S_{\tau^*}(A) \|_2$. Построить пример, когда $\| E - \tau_1^* \cdot A \|_2 > 1$. Изложить схему построения трехчленных формул реализации m-шагового метода Ричардсона с чебышевскими параметрами.

7. Для решения заданной системы $Ax = b,\ A = A^T > 0$, исследовать сходимость двухшагового итерационного метода $x^{k+1} = x^k - \tau_{k+1} \cdot (Ax^k - b) \equiv x + (E - \tau_{k+1} \cdot A) z^k,\ z^k = x^k - x$, когда параметры τ_{2k+1} и $\tau_{2(k+1)}$ вычисляются из условия минимизации функционала (энергетической нормы ошибки) после двух итераций $\Phi_{\tau_{2k+1},\ \tau_{2(k+1)}}(z^{2(k+1)}) = \| (E - \tau_{2(k+1)} \cdot A) \cdot (E - \tau_{2k+1} \cdot A) \cdot z^{2k} \|_A^2$ при заданном векторе z^{2k}. Построить формулы вычисления параметров τ_{2k+1} и $\tau_{2(k+1)}$. Доказать, что $\| z^{2(k+1)} \|_A \le \rho_{\tau^*}(S_{\tau^*}(A)) \cdot \| z^{2k} \|_A$, где $\tau^* = (\tau_1^*,\ \tau_2^*)$ – оптимальные чебышевские параметры метода Ричардсона. Рассмотреть m-шаговый итерационный метод $x^{m(k+1)} = x + (E - \tau_{mk+m} A) \cdot \ldots \cdot (E - \tau_{mk+2} A)(E - \tau_{mk+1} A) z^{mk}$, когда очередные m параметров $\tau_{mk+1}, \ldots, \tau_{m(k+1)}$ вычисляются из условия минимизации из условия минимизации функционала (энергетической нормы ошибки) после m итераций $\Phi_{\tau_{mk+1},\ \ldots,\ \tau_{mk+m}}(z^{m(k+1)}) = \| (E - \tau_{mk+m} \cdot A) \cdot \ldots \cdot (E - \tau_{mk+1} \cdot A) \cdot z^{2m} \|_A^2$ при заданном век-

торе z^{2k}. Построить систему уравнений для вычисления очередных m параметров τ_{mk+1}, …, $\tau_{m(k+1)}$. Доказать, что $\| z^{m(k+1)} \|_A \le \rho_{\tau^*}(S_{\tau^*}(A)) \cdot \| z^{mk} \|_A$, где $\tau^* = (\tau_1^*, ..., \tau_m^*)$ – оптимальные чебышевские параметры метода Ричардсона.
Доказать, что

$$\underbrace{z^{m(k+1)}}_{x^{m(k+1)}-x} = (E - \tau_{mk+m}A) \cdot ... \cdot (E - \tau_{mk+2}A)(E - \tau_{mk+1}A)z^{mk} =$$

$$= \underbrace{z^{mk}}_{x^{mk}-x} - (\gamma_{mk,1} \cdot g_{mk,1} + \gamma_{mk,m} \cdot g_{mk,m}),$$

система векторов $g_{mk,1}, ..., g_{mk,m}$ – любой базис линейной оболочки векторов $\underbrace{Az^{mk}}_{r^{mk}}, \underbrace{A^2 z^{mk}}_{Ar^{mk}}, ..., \underbrace{A^m z^{mk}}_{A^{m-1}r^{mk}}$. Построить систему уравнений для вычисления очередных m параметров $\gamma_{mk,1}$, …, $\gamma_{mk,m}$ итерационного метода

$$x^{m(k+1)} = x^{mk} - (\gamma_{mk,1} \cdot g_{mk,1} + \gamma_{mk,m} \cdot g_{mk,m}).$$

Построить A-ортогональный базис $\{g_{mk,1}, ..., g_{mk,m}\}$ линейной оболочки векторов $\underbrace{Az^{mk}}_{r^{mk}}, \underbrace{A^2 z^{mk}}_{Ar^{mk}}, ..., \underbrace{A^m z^{mk}}_{A^{m-1}r^{mk}}$. Построить систему уравнений для вычисления очередных m параметров $\gamma_{mk,1}$, …, $\gamma_{mk,m}$ итерационного метода в A-ортогональном базисе $\{g_{mk,1}, ..., g_{mk,m}\}$: $x^{mk+j} = x^{mk+j-1} - \gamma_{mk,j} \cdot g_{mk,j}$, $j = 1, ..., m;\ k = 0, 1, ...$ Доказать ортогональность невязки $r^{mk+j} \equiv Ax^{mk+j} - b = r^{mk+j-1} - \gamma_{mk,j} \cdot Ag_{mk,j}$ векторам $g_{mk,1}, ..., g_{mk,j-1}$. Построить трехчленные формулы метода сопряженных градиентов.

