Вычислительные методы линейной алгебры

Задачи по электронному лекционному курсу

Мацокин Александр Михайлович

профессор кафедры вычислительной математики
Новосибирского государственного университета

1. Прямые методы решения системы линейных алгебраических уравнений.
2. Итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений.
3. Итерационные методы решения задачи на собственные значения самосопряженной матрицы.

Часть 3. Итерационные методы решения задачи на собственные значения самосопряженной матрицы

Тема 17. Проблема собственных значений

Для матрицы $A = \{a_{i\,j}\}_{i,\,j=1}^{n}$ нужно найти

числа λ и ненулевые векторы $\vec{x}$ такие,

что $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$: λ – собственное значение, $\vec{x}$ – собственный вектор.

Собственные значения (числа) матрицы A – корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ характеристического полинома

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + p_1\lambda + p_0,$$

коэффициенты $p_0, ..., p_{n-1}$ – непрерывные функции элементов $\{a_{i\,j}\}_{i,\,j=1}^{n}$.

Степенной метод вычисления максимального собственного значения матрицы $A = A^* \geq 0$

Идея метода:

если $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1} < \lambda_n = \rho(A)$ – собственные значения,

$\vec{q}^{(1)}, \vec{q}^{(2)}, \ldots, \vec{q}^{(n)}$ – соответствующие им собственные векторы,

то $\forall\ \vec{x}^0 = \alpha_n \vec{q}^{(n)} + \alpha_1 \vec{q}^{(1)} + \ldots + \alpha_{n-1} \vec{q}^{(n-1)}$ ($\forall\ \alpha_i$ – **неизвестны!**)

$$A^k \vec{x}^0 = \rho^k \left[\alpha_n \vec{q}^{(n)} + \underbrace{\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\rho}\right)^k \alpha_{n-1} \vec{q}^{(n-1)} + \ldots + \left(\frac{\lambda_1}{\rho}\right)^k \alpha_1 \vec{q}^{(1)}}_{\to 0}\right] \approx \rho^k \alpha_n \vec{q}^{(n)}$$

$$A^{k+1} \vec{x}^0 = \rho^{k+1} \left[\alpha_n \vec{q}^{(n)} + \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\rho}\right)^{k+1} \alpha_{n-1} \vec{q}^{(n-1)} + \ldots + \left(\frac{\lambda_1}{\rho}\right)^{k+1} \alpha_1 \vec{q}^{(1)}\right] \approx \rho^{k+1} \alpha_n \vec{q}^{(n)}$$

$$\frac{\| A^{k+1} \vec{x}^0 \|}{\| A^k \vec{x}^0 \|} \approx \rho, \qquad \frac{1}{\| A^k \vec{x}^0 \|} A^{k+1} \vec{x}^0 \approx \rho \cdot \vec{q}^{(n)}$$

Итерационный метод

$$\vec{x}^0 \neq 0, \qquad \vec{x}^{k+1} = A\frac{\vec{x}^k}{\|\vec{x}^k\|}, \qquad k = 0, 1, \ \ldots,$$

называется степенным методом вычисления максимального собственного значения матрицы $A = A^* \geq 0$**:**

$$\|\vec{x}^k\| \to \rho(A), \qquad \vec{x}^k \to \vec{x}: \quad A\vec{x} = \rho \cdot \vec{x}$$

Задача 17.1.

Дана симметричная матрица $A = A^*$.

1. Доказать $\lambda(B) \equiv \|A\|_\infty + \lambda(A) \geq 0 \ \ \forall \ \lambda(A)$.

2. Доказать $B \equiv \|A\|_\infty E + A = B^* \geq 0$.

Задача 17.2. Дана симметричная матрица $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}$.

1. Вычислить её собственные значения и векторы:

$$A\vec{q}^{(1)}=\lambda_1\cdot\vec{q}^{(1)},\qquad A\vec{q}^{(2)}=\lambda_2\cdot\vec{q}^{(2)}.$$

2. Вычислить степенным методом приближения

$$\vec{x}^0=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\qquad \vec{x}^1=A\frac{\vec{x}^0}{\|\vec{x}^0\|_\infty}\ \text{ и }\ \lambda_2^1=\|\vec{x}^1\|_\infty.$$

3. Вычислить $|\lambda_2-\|\vec{x}^0\|_\infty|=?$ и $|\lambda_2-\lambda_2^1|=?$.

