МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Новосибирский государственный университет» (НГУ)

Механико-математический факультет

ТОЛКОВЫЙ СЛОВАРЬ
терминов по курсу «Вычислительные методы линейной алгебры»

Основная образовательная программа подготовки бакалавров
ММФ НИУ-НГУ (Новосибирск, Россия) – Хэйлунцзянский университет (Харбин, Китай)

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ
010100 «Математика»
ПРОФИЛЬ
«Математика и прикладная математика»

Квалификация (степень) выпускника
Бакалавр

Форма обучения очная

Новосибирск
2014

Толковый словарь терминов по курсу «Вычислительные методы линейной алгебры» разработан в соответствии с требованиями к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированного бакалавра по профессиональному циклу дисциплин (базовая часть) по направлению подготовки «Математика», а также задачами, стоящими перед Новосибирским государственным университетом по реализации Программы развития НГУ как национального исследовательского института и сотрудничества с Хэйлунцзянским университетом (Харбин, Китайская народная республика).
Порядок следования статей «Толкового словаря терминов по курсу «Вычислительные методы линейной алгебры» соответствует порядку определения и упоминания терминов в тексте лекций по курсу «Вычислительные методы линейной алгебры». В статьях «Толкового словаря терминов по курсу «Вычислительные методы линейной алгебры» использовалась информация из статей свободной энциклопедии «Википедия»: http://ru.wikipedia.org/.

Автор:
Мацокин Александр Михайлович, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры Вычислительной математики.

Механико-математический факультет
Кафедра Вычислительной математики

Русский алфавит (33 буквы)

Буква	Название буквы	Буква	Название буквы	Буква	Название буквы	Буква	Название буквы	Буква	Название буквы
А а	а	*Ж ж*	жэ	*Н н*	эн	*Ф ф*	эф	*Ы ы*	ы
Б б	бэ	*З з*	зэ	*О о*	о	*Х х*	ха	*Ь ь*	мягкий знак
В в	вэ	*И и*	и	*П п*	пэ	*Ц ц*	цэ	*Э э*	э
Г г	гэ	*Й й*	и краткое	*Р р*	эр	*Ч ч*	че	*Ю ю*	ю
Д д	дэ	*К к*	ка	*С с*	эс	*Ш ш*	ша	*Я я*	я
Е е	е	*Л л*	эль	*Т т*	тэ	*Щ щ*	ща		
Ё ё	йо	*М м*	эм	*У у*	у	*Ъ ъ*	твердый знак		

Латинский алфавит (26 букв)

Буква	Название буквы	Буква	Название буквы	Буква	Название буквы
A a	а	*J j*	жи	*S s*	эс
B b	бэ	*K k*	ка	*T t*	тэ
C c	цэ	*L l*	эль	*U u*	у
D d	дэ	*M m*	эм	*V v*	вэ
E e	е	*N n*	эн	*W w*	дубль-вэ
F f	эф	*O o*	о	*X x*	икс
G g	жэ	*P p*	пэ	*Y y*	игрек
H h	аш	*Q q*	ку	*Z z*	зэт
I i	и	*R r*	эр		

Греческий алфавит (24 буквы)

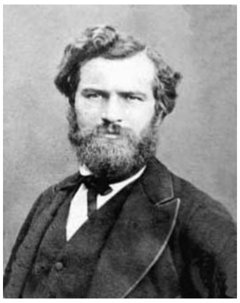
Буква	Название буквы	Буква	Название буквы	Буква	Название буквы
$A\ \alpha$	альфа	$I\ \iota$	йота	$P\ \rho$	ро
$B\ \beta$	бета	$K\ \kappa$	каппа	$\Sigma\ \sigma$	сигма
$\Gamma\ \gamma$	гамма	$\Lambda\ \lambda$	лямбда	$T\ \tau$	тау
$\Delta\ \delta$	дельта	$M\ \mu$	мю	$\Upsilon\ \vartheta$	ипсилон
$E\ \varepsilon$	эпсилон	$N\ \nu$	ню	$\Phi\ \varphi$	фи
$Z\ \zeta$	дзэта	$\Xi\ \xi$	кси	$X\ \chi$	хи
$H\ \eta$	эта	$O\ o$	омикрон	$\Psi\ \psi$	пси
$\Theta\ \vartheta$	тэта	$\Pi\ \pi$	пи	$\Omega\ \omega$	омега

Фаддеев Дмитрий Константинович (30.06.1907 – 20.10.1989) – советский математик, член-корреспондент Академии наук СССР, Основные работы по теории чисел, алгебре, вычислительной математике. В области приближенных и численных методов большинство работ учёного принадлежит к прикладным задачам линейной алгебры.

Фаддеева Вера Николаевна (20.09.1906 – 15.04.1983) – известный ученый по численным методам линейной алгебры. Ею была написана первая в мировой литературе монография на эту тему (1950 г.). Позднее эта монография была ею существенно расширена в сотрудничестве с Дмитрием Константиновичем Фаддеевым; новая монография была переведена на многие языки. Помимо этой уникальной книги, супруги Фаддеевы выполнили ряд значительных работ по численным методам линейной алгебры.

Уникальная монография ленинградских ученых (супругов Д.К. Фаддеева и В.Н. Фаддеевой) – практически лучший учебник по вычислительным методам линейной алгебры до настоящего времени. Монография посвящена изложению вычислительных методов для решения основных задач линейной алгебры: решение системы линейных уравнений, обращение матрицы, решений полной и частичной проблем собственных значений.

Прямоугольная матрица	$n \times m$ таблица вещественных или комплексных чисел $$A_{n,m} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} \equiv (a_{i,j})_{i=1,\ j=1}^{n\quad m}$$ из n строк и m столбцов.
Квадратная матрица	квадратная $n \times n$ таблица вещественных или комплексных чисел $$A_{n,n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \equiv (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$$ из n строк и n столбцов.
Определитель (детерминант) квадратной матрицы A	$\det A$.
Обратная матрица	если $\det A \neq 0$, то $\exists\ A^{-1}:\ \ A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$.
Вектор-столбец	$n \times 1$ таблица вещественных или комплексных чисел $$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ из n строк и 1-го столбца.
Вектор-строка	$1 \times n$ таблица вещественных или комплексных чисел $$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$$ из 1-ой строки и n столбцов.
Собственное число (значение) λ **и собственный вектор** $\vec{x} \neq 0$ **квадратной матрицы** A	решение спектральной задачи $A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$.
Характеристический полином квадратной матрицы A	$P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E)$, корни полинома $P(\lambda)$ являются собственными числами матрицы A.
Спектр $Sp(A)$ **квадратной матрицы** A	множество собственных чисел матрицы A.