8. Характеристический полином

$$P(\lambda) = \det\,(A - \lambda \cdot E) \equiv p_n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + p_0\lambda^0 =$$
$$= p_n(\lambda - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

квадратной матрицы A порядка n, где $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – его корни (собственные числа матрицы A). Построить формулы вычисления коэффициентов $p_0, ..., p_n$: вычислите определители $P(k) = \det\,(A - k \cdot E),\ k = 0, 1, ..., n$, постройте полином $P(\lambda)$ по его значениям $\{P(x_k),\ x_k = k\}_{k=0}^n$ в форме Лагранжа: $P(\lambda) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(\lambda)}{(\lambda - x_k) \cdot \omega'(x_k)} P(x_k)$, где $\omega(\lambda) = (\lambda - x_0) \cdot (\lambda - x_1) \cdot ... \cdot (\lambda - x_n)$. Непрерывная зависимость его корней от коэффициентов матрицы A.

9. Для заданной симметричной, положительно определенной матрицы A второго порядка вычислить $\rho_{x^0 \ne 0}(A) = \lim_{k\to\infty} \frac{\| A^{k+1}x^0 \|_2}{\| A^k x^0 \|_2}$ и вектор $x_{x^0 \ne 0}(A) = \lim_{k\to\infty} \frac{A^k x^0}{\| A^k x^0 \|_2}$. Доказать, что $A \cdot x_{x^0 \ne 0}(A) = \rho_{x^0 \ne 0}(A) \cdot x_{x^0 \ne 0}(A)$. Доказать, что для последовательности векторов $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ степенного метода приближенного вычисления максимального собственного значения и соответствующего ему собственного вектора симметричной, положительно определенной матрицы: $x^{k+1} = A \frac{x^k}{\| x^k \|_2}$ существуют пределы: $\lambda_{\max}(A) = \lim_{k\to\infty} \| x^k \|_2$ и

$x_{max}(A) = \lim_{k\to\infty} \frac{x^k}{\| x^k \|_2}$. Доказать, что минимальное собственное число $\lambda_{min}(A)$ симметричной, положительно определенной матрицы A определяется по формуле $\lambda_{min}(A) = \rho - \lambda_{max}(\rho \cdot E - A), \quad \forall\, \rho \ge \lambda_{max}(A)$. Доказать, что для последовательности векторов $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ степенного метода приближенного вычисления минимального собственного значения и соответствующего ему собственного вектора симметричной, положительно определенной матрицы: $x^{k+1} = (\rho \cdot E - A)\frac{x^k}{\| x^k \|_2}$ существуют пределы: $\lambda_{min}(A) = \rho - \lim_{k\to\infty} \| x^k \|_2,\; x_{min} = \lim_{k\to\infty} \frac{x^k}{\| x^k \|_2}$ – минимальное собственное число и соответствующий ему собственный вектор матрицы A.

10. Сформулировать метод для вычисления собственного числа $\lambda_{n-1}(A) \le \lambda_n(A) = \lambda_{max}(A)$.
11. Закон инерции для симметричной матрицы $A = LDL^T$ (D – диагональная матрица):
    $\sigma_-(A)$ = количество отрицательных диагональных элементов матрицы D,
    $\sigma_0(A)$ = количество нулевых диагональных элементов матрицы D,
    $\sigma_+(A)$ = количество положительных диагональных элементов матрицы D,
    эти числа (сигнатура $<\sigma_-(A), \sigma_0(A), \sigma_+(A)>$) не зависят от матрицы L.