4. Вычислить $\left\|\frac{\vec{q}^{(2)}}{\|\vec{q}^{(2)}\|_\infty}-\frac{\vec{x}^0}{\|\vec{x}^0\|_\infty}\right\|_\infty=?\qquad \left\|\frac{\vec{q}^{(2)}}{\|\vec{q}^{(2)}\|_\infty}-\frac{-\vec{x}^0}{\|\vec{x}^0\|_\infty}\right\|_\infty=?$

$$\left\|\frac{\vec{q}^{(2)}}{\|\vec{q}^{(2)}\|_\infty}-\frac{\vec{x}^1}{\|\vec{x}^1\|_\infty}\right\|_\infty=?\qquad \left\|\frac{\vec{q}^{(2)}}{\|\vec{q}^{(2)}\|_\infty}-\frac{-\vec{x}^1}{\|\vec{x}^1\|_\infty}\right\|_\infty=?.$$

Степенной метод вычисления минимального собственного значения матрицы $A = A^* \geq 0$

$$\beta \geq \rho(A) \quad \Rightarrow \quad \lambda(\beta \cdot E - A) = \beta - \lambda(A) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \rho(\beta \cdot E - A) = \beta - \lambda_{\min}(A).$$

(например: $\beta = \| A \|_\infty \geq \rho(A)$)

итерационный процесс

$$\vec{x}^0 \neq 0, \qquad \vec{x}^{k+1} = (\beta \cdot E - A)\frac{\vec{x}^k}{\| \vec{x}^k \|}, \qquad k = 0, 1, \ \ldots,$$

называется степенным методом вычисления минимального собственного значения матрицы $A = A^* \geq 0$:

$\lambda_{\min}^k \equiv \beta - \| \vec{x}^k \| \to \lambda_{\min}(A)$**,**

формула $\lambda_{\min}^k \equiv \dfrac{\| A\vec{x}^k \|}{\| \vec{x}^k \|} \to \lambda_{\min}(A)$ лучше!

Задача 17.3.

Дана симметричная матрица $A = A^*$.

Доказать:

1. $\lambda(B) \equiv \| A \|_\infty - \lambda(A) \geq 0 \quad \forall\ \lambda(A)$.

2. $B \equiv \| A \|_\infty E - A = B^* \geq 0$.

3. $\lambda_{\max}(B) \equiv \| A \|_\infty - \lambda_{\min}(A) \geq 0$.

Задача 17.4. Дана симметричная матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$.

1. Вычислить её собственные значения и векторы:

$$A\vec{q}^{(1)} = \lambda_1 \cdot \vec{q}^{(1)}, \quad A\vec{q}^{(2)} = \lambda_2 \cdot \vec{q}^{(2)}, \quad A\vec{q}^{(3)} = \lambda_2 \cdot \vec{q}^{(3)}.$$

2. Вычислить степенным методом приближения

$$\vec{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^1 = (\| A \|_\infty E - A) \frac{\vec{x}^0}{\| \vec{x}^0 \|_\infty} \text{ и } \lambda_1^1 = \| A \|_\infty - \| \vec{x}^1 \|_\infty.$$

3. Вычислить $|\lambda_1 - \lambda_1^1| = ?$ и $\left| \lambda_1 - \frac{\| A\vec{x}^1 \|_\infty}{\| \vec{x}^1 \|_\infty} \right| = ?$.

Тема 18. Метод деления пополам (бисекций)

Закон инерции:

если $A = \{a_{i\,j}\}_{i,\,j=1}^{n} = A^*$

$T^* AT = D_T \equiv diag\{d_1,\, d_2,\, ...,\, d_n\}$ – конгруэнтное преобразование,

где $\det T \neq 0$,

то от матрицы T не зависит сигнатура $\sigma(A)$ матрицы A:

- $\sigma_-(A)$ – количество отрицательных элементов,
- $\sigma_0(A)$ – количество нулевых элементов,
- $\sigma_+(A)$ – количество положительных элементов на диагонали D_T.