Спектральный радиус $\rho(A)$ **квадратной матрицы** A	$\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in Sp(A)} \lvert \lambda \rvert .$
Гершгорин	 Семён Аронович Гершгорин (24.08.1901 – 30.05.1933) – советский математик, работал в области прикладной математики, автор замечательных теорем о локализации собственных чисел произвольной квадратной матрицы.
Круги Гершгорина квадратной матрицы A	множество точек на комплексной плоскости C: $S_i = \{z = x + \underline{i} \cdot y : \ \lvert z - a_{i,i} \rvert \le R_i\}$ где $a_{i,i}$ – диагональный элемент матрицы A, $R_i = \lvert a_{i,1} \rvert + ... + \lvert a_{i,i-1} \rvert + \lvert a_{i,i+1} \rvert + ... + \lvert a_{i,n} \rvert$ – сумма модулей остальных элементов i-той строки матрицы, называется i-тым кругом Гершгорина с центром в точке $a_{i,i} \in C$ и радиусом R_i.
Лемма Гершгорина о локализации собственных чисел матрицы A	множество $Sp(A)$ собственных чисел матрицы A принадлежит объединению кругов Гершгорина: $Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i$.
Преобразование подобия квадратной матрицы A	вычисление матрицы $\Lambda = Q^{-1}AQ$, где Q – матрица преобразования подобия.
Жордан	 Мари Энмон Камиль (Камилл) Жордан (Marie Ennemond Camille Jordan, 5 января 1838 – 22 января 1922) – французский математик, известный благодаря своим фундаментальным работам в теории групп и «Курсу анализа». Он родился в Лионе и учился в Политехнической школе. По образованию Жордан был инженером; позже он преподавал в Политехнической школе и Коллеж де Франс.

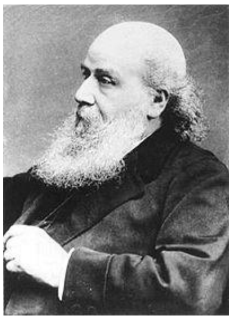
Жорданова форма квадратной матрицы A	существует матрица Q преобразования подобия матрицы A такая, что $\Lambda = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \Lambda_m \end{bmatrix}$, где $\Lambda_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$, $\lambda_k \in \mathrm{Sp}(A)$.
Жорданова форма квадратной матрицы A	$\forall\ \varepsilon > 0$ существует матрица Q_ε преобразования подобия матрицы A такая, что $\Lambda_\varepsilon = Q_\varepsilon^{-1}AQ_\varepsilon = \begin{bmatrix} \Lambda_{1,\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \Lambda_{m,\varepsilon} \end{bmatrix}$, где $\Lambda_{k,\varepsilon} = \begin{bmatrix} \lambda_k & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$, $\lambda_k \in \mathrm{Sp}(A)$.
Транспонированная матрица	матрица $C_{m,n} \equiv (A_{n,m})^T$ называется транспонированной к матрице $A_{n,m}$: $A_{n,m} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$, $(A_{n,m})^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,m} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$.
Симметричная матрица	квадратная матрица $A_{n,n}$ называется симметричной, если $A_{n,n} = (A_{n,n})^T$.

Сопряженная матрица	матрица $C_{m,n} \equiv (A_{n,m})^*$ называется сопряженной к матрице $A_{n,m}$: $$A_{n,m} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}, \quad (A_{n,m})^* = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1,1} & \dots & \bar{a}_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{1,m} & \dots & \bar{a}_{n,m} \end{bmatrix}.$$
Самосопряженная матрица	квадратная матрица $A_{n,n}$ называется самосопряженной, если $$A_{n,n} = (A_{n,n})^*.$$
Жорданова форма самосопряженной матрицы A	существует унитарная (ортогональная) матрица Q $(Q^{-1} = Q^*)$ преобразования подобия матрицы A такая, что $\Lambda = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, где $\lambda_k \equiv \mathrm{Re}\lambda_k \in \mathrm{Sp}(A)$ – собственные числа матрицы.
Векторное пространство	множество всех векторов $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.
Норма вектора (векторная норма)	число $\Vert \vec{x} \Vert$: 1. $\Vert \vec{x} \Vert \ge 0$, $\Vert \vec{x} \Vert = 0 \iff \vec{x} = 0$; 2. $\Vert \alpha \cdot \vec{x} \Vert = \vert \alpha \vert \cdot \Vert \vec{x} \Vert$, $\forall\, \alpha$, 3. $\Vert \vec{x} + \vec{y} \Vert \le \Vert \vec{x} \Vert + \Vert \vec{y} \Vert \quad \forall\, \vec{x}, \vec{y}$.
Евклид	 Εὐκλείδης (~ 300 год до н. э.) – древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике.
Евклидова норма вектора	число $\Vert \vec{x} \Vert_2 = \sqrt{\vert x_1 \vert^2 + \ldots + \vert x_n \vert^2}$ – длина вектора.

Норма матрицы A, подчинённая векторной норме $\lVert \vec{x} \rVert$	число $\lVert A \rVert = \max\limits_{\vec{x}\neq 0} \dfrac{\lVert A\vec{x} \rVert}{\lVert \vec{x} \rVert}$: 1. $\lVert A \rVert \geq 0$, $\lVert A \rVert = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$; 2. $\lVert \alpha \cdot A \rVert = \lvert \alpha \rvert \cdot \lVert A \rVert$, $\forall\, \alpha$, 3. $\lVert A + B \rVert \leq \lVert A \rVert + \lVert B \rVert$; $\Rightarrow$ 4. $\lVert A \cdot B \rVert \leq \lVert A \rVert \cdot \lVert B \rVert$.
Норма матрицы A, подчинённая евклидовой векторной норме $\lVert \vec{x} \rVert_2$	число $\lVert A \rVert_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}$.
Чебышев	 Пафну́тий Льво́вич Чебышев (16.05.1821 – 8.12.1894) – великий русский математик и механик.
Чебышевская норма вектора	число $\lVert \vec{x} \rVert_1 = \lvert x_1 \rvert + \ldots + \lvert x_n \rvert$.
Равномерная норма вектора	число $\lVert \vec{x} \rVert_\infty = \max\limits_{1\leq k\leq n} \lvert x_k \rvert$.
Число обусловленности матрицы A	число $\operatorname{Cond} A = \lVert A \rVert \cdot \lVert A^{-1} \rVert$.
Скалярное произведение векторов	число $(\vec{x}, \vec{y})$: 1. $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0 \;\; \forall\, \vec{x}$, $\quad (\vec{x}, \vec{x}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{x} = 0$; 2. $(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{(\vec{y}, \vec{x})} \;\; \forall\, \vec{x}, \vec{y}$; 3. $(\alpha \cdot \vec{x}, \vec{y}) = \alpha \cdot (\vec{x}, \vec{y}) \;\; \forall\, \alpha, \vec{x}, \vec{y}$; 4. $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z}) \;\; \forall\, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.
Евклидово скалярное произведение векторов	число $(\vec{x}, \vec{y})_2 = x_1 \cdot \overline{y}_1 + x_2 \cdot \overline{y}_2 + \ldots + x_n \cdot \overline{y}_n$.