    Вычислить сигнатуру заданной матрицы A и доказать, что $\sigma_-(A)$ (количество отрицательных собственных чисел симметричной матрицы A) = числу перемен знака в последовательности $\{1, \det A_1, ..., \det A_n\}$, где $A_k = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{k}$.
12. Привести заданную симметричную матрицу к трехдиагональному виду ортогональным преобразованием подобия (с помощью элементарных матриц вращения).
13. Якобиевая симметричная матрица, свойства последовательности ее главных миноров, теорема о количестве ее отрицательных собственных значений, простота собственных значений. Схема метода деления пополам (метода бисекций) приближенного вычисления i-того собственного значения якобиевой матрицы, вычисление соответствующего ему собственного вектора.
14. Метод Якоби. Инвариантность суммы квадратов элементов матрицы при умножении ее на ортогональную матрицу: S(A)=S(QA)=S(AQ). Изменение суммы квадратов внедиагональных элементов матрицы при ортогональном преобразовании подобия с помощью элементарных матриц вращения. Формулы элементов матрицы вращения. Оценка сходимости к нулю сумм квадратов внедиагональных элементов последовательности матриц метода вращения. Оценка точности приближения собственных значений. Оценка точности приближения собственных векторов (случай простых собственных значений).

Типичные вопросы и экзаменационные билеты

БИЛЕТ № 1

1. Теорема о LDU разложении матрицы A порядка n:
   а) сформулировать достаточные условия для разложения A=LDU, где L и U – треугольные матрицы с единичной диагональю, D – диагональная матрица;
   б) доказать теорему.

2. Сходится ли итерационный процесс

$$x^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \cdot x^k + b \equiv Cx^k + b$$

к решению системы $(E-C)x = b$ при $x^k \to x$?

а) какого типа этот итерационный процесс;

б) условие его сходимости;

в) примените лемму Гершгорина для проверки условия сходимости.

БИЛЕТ № 2

1. Число обусловленности матрицы:
   а) сформулируйте определение матричной нормы, подчиненной заданной векторной норме,
   б) дайте определение числа обусловленности невырожденной квадратной матрицы A и докажите его свойства:
   $\mathrm{cond}\,A \ge 1,\ \mathrm{cond}(AB) \le \mathrm{cond}\,A \cdot \mathrm{cond}\,B$.

2. Определить количество положительных собственных чисел матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

а) дайте определение якобиевой матрицы,

б) сформулируйте свойства ее собственных значений и теорему о ЧПЗ, примените теорему для решения задачи.

БИЛЕТ № 3

1. Метод исключения неизвестных (метод Гаусса):
   а) условия применимости,
   б) схема единственного деления.

2. Вычислить собственный вектор для собственного значения $\lambda = 0$ якобиевой матрицы (её определение, свойства собственных значений и векторов)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

БИЛЕТ № 4

1. Определите количество отрицательных собственных значений матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

а) дайте определение якобиевой матрицы,

б) сформулируйте свойства ее собственных значений и теорему о ЧПЗ, примените теорему для решения задачи.

2. Привести к трехдиагональному виду матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ортогональным преобразованием подобия (используя элементарные матрицы вращения)

БИЛЕТ № 5

1. Постройте формулы метода прогонки (схема единственного деления метода Гаусса) для системы $Ax = b$ с трехдиагональной матрицей A, сформулируйте условие его применимости.

2. Сходится ли метод наискорейшего спуска для решения системы $Ax = b$ с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

а) напишите формулы метода (как они получены?),
б) сформулируйте и проверьте достаточные условия сходимости.

БИЛЕТ № 6

1. Стационарный одношаговый итерационный метод для решения системы $Ax = b$:
а) определение: метода, вектора ошибки и матрицы шага для ошибки, вектора невязки и матрицы шага для невязки, сходимости метода;
б) сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии сходимости стационарного итерационного метода и докажите необходимое условие.

2. Привести к трехдиагональному виду матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ортогональным преобразованием подобия (используя элементарные матрицы вращения)

БИЛЕТ № 7

1. Метод простой итерации (одношаговый метод Ричардсона) для решения системы $Ax = b$ с $A = A^* > 0$:
а) формулировка метода,
б) достаточное условие на параметр τ сходимости метода,
в) выбор оптимального параметра с доказательством.

2. Построить LU – разложение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

БИЛЕТ № 8

1. Формулировка и достаточные условия сходимости метода Якоби для решения системы линейных уравнений $Ax = b$ ($Ax \equiv [D + (A - D)] \cdot x = b,\ D = \mathrm{diag}\ A$).