Замечание 1.

Если $A = A^*$ и $\det A_k \neq 0 \quad \forall\, k$,

то (из теоремы о LDU – разложении за конечное число операций)

$A = LDL^*,\ D = diag\{d_1, ..., d_n\}$,

$\Rightarrow \quad \sigma(A) = \{\sigma_-(A), \sigma_0(A), \sigma_+(A)\},\ \sigma_0(A) = 0$

вычисляется за конечное число операций.

Замечание 2.

Если $A = A^*$,

то (из теоремы о форме Жордана)

$A = Q\Lambda Q^*,\ \Lambda = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$,

и (если $\det A_k \neq 0 \quad \forall\, k$) $\sigma(A) = \{\sigma_-(A), \sigma_0(A), \sigma_+(A)\},\ \sigma_0(A) = 0$

вычисляется за конечное число операций,

где $\sigma_-(A)$ – количество $\lambda_k < 0$.

Лемма 1. Если матрица $A = A^*$ и $\det A_k \neq 0 \ \forall \ k$,

то $\sigma_-(A) \equiv \text{ЧПЗ}\{1, \det A_1, \det A_2, ..., \det A_n\}$ – число перемен знака.

Из замечания 2. $\Rightarrow \sigma_-(A) \equiv \text{ЧПЗ} - \textit{количество}\ \lambda_k < 0.$

Идея метода бисекций вычисления $\lambda_1 \in Sp(A)$

Пусть $\quad A = A^*, \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n.$

1. $\lambda_1 \in [a_0, b_0] \equiv [-\|A\|_\infty, \|A\|_\infty].$

2. Вычислить $c_0 = (a_0 + b_0)/2; \quad \sigma_-(A - c_0 E)$

– количество собственных значений меньших c_0.

3. Задать $[a_1, b_1] = \begin{cases} [a_0, c_0], \ \textit{если}\ \sigma_-(A - c_0 E) \geq 1 \\ [c_0, b_0], \ \textit{если}\ \sigma_-(A - c_0 E) = 0 \end{cases} \Rightarrow \ \lambda_1 \in [a_1, b_1]$

Через k таких шагов получим:

$$\lambda_1 \in [a_k, b_k], \ b_k - a_k = \|A\|_\infty / 2^{k-1} \to 0.$$

Идея метода бисекций вычисления $\lambda_n \in Sp(A)$

Пусть $A = A^*$, $\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n$.

1. $\lambda_n \in [a_0, b_0] \equiv [-\|A\|_\infty, \|A\|_\infty]$.
2. Вычислить $c_0 = (a_0 + b_0)/2$; $\sigma_-(A - c_0E)$ – количество собственных значений меньших c_0.
3. Задать $[a_1, b_1] = \begin{cases} [a_0, c_0], & \textit{если } \sigma_-(A - c_0E) = n \\ [c_0, b_0], & \textit{если } \sigma_-(A - c_0E) < n \end{cases} \Rightarrow \lambda_n \in [a_1, b_1]$

Через k таких шагов получим:

$$\lambda_n \in [a_k, b_k],\ b_k - a_k = \|A\|_\infty / 2^{k-1} \to 0.$$

Задача 18.1.

Пусть $A = A^*$, $\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n$.

Построить схему вычисления $\lambda_j \in Sp(A)$.

Приведение вещественной, симметричной матрицы к трехдиагональному виду ортогональным преобразованием подобия с помощью матриц вращения

Задана матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} = A^T, \quad \forall \;\; a_{i,j} = a_{j,i}$$

1–й шаг.

1.1. Строим матрицу вращения $Q_{2,3}$:

$$Q_{2,3}A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}$$

1.2. Строим матрицу вращения $Q_{2,4}$:

$$Q_{2,4}[Q_{2,3}A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

1.3. Вычисляем:

$$A_1 = [Q_{2,4}Q_{2,3}]A[Q_{2,4}Q_{2,3}]^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix} \equiv A_1^T$$

2–й шаг.