<table>
<tr><td>Лагранж</td><td></td><td>Жозе́ф Луи́ Лагра́нж (Joseph Louis Lagrange, 25.01.1736 – 10.04.1813) – французский математик, механик и астроном.
Внёс грандиозный вклад в развитие анализа, теории чисел, теории вероятностей и численных методов, создал вариационное исчесление.</td></tr>
<tr><td>Тождество Лагранжа</td><td colspan="2">$(A\vec{x},\, \vec{y})_2 \equiv (\vec{x},\, A^*\vec{y})_2 \quad \forall\ \vec{x}, \vec{y}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
Виктор Яковлевич Буняко́вский (15.12.1804 – 12.12.1889) – российский математик украинского происхождения, вице-президент Российской академии наук (1864—1889).

Огюсте́н Луи́ Коши́ (21.08.1789 – 23.05.1857) – великий французский математик и механик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.</td></tr>
<tr><td>Неравенство Коши́-Буняко́вского</td><td colspan="2">связывает скалярное произведение $(\vec{x},\, \vec{y})$ и норму $\|\vec{x}\| \equiv \sqrt{(\vec{x},\, \vec{x})}$ векторов:
$|(\vec{x},\, \vec{y})| \le \sqrt{(\vec{x},\, \vec{x})} \cdot \sqrt{(\vec{y},\, \vec{y})}$.</td></tr>
<tr><td>Эрмит</td><td></td><td>Шарль Эрми́т (Charles Hermite; 24.12.1822 – 14.01.1901) – французский математик. Член Парижской академии наук с 1856 года, член-корреспондент (1857) и почётный член (1895) Петербургской академии наук и иностранный член Лондонского королевского общества (1873).</td></tr>
<tr><td>Эрмитова (квадратичная) форма матрицы $A = A^*$</td><td colspan="2">функция $(A\vec{x},\, \vec{x})_2 : \forall\ \vec{x}$
$\lambda_{\min}(A)\cdot(\vec{x},\, \vec{x})_2 \le (A\vec{x},\, \vec{x})_2 \le \lambda_{\max}(A)\cdot(\vec{x},\, \vec{x})_2$,
где $\lambda_{\min} = \min\limits_{\lambda\in Sp(A)} \lambda$, $\lambda_{\max} = \max\limits_{\lambda\in Sp(A)} \lambda$.</td></tr>
</table>

Положительно-определенная матрица $A > 0$	квадратная матрица $A = A^*$ называется положительно определенной $(A > 0)$ в пространстве комплексных векторов, если $(A\vec{x}, \vec{x})_2 > 0 \;\; \forall \; \vec{x} \neq 0$. Вещественная квадратная матрица $A = A^*$ называется положительно определенной $(A > 0)$ в пространстве вещественных векторов, если $(A\vec{x}, \vec{x})_2 > 0 \;\; \forall \; \vec{x} \neq 0$; $A > 0 \;\Leftrightarrow\; C \equiv A + A^T = C^* > 0$.
Энергетическое скалярное произведение	$(\vec{x}, \vec{y})_A \equiv (A\vec{x}, \vec{y})_2, \;\; A = A^* > 0$.
Энергетическая векторная норма	$\lVert \vec{x} \rVert_A = \sqrt{(\vec{x}, \vec{y})_A}, \;\; A = A^* > 0$.
Главный минор квадратной матрицы	$\det A_k \equiv \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{bmatrix}$ – главный минор матрицы $A_{n,n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \equiv (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$.
Сильвестр	 Джеймс Джозеф Сильвестр (*James Joseph Sylvester*; 3.10.1814 – 15.03.1897) – английский математик, известен своими работами в теории матриц, теории чисел и комбинаторики. Основатель американского математического журнала.
Критерий Сильвестра	Собственные числа самосопряженной матрицы положительны тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны.
Система линейных алгебраических уравнений	$A\vec{x} = \vec{b}$, где $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ – заданная квадратная матрица, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ – заданный, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ – неизвестный векторы.

Прямые методы решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$	формулы, алгоритмы вычисления решения системы за конечное число арифметических действий (операций).
Крамер	 Габриэ́ль Кра́мер (*Gabriel Cramer*, 31.07.1704 – 4.01.1752)) – швейцарский математик, один из создателей линейной алгебры.
Метод Крамера решения системы линейных алгебраических уравнений $A\vec{x}=\vec{b}$	формулы для неизвестных x_k системы $A\vec{x}=\vec{b}$: $x_k=\dfrac{1}{\det A}\cdot\det A^{(k)}$, где матрица $A^{(k)}$ получена заменой k-го столбца матрицы A на вектор $\vec{b}$.
Нижне-треугольная матрица	квадратная $n\times n$ матрица $L=\begin{bmatrix} l_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & \dots & l_{n,n}\end{bmatrix}$ с нулевыми элементами выше главной диагонали.
Верхне-треугольная матрица	квадратная $n\times n$ матрица $U=\begin{bmatrix} u_{1,1} & \dots & u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & u_{n,n}\end{bmatrix}$ с нулевыми элементами ниже главной диагонали.
Гаусс	 Карл Фридрих Гаусс (30.04.1777 – 23.02.1855) – немецкий математик, механик, физик и астроном, величайший математик всех времён, «король математиков». Лауреат медали Копли (1838), иностранный член Шведской (1821) и Российской (1824) Академий наук, английского Королевского общества.
Методы Гаусса исключения неизвестных системы линейных алгебраических уравнений $A\vec{x}=\vec{b}$	построение разложения $A=L\cdot U$ и последующее решение систем: $L\vec{y}=\vec{b}$, $U\vec{x}=\vec{y}$, где L – нижняя треугольная, U – верхняя треугольная матрицы.