2. Построить LU – разложение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

БИЛЕТ № 9

1. Теорема о достаточном условии сходимости итерационного метода $B(x^{k+1} - x^k) = -\tau \cdot (Ax^k - b)$ с симметричными положительно-определенными матрицами A и B:
   а) определение положительно-определенных матриц, какую норму порождает матрица A,
   б) сформулируйте теорему об убывании функционала ошибки,
   в) докажите, что $\| z^{k+1} \|_A < \| z^k \|_A$, если $B > 0.5 \cdot \tau \cdot A$

2. Решить методом прогонки систему (схема единственного деления метода Гаусса для системы с трехдиагональной матрицей)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

БИЛЕТ № 10

1. Сформулируйте метод Зейделя (полной релаксации) для решения систем с симметричными, положительно определенными матрицами.

2. Исследуйте на положительную определенность матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

   а) сформулируйте условия положительной определенности симметричной матрицы,
   б) сформулируйте критерий Сильвестра положительности собственных значений симметричной матрицы.

БИЛЕТ № 11

1. Метод исключения неизвестных для решения системы $Ax = b$ с выбором главного элемента по столбцу.

2. Найти оптимальный параметр итерационного метода

$$x^{k+1} = x^k - \tau \cdot (Ax^k - b), \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

БИЛЕТ № 12

1. Метод наискорейшего спуска для решения системы $Ax = b$ с симметричной положительно-определенной матрицей:
   а) определение положительно-определенной матрицы, какую норму порождает матрица A,
   б) постройте формулы метода,
   в) сформулируйте теорему об убывании функционала ошибки и примените ее для доказательства сходимости.

2. Сходится ли к решению системы $Ax = b$ итерационный метод
$$x^{k+1} = x^k - 0.5\cdot(Ax^k - b), \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
(сформулируйте и примените теорему о необходимом достаточном условии сходимости стационарного итерационного метода)

БИЛЕТ № 13

1. Метод минимальных невязок для решения системы $Ax = b$ с $A > 0$:
   а) определение положительно-определенной матрицы, как установить положительную определенность несимметричной матрицы?
   б) постройте формулы метода,
   в) сформулируйте теорему об убывании функционала ошибки и примените ее для доказательства сходимости.

2. Решить методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу систему
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

БИЛЕТ № 14

1. Исследуйте сходимость одношагового метода Ричардсона $x^{k+1} = x^k - \tau\cdot(Ax^k - b)$ к решению системы $Ax = b$ с $A^* = A > 0$:
   а) сформулируйте необходимое и достаточное условие сходимости стационарного итерационного метода,
   б) при каких значениях параметра τ оно выполняется?
   в) определите оптимальный параметр $\tau = \tau_{опт}$ и вычислите постоянную ρ_0 неравенства $\| z^{k+1} \|_2 \le \rho_0 \cdot \| z^k \|_2$.

2. Применим ли степенной метод приближенного вычисления максимального собственного значения матрицы
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}?$$

БИЛЕТ № 15

1. Постройте и исследуйте сходимость метода наискорейшего спуска $x^{k+1} = x^k - \tau_k \cdot (Ax^k - b)$ к решению системы $Ax = b$ с $A^* = A > 0$:

   а) что нужно минимизировать для определения параметра τ_k?

   б) выведите формулу вычисления параметра τ_k,

   в) как оценка $\| z^{k+1} \|_2 \le \rho_0 \cdot \| z^k \|_2$ сходимости одношагового метода Ричардсона $x^{k+1} = x^k - \tau_{опт} \cdot (Ax^k - b)$ применяется для доказатель-ства оценки $\| z^{k+1} \|_A \le \rho_0 \cdot \| z^k \|_A$ сходимости метода наискорейшего спуска.

2. Привести ортогональным преобразованием подобия к трехдиагональному виду матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

БИЛЕТ № 16

1. Определение и критерии положительной определенности симметричной матрицы:

   а) доказать неравенство $\lambda_{min}(A) \cdot E \le A \le \lambda_{max}(A) \cdot E$,

   б) сформулировать и доказать критерий Сильвестра: если $\forall \det A_k > 0$, то $A > 0$.

2. Применим ли метод наискорейшего спуска для решения системы (сформулируйте метод и условие его сходимости)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

БИЛЕТ № 17

1. Сформулируйте метод Якоби (вращений) для приближенного вычисления собственных значений самосопряженной матрицы.

2. При каких τ сходиться итерационный процесс

$$x^{k+1} = x^k - \tau \cdot (Ax^k - b) \ , \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

БИЛЕТ № 18

1. Сформулируйте и докажите сходимость степенного метода приближенного вычисления максимального собственного значения самосопряженной положительно-определенной матрицы.