1.1. Строим матрицу вращения $Q_{3,4}$:

$$Q_{3,4}A_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & 0 & 0 \\ a_{2,1}^{(1)} & a_{2,2}^{(1)} & a_{2,3}^{(1)} & a_{2,4}^{(1)} \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

1.2. Вычисляем: $Q_{3,4}A_1Q_{3,4}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & 0 & 0 \\ a_{2,1}^{(1)} & a_{2,2}^{(1)} & \times & 0 \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \equiv A_2 = A_2^T$

– трёхдиагональная, симметричная матрица $B = A_2$.

Задача 18.2.

Пусть $A = A^T$, Q – ортогональная матрица и

$$B = QAQ^T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & \\ & b_2 & a_3 & b_3 \\ & & b_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

Доказать $Sp(A) = Sp(B)$.

Задача 18.3.

Пусть в задаче 18.2 $b_2 = 0$.

Доказать $Sp(A) = Sp(B) = Sp\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_2 \end{bmatrix} \bigcup Sp\begin{bmatrix} a_3 & a_3 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$.

Якобиевы матрицы

Вещественная, симметричная, трёхдиагональная матрица

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & \\ & b_2 & a_3 & b_3 \\ & & b_3 & a_4 \end{bmatrix}, \ b_1 \neq 0, \ b_2 \neq 0, b_3 \neq 0,$$

называется **якобиевой**.

Задача 18.4.

$$\text{Доказать} \begin{cases} \det B_0 \equiv 1, \ \det B_1 = a_1, \\ \det B_2 = a_2 \cdot \det B_1 - b_1^2 \cdot \det B_0, \\ \det B_3 = a_3 \cdot \det B_2 - b_2^2 \cdot \det B_1, \\ \det B_4 = a_4 \cdot \det B_3 - b_3^2 \cdot \det B_2. \end{cases}$$

Задача 18.5.

Доказать
$$\begin{cases} \det B_1 = 0 \;\Rightarrow\; \det B_2 \cdot \det B_0 < 0, \\ \det B_2 = 0 \;\Rightarrow\; \det B_3 \cdot \det B_1 < 0, \\ \det B_3 = 0 \;\Rightarrow\; \det B_4 \cdot \det B_2 < 0, \\ \det B_4 = 0 \;\Rightarrow\; \det B_3 \neq 0. \end{cases}$$

Задача 18.6.

Доказать:

собственные значения якобиевой матрицы B попарно различные (простые).

Указание.

Размерность ядра симметричной якобиевой матрицы $B_\lambda = B - \lambda E$ совпадает с кратностью $\lambda \in Sp(B)$.

Теорема о количестве отрицательных собственных чисел.

Пусть $B = tridiag\{b_{i-1}, a_i, b_i\}$ – якобиева матрица,

тогда количество отрицательных собственных чисел

$$\sigma_{-}(B) = \mathit{ЧПЗ}\{1,\ \det B_1,\ \det B_2,\ \ldots,\ \det B_n\},$$

если $\det B_k = 0$ приписать знак $\det B_{k-1}$.

Задача 18.7.

Вычислить количество отрицательных собственных чисел матриц:

а) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}$, б) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$, в) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Вычисление собственного вектора

Задача 18.8.

Последняя компонента собственного вектора $\vec{x}$: $B\vec{x} = \lambda\vec{x}$, якобиевой матрицы $B = tridiag\{b_{i-1}, a_i, b_i\}$ не равна нулю.

Задача 18.9.

Доказать:

собственный вектор $\vec{x}$ якобиевой матрицы $B = tridiag\{b_{i-1}, a_i, b_i\}$ можно вычислить по формулам

$$x_n = 1$$

$$x_{n-1} = -(a_n - \lambda) \cdot x_n / b_{n-1}$$

$$x_{n-2} = -[(a_{n-1} - \lambda) \cdot x_{n-1} + b_{n-1} \cdot x_n] / b_{n-2}$$

....

$$x_1 = -[(a_2 - \lambda) \cdot x_2 + b_2 \cdot x_3] / b_1$$