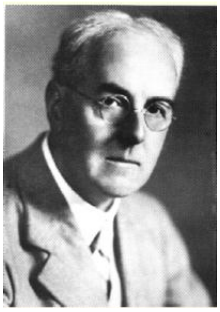
Методы Гаусса исключения неизвестных системы линейных алгебраических уравнений $\mathrm{A}\vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{b}}$: схема единственного деления	построение разложения $A = L \cdot U$ и последующее решение систем: $L\vec{y} = \vec{b}$, $U\vec{x} = \vec{y}$, где L – нижняя треугольная матрица, U – верхняя треугольная матрица, диагональные элементы которой равны единице.
Холесский	 Андре-Луи Холесский (Andre-Louis Cholesky, 15.10.1875 – 31.08.1918) – французский военный офицер и математик.
Разложение Холесского (метод квадратного корня)	разложение матрицы системы $\mathrm{A}\vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{b}}$ в виде $A = L \cdot L^*$ и последующее решение систем: $L\vec{y} = \vec{b}$, $L^*\vec{x} = \vec{y}$, где L – нижняя треугольная матрица с положительными диагональнами элементами.
Элементарная матрица вращения (поворота)	ортогональная матрица $Q_{k,l}$, элементы которой равны элементам единичной матрицы за исключением двух диагональных и двух внедиагональных элементов: $(Q_{k,l})_{k,k} = \cos\varphi$, $(Q_{k,l})_{k,l} = -\sin\varphi$, $(Q_{k,l})_{l,k} = \sin\varphi$, $(Q_{l,l})_{l,l} = \cos\varphi$, где φ – угол поворота в плоскости x_k, x_l.
Метод вращений решения системы $\mathrm{A}\vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{b}}$	преобразование системы $\mathrm{A}\vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{b}}$ с помощью последовательного умножения на элементарные матрицы вращений к виду $R\vec{x} = \vec{g}$, где R – верхняя треугольная матрица, и решение полученной системы.
Элементарная матрица отражения	ортогональная матрица $H_\omega = E - 2 \cdot \omega \cdot \omega^*$, где ω – вектор-столбец единичной длины
Метод отражений решения системы $\mathrm{A}\vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{b}}$	преобразование системы $\mathrm{A}\vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{b}}$ с помощью последовательного умножения на элементарные матрицы отражений к виду $R\vec{x} = \vec{g}$, где R – верхняя треугольная матрица, и решение полученной системы.

Итерационные методы решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$	формулы, алгоритмы построения бесконечной последовательности приближений $\{\vec{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ к решению системы; каноническая форма одношагового итерационного метода: $\vec{x}^0$ – задан, $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - H_k(A\vec{x}^k - \vec{b}),\ k = 0, 1, \ldots,$ где матрицы (операторы) H_k заданы.
Вектор ошибки, матрица шага для ошибки итерационного метода решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$	$\vec{z}^k = \vec{x}^k - \vec{x}$ – вектор ошибки: $\vec{z}^{k+1} = \vec{z}^k - H_k A\vec{z}^k,\ k = 0, 1, \ldots,$ $S_k = E - H_k A$ – матрица шага ошибки одношагового итерационного метода.
Вектор невязки, матрица шага для невязки итерационного метода решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$	$\vec{r}^k = A\vec{x}^k - \vec{b}$ – вектор невязки: $\vec{r}^{k+1} = \vec{r}^k - AH_k\vec{r}^k,\ k = 0, 1, \ldots,$ $T_k = E - AH_k$ – матрица шага для невязки одношагового итерационного метода.
Сходимость итерационного метода решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$	итерационный метод: $\vec{x}^0$ – задан, $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - H_k(A\vec{x}^k - \vec{b}),\ k = 0, 1, \ldots,$ называется сходящимся, если $\forall\ \vec{x}^0 \ \lim\limits_{k\to\infty} \vec{z}^k = 0$.
Стационарный одношаговый итерационный метод решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$	– одношаговый итерационный метод: $\vec{x}^0$ – задан, $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - H(A\vec{x}^k - \vec{b}),\ k = 0, 1, \ldots,$ где матрица H задана и не зависит от k.

Достаточные условия сходимости стационарного одношагового итерационного метода решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$	Теорема 1. Одношаговый итерационный метод: $\vec{x}^0$ – задан, $\vec{x}^{k+1}=\vec{x}^k-H(A\vec{x}^k-\vec{b}),\ k=0,1,\dots,$ сходится, если для некоторой векторной нормы $\Vert\vec{z}\Vert_*$ подчиненная ей норма матрицы шага $S=E-HA$ для ошибки $\vec{z}^k$ меньше единицы: $\Vert S\Vert_*=\max\limits_{\vec{z}\neq 0}\dfrac{\Vert S\vec{z}\Vert_*}{\Vert\vec{z}\Vert_*}<1.$ Теорема 2. Одношаговый итерационный метод: $\vec{x}^0$ – задан, $\vec{x}^{k+1}=\vec{x}^k-H(A\vec{x}^k-\vec{b}),\ k=0,1,\dots,$ сходится, если для некоторой векторной нормы $\Vert\vec{r}\Vert_{**}$ подчиненная ей норма матрицы шага $T=E-AH$ для невязки $\vec{r}^k$ меньше единицы: $\Vert T\Vert_{**}=\max\limits_{\vec{r}\neq 0}\dfrac{\Vert T\vec{r}\Vert_{**}}{\Vert\vec{r}\Vert_{**}}<1.$
Необходимое и достаточное условие сходимости стационарного одношагового итерационного метода решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$	Теорема. Одношаговый итерационный метод: $\vec{x}^0$ – задан, $\vec{x}^{k+1}=\vec{x}^k-H(A\vec{x}^k-\vec{b}),\ k=0,1,\dots,$ сходится, если спектральный радиус матрицы шага $S=E-HA$ для ошибки меньше единицы: $\rho(S)<1$.
Якоби	 Карл Гу́став Я́коб Яко́би (10.12.1804 – 18.02.1851) – немецкий математик. Внёс огромный вклад в комплексный анализ, линейную алгебру, динамику и другие разделы математики и механики. Член Берлинской академии наук (1836), Лондонского королевского общества (1833), член-корреспондент Парижской академии наук (1830), иностранный член-корреспондент Петербургской Академии наук (1830), член Венской (1848) и член-корреспондент Мадридской академий (1848).
Метод Якоби решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$	– одношаговый итерационный метод: $\vec{x}^0$ – задан, $\vec{x}^{k+1}=\vec{x}^k-D^{-1}(A\vec{x}^k-\vec{b}),\ k=0,1,\dots,$ где $D=\mathrm{diag}(a_{1,1},\dots,a_{n,n})$ – диагональ матрицы A.