2. Сходиться ли метод минимальных невязок для решения системы Ax = b (сформулируйте метод и условие его сходимости),

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

БИЛЕТ № 19

1. Сформулируйте и докажите сходимость метода Якоби для решения системы $Ax = b$ с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Вычислите постоянную в оценке $\| z^{k+1} \|_\infty \le q \cdot \| z^k \|_\infty$ сходимости метода.

2. Определить количество положительных собственных чисел матрицы (сформулируйте и примените теорему о ЧПЗ метода деления пополам)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

БИЛЕТ № 20

1. Метод минимальных невязок $x^{k+1} = x^k - \tau_k \cdot (Ax^k - b)$ для решения системы $Ax = b$ с $A > 0$:
   а) определение положительно-определенных матриц (как установить положительную определенность несимметричной матрицы?),
   б) выведите формулу вычисления параметра τ_k (что нужно минимизировать?),
   в) сформулируйте теорему об убывании функционала ошибки и примените ее для доказательства сходимости метода.

2. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

БИЛЕТ № 21

1. Постройте формулы метода полной релаксации для решения систем линейных уравнений с симметричной положительно-определенной матрицей.

2. Применим ли степенной метод приближенного вычисления максимального собственного значения матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 \end{bmatrix}$$

БИЛЕТ № 22

1. Изложите схему построения метода деления пополам приближенного вычисления собственных значений симметричной матрицы.

2. Решить систему методом Гаусса (прогонкой)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

БИЛЕТ № 23

1. Схема единственного деления исключения неизвестных для решения системы $Ax = b$.

2. Определить количество шагов метода деления пополам (бисекций) для вычисления $\lambda_{max}(A)$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

БИЛЕТ № 24

1. Решение системы линейных уравнений методом вращений (QR - разложение матрицы).

2. Найти оптимальный параметр метода простой итерации (Ричардсона)

$$x^{k+1} = x^k - \tau \cdot (Ax^k - b) \ , \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

БИЛЕТ № 25

1. Теорема о необходимом и достаточном условии сходимости стационарного итерационного метода.

2. Сходится ли итерационный процесс (примените теорему о необходимом и достаточном условии сходимости стационарного итерационного метода и лемму Гершгорина)

$$x^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \cdot x^k + f \quad ?$$

БИЛЕТ № 26

1. Метод Якоби для решения системы уравнений, достаточное условие сходимости (лемма Гершгорина).

2. Определить количество положительных собственных чисел матрицы (сформулируйте и примените теорему о ЧПЗ якобиевой матрицы)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

БИЛЕТ № 27

1. Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

2. Определить количество отрицательных собственных значений якобиевой матрицы (сформулируйте определение, свойства якобиевой матрицы и теорему о ЧПЗ)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

БИЛЕТ № 28

1. Метод простой итерации (Ричардсона) для решения системы Ax=b ($A = A^* > 0$): формулы и выбор оптимального параметра.

2. Оценить границы спектра (множества собственных значений) матрицы (сформулируйте определение и свойства якобиевой матрицы, лемму Гершгорина)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

БИЛЕТ № 29

1. Построить и доказать сходимость метода полной релаксации для систем с симметричными, положительно-определенными матрицами.

2. Определить количество отрицательных собственных чисел матрицы (сформулируйте и примените теорему о ЧПЗ якобиевой матрицы)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

БИЛЕТ № 30

1. Метод минимальных невязок, сходимость для систем с положительно определенными матрицами.

2. Привести к трехдиагональному виду ортогональным преобразованием подобия матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

(*а*) *основная литература*

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.: Наука, 1975.
2. Коновалов А.Н. Введение в вычислительные методы линейной алгебры.- Новосибирск: ВО "Наука", Сибирская издательская фирма, 1993.
3. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. - М.: Л.: Физматгиз, 1963.

(*б*) *дополнительная литература*

1. Воеводин В.В. Вычислительнные основы линейной алгебры. - М.: Наука, 1977.
2. Годунов С.К. Решение систем линейных уравнений. - Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1980.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.

(*в*) *программное обеспечение и Интернет-ресурсы*

1. http://www.nsu.ru/mmf/

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины «Вычислительные методы линейной алгебры»

Доступ к компьютеру со стандартным программным обеспечением для математических расчетов.

Рецензент (ы) ___________________________

Программа одобрена на заседании ____

(Наименование уполномоченного органа вуза (УМК, НМС, Ученый совет)

от ____________ года.