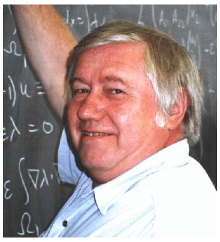
Матрица A со строгим диагональным преобладанием по строкам	$\lvert a_{i,i} \rvert < R_i \equiv \lvert a_{i,1} \rvert + \ldots + \lvert a_{i,i-1} \rvert + \lvert a_{i,i+1} \rvert + \ldots + \lvert a_{i,n} \rvert$ $i = 1, 2, \ldots, n$ $\Rightarrow\ \lVert S \rVert_\infty < 1\ \Rightarrow$ метод Якоби решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$ сходится.
Матрица A со строгим диагональным преобладанием по столбцам	$\lvert a_{j,j} \rvert < R_j \equiv \lvert a_{1,j} \rvert + \ldots + \lvert a_{j-1,j} \rvert + \lvert a_{j+1,j} \rvert + \ldots + \lvert a_{n,j} \rvert$ $j = 1, 2, \ldots, n$ $\Rightarrow\ \lVert T \rVert_1 < 1\ \Rightarrow$ метод Якоби решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$ сходится.
Зейдель	 Филипп Людвиг Зе́йдель (24.10.1821 – 13.08.1896) – немецкий математик и астроном. С 1847 профессор университета в Мюнхене. В области чистой математики труды Зейделя касаются, главным образом, теории рядов и других бесконечных форм.
Некрасов	 Павел Алексеевич Некрасов (1853 – 1924) – российский математик, специалист в области теории вероятностей, философ. Профессор математики, ректор Московского университета, президент Московского математического общества. Исследовал сходимость метода Зейделя.
Метод Зейделя (Гаусса-Зейделя, Некрасова) решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$	– одношаговый итерационный метод: $\vec{x}^0$ – задан, $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - (D-L)^{-1}(A\vec{x}^k - \vec{b}),\ k = 0, 1, \ldots,$ где $D = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$ – диагональ матрицы A, $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -a_{2,1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \ldots & 0 & 0 \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \ldots & -a_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix}$ – строго нижне-треугольная часть матрицы A со знаком “–”. Теорема. Если $A = A^T > 0$, то метод Зейделя сходится, а энергетическая норма его ошибки строго убывает: $\lVert \vec{z}^{k+1} \rVert_A < \lVert \vec{z}^k \rVert_A \quad \forall\ k$.

Методы релаксации решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$	– одношаговые итерационные методы: $\vec{x}^0$ – задан, $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \omega \cdot (D - \omega \cdot L)^{-1}(A\vec{x}^k - \vec{b}),\ k = 0, 1, \ldots,$ где $D = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$ – диагональ матрицы A, $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -a_{2,1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \ldots & 0 & 0 \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \ldots & -a_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix}$ – строго нижне-треугольная часть матрицы A со знаком “$-$”, ω – параметр релаксации: $\omega = 1$ – метод полной релаксации (метод Зейделя), $\omega < 1$ – метод нижней (неполной) релаксации, $\omega > 1$ – метод верхней (неполной) релаксации, Теорема. Если $A = A^T > 0$, то метод релаксации сходится при любом $\omega \in (0, 2)$, а энергетическая норма его ошибки строго убывает: $\\|\vec{z}^{k+1}\\|_A < \\|\vec{z}^k\\|_A \quad \forall\ k$.
Метод простой итерации решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$	– одношаговый итерационный метод: $\vec{x}^0$ – задан, $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \tau \cdot (A\vec{x}^k - \vec{b}),\ k = 0, 1, \ldots,$ где τ – параметр метода. Теорема. Если $A = A^* > 0$, то метод простой итерации решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$ сходится при любом $\tau \in (0, 2/\rho(A))$ и для ошибки справедлива оценка $\\|\vec{z}^k\\|_2 \le (q_\tau)^k \cdot \\|\vec{z}^0\\|_2$, $q_\tau = \max\{\|1 - \tau \cdot \lambda_{min}(A)\|, \|1 - \tau \cdot \lambda_{max}(A)\|\} < 1$.

Оптимальный параметр метода простой итерации решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$		Теорема. Если $A = A^* > 0$, то метод простой итерации $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \tau \cdot (A\vec{x}^k - \vec{b}),\ k = 0, 1, \ldots,$ с оптимальным параметром $\tau_0 = \dfrac{2}{\lambda_{max}(A) + \lambda_{min}(A)}$ решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$ сходится и для ошибки справедлива оценка $\| \vec{z}^k \|_2 \le (\rho_0)^k \cdot \| \vec{z}^0 \|_2$, $\rho_0 = \dfrac{\lambda_{max}(A) - \lambda_{min}(A)}{\lambda_{max}(A) + \lambda_{min}(A)} < 1.$ Метод простой итерации с оптимальным параметром иногда называют (одношаговым) методом Ричардсона.
Ричардсон		Льюис Фрай Ричардсон (Lewis Fry Richardson, 11.10.1881 – 30.09.1953) – английский математик, автор работ по методу решения систем линейных уравнений, известных как модифицированные итерации Ричардсона.
		**Лебедев Вячеслав Иванович** (27.01.1930 – 22.03.2010) – известный российский математик, внес существенный вклад в развитие теории метода Ричардсона с чебышевскими параметрами. В его работах решена важная проблема устойчивости чебышевских многошаговых итерационных алгоритмов.

Циклический метод Ричардсона с чебышевскими параметрами решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$	– m-шаговый итерационный метод: $\vec{x}^0$ – задан, $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \tau_{k+1} \cdot (A\vec{x}^k - \vec{b})$, $k = 0, 1, \ldots$, где $\tau_{k+m} = \tau_k$ – параметры метода. Теорема. Если $A = A^* > 0$, то оптимальные (чебышевские) параметры τ_k метода Ричардсона решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$ обратны корням полинома Чебышева $P_m(\lambda)$ степени m, равного 1 при $\lambda = 0$ и наименее уклоняющегося от нуля на интервале $[\lambda_{min}(A), \lambda_{max}(A)]$, и для ошибки справедлива оценка $\|\vec{z}^{k \cdot m}\|_2 \le (\rho_m)^k \cdot \|\vec{z}^0\|_2$, где $\rho_m = \dfrac{2\gamma^m}{1+\gamma^{2m}} < 1$, $\gamma = \dfrac{\sqrt{\lambda_{max}(A)} - \sqrt{\lambda_{min}(A)}}{\sqrt{\lambda_{max}(A)} + \sqrt{\lambda_{min}(A)}}$.

Гу́рий Ива́нович Марчу́к (8.06.1925 – 24.03.2013) – российский математик, академик РАН, президент Академии наук СССР (1986 –1991), выдающийся специалист в области вычислительной математики, физике атмосферы, геофизике, математического моделирования.



Кузнецов Юрий Алексеевич, род. 7.08.1945 г., известный русский математик, ученик академика Г.И. Марчука, профессор университета в Хьюстоне (США), внес существенный вклад в развитие теории итерационных методов на основе вариационных принципов.

Теорема о строгом убывании функционала (нормы) ошибки итерационного метода	Пусть $\{\vec{z}^k \neq 0\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательность векторов ошибок некоторого итерационного метода решения системы $A\vec{x} = \vec{b}$ такая, что $\vec{z}^{k+1} = S(\vec{z}^k)$, где $S: R^n \setminus \{0\} \to R^n$ непрерывное отображение, и в некоторой норме $\|\vec{z}^{k+1}\|_A < \|\vec{z}^k\|_A \quad \forall\ k$. Тогда $\lim\limits_{k \to \infty} \vec{z}^k = 0$.

Метод минимальных невязок решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$	– одношаговый итерационный метод: $\vec{x}^0$ – задан, $\vec{x}^{k+1}=\vec{x}^k-\tau_k\cdot(A\vec{x}^k-\vec{b}),\ k=0,1,\dots,$ где параметр τ_k определяется из условия минимизации евклидовой нормы невязки. Теорема 1. Если $A>0$, то в методе минимальных невязок решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$ параметр $\tau_k=(A\vec{r}^k,\vec{r}^k)_2/(A\vec{r}^k,A\vec{r}^k)_2$ и метод сходится. Теорема 2. Если $A=A^T>0$, то для невязки метода минимальных невязок решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$ справедлива оценка $\Vert\vec{r}^k\Vert_2\le(\rho_0)^k\cdot\Vert\vec{r}^0\Vert_2,\quad \rho_0=\dfrac{\lambda_{max}(A)-\lambda_{min}(A)}{\lambda_{max}(A)+\lambda_{min}(A)}<1.$
Метод наискорейшего спуска решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$	– одношаговый итерационный метод: $\vec{x}^0$ – задан, $\vec{x}^{k+1}=\vec{x}^k-\tau_k\cdot(A\vec{x}^k-\vec{b}),\ k=0,1,\dots,$ где параметр τ_k определяется из условия минимизации энергетической нормы ошибки. Теорема. Если $A=A^*>0$, то в методе наискорейшего спуска решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$ параметр $\tau_k=(\vec{r}^k,\vec{r}^k)_2/(A\vec{r}^k,\vec{r}^k)_2$, $\vec{r}^k=A\vec{x}^k-\vec{b}$, метод сходится и для ошибки справедлива оценка $\Vert\vec{z}^k\Vert_A\le(\rho_0)^k\cdot\Vert\vec{z}^0\Vert_A,\quad \rho_0=\dfrac{\lambda_{max}(A)-\lambda_{min}(A)}{\lambda_{max}(A)+\lambda_{min}(A)}<1.$
Метод сопряженных градиентов решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$	– многошаговый итерационный метод (обобщение метода наискорейшего спуска) $\vec{x}^0$ – задан, $\vec{x}^{k+1}=\vec{x}^k-\alpha_{k+1}\cdot\vec{g}^{k+1},\ k=0,1,\dots,$ где векторы $\{\vec{g}^1,\dots,\vec{g}^m\}$ – A-ортогональный базис линейной оболочки векторов $\{A\ \vec{z}^0,\dots,A^m\vec{z}^0\}\ \ \forall\ m$, а параметры α_{k+1} определяется из условия минимизации энергетической нормы ошибки $\Vert\vec{z}^{k+1}\Vert_A$. Теорема. Если $A=A^*>0$, то метод сопряженных градиентов решения системы $A\vec{x}=\vec{b}$ сходится и для его ошибки справедлива оценка $\Vert\vec{z}^k\Vert_A\le\rho_k\cdot\Vert\vec{z}^0\Vert_A$, где $\rho_k=\dfrac{2\gamma^k}{1+\gamma^{2k}}<1,\ \gamma=\dfrac{\sqrt{\lambda_{max}(A)}-\sqrt{\lambda_{min}(A)}}{\sqrt{\lambda_{max}(A)}+\sqrt{\lambda_{min}(A)}}$

<table>
<tr><td>Переобусловливатель матрицы системы $A\vec{x} = \vec{b}$</td><td colspan="2">– матрица B такая, что $\mathrm{Cond}(B^{-1}A) << \mathrm{Cond}\, A$.</td></tr>
<tr><td colspan="3"> Дьяконов Евгений Георгиевич (2.07.1935 – 11.08.2006) – известный советский и российский математик, внес существенный вклад в теорию эквивалентных по спектру операторов и оптимизации вычислительной работы.</td></tr>
<tr><td>Эквивалентные по спектру матрицы</td><td colspan="2">Положительно определенные матрицы A и B называются эквивалентными по спектру с постоянными $\gamma_1 \geq \gamma_0 > 0$, если $$\gamma_0 \cdot (B\vec{y},\vec{y})_2 \leq (A\vec{y},\vec{y}) \leq \gamma_1 \cdot (B\vec{y},\vec{y})_2 \quad \forall\ \vec{y} \in R^n.$$</td></tr>
<tr><td>Самарский</td><td></td><td>Алекса́ндр Андре́евич Сама́рский (19.02.1919 – 11.02.2008) – российский математик, академик РАН, крупнейший специалист в области вычислительной математики, математической физики и математического моделирования. Создатель теории операторно-разностных схем, общей теории устойчивости разностных схем.</td></tr>
<tr><td>Теорема Самарского</td><td colspan="2">Условие $B > 0{,}5 \cdot \tau \cdot A$ $((B\vec{y},\ \vec{y}) > 0{,}5 \cdot \tau \cdot (A\vec{y},\ \vec{y})\ \ \forall\ \vec{y})$ является достаточным для сходимости итерационного метода $$\vec{x}^0 \text{ – задан, } \vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \tau \cdot (A\vec{x}^k - \vec{b}),\ k = 0, 1, \ldots,$$ решения уравнения $A\vec{x}^k = \vec{b}$ с $A = A^* > 0$ в скалярном произведении $(\vec{x},\ \vec{y})$.</td></tr>
<tr><td>Корректность задачи на собственные числа квадратной матрицы A</td><td colspan="2">Пусть $A_\delta \equiv A + \delta A$, $\varepsilon = \|\delta A\|$.
Теорема. Если $\varepsilon \to 0$, то корни характеристического полинома $P_{n,\delta}(\lambda)$ матрицы A_δ сходятся к корням характеристического полинома $P_n(\lambda)$ матрицы A.</td></tr>
<tr><td>Оценка близости числа λ_c к собственному числу квадратной матрицы A</td><td colspan="2">Теорема. В круге на комплексной плоскости с центром в точке λ_c и радиуса $r = \sqrt[n]{|P_n(\lambda_c)|}$ лежит хотя бы один корень λ_* характеристического полинома $P_n(\lambda)$ матрицы A: $|\lambda_* - \lambda_c| \leq r$.</td></tr>
</table>

Степенной метод вычисления максимального собственного значения матрицы $A = A^* \geq 0$	вычисление последовательности векторов: $$\vec{x}^0 \neq 0 \text{ – задан, } \vec{x}^{k+1} = A\frac{\vec{x}^k}{\|\vec{x}^k\|},\ k = 0, 1, \ldots,$$ и чисел $\rho_{k+1} = \|\vec{x}^{k+1}\| \to \lambda_{max}(A) = \rho(A)$.
Степенной метод вычисления минимального собственного значения матрицы $A = A^* \geq 0$	вычисление последовательности векторов: $$\vec{x}^0 \neq 0 \text{ – задан, } \vec{x}^{k+1} = (\rho(A)E - A)\frac{\vec{x}^k}{\|\vec{x}^k\|},\ k = 0, 1, \ldots,$$ и чисел $\rho_{k+1} = \|\vec{x}^{k+1}\| \to \rho(A) - \lambda_{min}(A)$, т.е. $\rho(A) - \rho_{k+1} \to \lambda_{min}(A)$.
Степенной метод вычисления границ спектра матрицы $B^{-1}A$ **в случае** $A = A^* > 0$ **и** $B = B^* > 0$	1. Лучшие постоянные эквивалентности $0 < \gamma_0 \leq \gamma_1$ самосопряженных матриц $A = A^* > 0$ и $B = B^* > 0$: $$\gamma_0 \cdot (B\vec{x}, \vec{x})_2 \leq (A\vec{x}, \vec{x})_2 \leq \gamma_1 \cdot (B\vec{x}, \vec{x})_2 \quad \forall\, \vec{x},$$ равны минимальному и максимальному собственным числам матрицы $B^{-1}A$: $$\gamma_0 = \lambda_{min}(B^{-1}A),\ \ \gamma_1 = \lambda_{max}(B^{-1}A).$$ 2. Постоянная $\gamma_1 = \lambda_{max}(B^{-1}A)$ вычисляется степенным методом: $$\vec{x}^0 \neq 0 \text{ – задан, } \vec{x}^{k+1} = B^{-1}A\frac{\vec{x}^k}{\|\vec{x}^k\|_A},\ k = 0, 1, \ldots,$$ $$\gamma_1 = \lim_{k\to\infty} \|x^k\|_A.$$ 3. Постоянная $\gamma_0 = \lambda_{min}(B^{-1}A)$ вычисляется степенным методом: $$\vec{x}^0 \neq 0 \text{ – задан, } \vec{x}^{k+1} = (\gamma_1 E - B^{-1}A)\frac{\vec{x}^k}{\|\vec{x}^k\|_A},\ k = 0, 1, \ldots,$$ $$\gamma_0 = \gamma_1 - \lim_{k\to\infty} \|x^k\|_A.$$
Конгруэнтное преобразование матрицы $A = A^*$	Преобразование матрицы A к матрице $A_T \equiv T^*AT$, где T – произвольная невырожденная матрица: в квадратичной форме $(A\vec{x}, \vec{x})_2$ делается линейная замена переменных: $\vec{x} = T\vec{y}$, $(A\vec{x}, \vec{x})_2 = (A_T\vec{y}, \vec{y})_2$.

Канонический вид квадратичной формы $(A\vec{x}, \vec{x})_2$	Квадратичная форма $(A\vec{x}, \vec{x})_2$ имеет канонический вид, если $A = A^*$ – диагональная матрица. Теорема. Для любой матрицы $A = A^*$ существует конгруэнтное преобразование с матрицей T такое, что $A_T = T^* A T$ – диагональная матрица. $(A_T\vec{y}, \vec{y})_2$ – канонический вид квадратичной формы $(A\vec{x}, \vec{x})_2$.
Закон инерции	Теорема. Пусть матрица $A = A^*$ приведена конгруэнтным преобразованием к диагональному виду: $A_T = T^* A T$. Тогда число положительных, отрицательных и нулевых диагональных элементов матрицы A_T не зависит от матрицы преобразования T. Число σ_+ положительных канонических коэффициентов квадратичной формы $(A_T\vec{y}, \vec{y})_2$ называется положительным индексом инерции квадратичной формы. Число σ_- отрицательных канонических коэффициентов квадратичной формы называется отрицательным индексом инерции квадратичной формы. Число σ_0 нулевых канонических коэффициентов квадратичной формы равно размерности ядра матрицы A. Набор чисел $\sigma(A) = \{\sigma_+; \sigma_-; \sigma_0\}$ определяет количество положительных (σ_+), отрицательных (σ_-) и нулевых (σ_0) собственных чисел матрицы A.
Вычисление числа $\sigma_-(A)$	Теорема. Если матрица $A = A^*$ и все её главные миноры $\det A_k \neq 0 \ \forall\ k$, то количество её отрицательных собственных значений $\sigma_-(A) = ЧПЗ\{1, \det A_1, \det A_2, ..., \det A_n\}$ – число перемен знака в последовательности чисел.

Метод деления пополам вычисления собственного числа матрицы $A = A^*$	Если мы умеем вычислять $\sigma\_(A - c \cdot E)$ – количество собственных чисел матрицы $A = A^*$ меньших числа c, то $\lambda_j \in Sp(A) = \{ \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n \}$ можно вычислить с точностью $\varepsilon > 0$ методом деления пополам, вычисляя последовательность вложенных отрезков $\{ [a_k, b_k] \}_{k=0}^{\infty}$: 1. $[a_0, b_0] = [-\lVert A \rVert_\infty, \lVert A \rVert_\infty]$, $\lambda_j \in [a_0, b_0]$; 2. если для $c_k = (a_k + b_k)/2$ число $\sigma\_(A - c_k \cdot E) \ge j$, то $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, c_k]$, иначе $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k, b_k]$, $k \ge 0$, $\lambda_j \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$; 3. $\lvert c_k - \lambda_j \rvert \le (b_k - a_k)/2 = (b_0 - a_0)/2^{k+1} = \lVert A \rVert_\infty /2^k$ $\Rightarrow$ если $k \ge \log_2(\lVert A \rVert_\infty / \varepsilon)$, то c_k приближает λ_j с точностью $\varepsilon > 0$.
Преобразование матрицы $A = A^*$ **к трехдиагональному виду**	Теорема 1. Матрица $A = A^*$ может быть приведена к трехдиагональному виду $T = \text{tridiag}(\bar{\beta}_{i-1}, \alpha_i, \beta_i)$ последовательными преобразованиями подобия с помощью элементарных матриц вращения: $T = (Q_{n-1,n} \cdot ... \cdot Q_{2,4} \cdot Q_{2,3}) A (Q_{n-1,n} \cdot ... \cdot Q_{2,4} \cdot Q_{2,3})^* =$ $= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & 0 \\ \bar{\beta}_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \bar{\beta}_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & & & \bar{\beta}_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} = T^*.$ Теорема 2. В условиях теоремы 1 $Sp(A) = Sp(T) = Sp(T_{real})$, где $T_{real} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \lvert\beta_1\rvert & & & 0 \\ \lvert\beta_1\rvert & \alpha_2 & \lvert\beta_2\rvert & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lvert\beta_{n-2}\rvert & \alpha_{n-1} & \lvert\beta_{n-1}\rvert \\ 0 & & & \lvert\beta_{n-1}\rvert & \alpha_n \end{bmatrix}$

Якобиева трехдиагональная матрица A	– вещественная трехдиагональная матрица вида $$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{bmatrix},\ b_k\cdot c_{k+1}>0,\ \ \forall\ k.$$
Свойства якобиевой трехдиагональной матрицы A	1. Все собственные значения якобиевой трехдиагональной матрицы A – вещественные числа. 2. Собственные значения якобиевой трехдиагональной матрицы A попарно различны. 3. Первая и последняя компоненты любого собственного вектора якобиевой трехдиагональной матрицы A не равны нулю.
Вычисление главных миноров якобиевой трехдиагональной матрицы A	$\det A_0\equiv 1,$ $\det A_1=a_1,$ $\det A_{k+1}=a_{k+1}\cdot\det A_k-\underbrace{c_{k+1}b_k}_{>0}\cdot\det A_{k-1},\ \ k=1,\ldots,n-1.$ $\Rightarrow$ Если $\det A_k=0$, то $\det A_{k-1}\cdot\det A_{k+1}<0$.
Вычисление $\sigma_-(A)$ **якобиевой трехдиагональной матрицы** A	Если $\det A_k=0$, то определим знак $\det A_k$ равным знаку $\det A_{k-1}$. Тогда $\sigma_-(A)=\text{ЧПЗ}\{1,\det A_1,\det A_2,\ldots,\det A_n\}$ – количество отрицательных собственных чисел матрицы A и мы можем применить метод деления пополам для вычисления любого собственного значения $\lambda_j\in Sp(A)$.
Вычисление собственного вектора якобиевой трехдиагональной матрицы A	Если $\lambda_j\in Sp(A)$ мы вычислили, то для вычисления собственного вектора $\vec{x}^{(j)}$ задаем $x_n^{(j)}=1$ и решаем систему $$(A_{n-1}-\lambda_j\cdot E)\vec{y}=-b_{n-1}\cdot\vec{e}^{(n-1)},$$ где $\vec{y}=(x_1^{(j)},\ldots,x_{n-1}^{(j)})^T,\ \ \vec{e}^{(n-1)}=(0,\ldots,0,1)^T\in R^{n-1},$ $\det(A_{n-1}-\lambda_j\cdot E)\neq 0$.

Инвариантность суммы квадратов модулей элементов матрицы при умножении на ортогональную матрицу	Для любых квадратной матрицы A и ортогональной (унитарной) матрицы T имеем $$S(TA) = S(AT) = S(A),\ \text{где}\ S(A) = \sum_{i,j=1}^{n} \lvert a_{i,j} \rvert^2 .$$
Функционал $\Phi(A)$ – сумма квадратов модулей внедиагональных элементов матрицы	Теорема. Для любой, отличной от диагональной, матрицы $A = A^*$ существует элементарная матрица вращения $Q_{i,j}$, $i \neq j$, такая, что $$\Phi(Q_{i,j}^{*} A Q_{i,j}) \le \left[1 - 2/(n(n-1))\right] \cdot \Phi(A).$$
Метод вращений (метод Якоби) решение полной проблемы на собственные значения матрицы $A = A^*$	Теорема. Если $A = A^*$, то существует последовательность элементарных матриц вращения $Q_k \equiv Q_{i(k),j(k)}$ такая, что последовательность матриц $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$: $$A_0 = A, \quad A_k = Q_k^{*} A_{k-1} Q_k ,$$ сходится к диагональному виду, т.е. $\Phi(A_k) \to 0$; диагональные элементы матрицы A_k – приближения к собственным числам, столбцы произведения $(Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_k)$ – приближения к собственным векторам матрицы A.
	**Кублановская Вера Николаевна** (21.11.1920 – 21.02.2012) – известный российский математик, профессор, доктор физико-математических наук, почетный профессор университета г. Умео (Швеция), автор (1961 г.) QR -метода решения полной проблемы собственных значений произвольной матрицы. Алгоритм был независимо найден английским программистом Джоном Френсисом в том же году. QR -метод был назван одним из 10 самых важных алгоритмов XX века.
QR -метод решения полной проблемы собственных значений произвольной матрицы	– итерационный метод вычисления подобных матриц: $$A_0 \equiv A,\ \{A_k = (Q_k)^{*} A_{k-1} Q_k \equiv R_k Q_k\}_{k=1}^{\infty},$$ где $A_{k-1} = Q_k R_k$ – произведение ортогональной (унитарной) и верхней треугольной матриц; диагональные элементы матрицы R_k – приближения к собственным числам матрицы A.