ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Лектор: к.ф.-м.н., доцент Люлько Н.А.

5-6 семестры, 2013-2014 гг.

1. Метрические пространства. Полнота метрических пространств. Полнота пространств $R_p^n,\ l_p\ (1 \le p \le \infty), C^k[a,b],\ L_p(X),\ X \subset R^n -$ измеримое множество. Теорема о пополнении. Критерий полноты метрического пространства. Принцип сжимающих отображений. Теорема Бэра. Компактность. Критерий компактности в метрическом пространстве. Теорема Арцела. ([1], гл. 2;[2], гл. 1;[3], гл.1).
2. Линейные, нормированные, евклидовы пространства. Теорема об изоморфизме конечномерных нормированных пространств. Гильбертовы пространства. Тождество параллелограмма. Теорема о разложении гильбертова пространства в прямую сумму. Ортонормированные системы. Неравенство Бесселя. Полные ортонормированные системы. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. ([1], гл. 3;[2], гл. 2;[3], гл.4; [5] гл.3).
3. Линейные операторы в нормированных пространствах. Пространство линейных непрерывных операторов; его полнота. Сопряженное пространство X^*. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейных ограниченных функционалов в конечномерных нормированных пространствах, в пространствах l_p, $(1 \le p < \infty)$, в гильбертовом пространстве. Естественное вложение нормированного пространства X в X^{**}. Рефлексивность нормированных пространств. ([1], гл.4;[2], гл. 3,4;[3], гл.5; [5], гл.4).
4. Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабая сходимость, слабая ограниченность в нормированных пространствах. Критерий слабой сходимости в нормированном пространстве. Слабая сходимость в сопряженном пространстве. Теорема Алаоглу.[1], гл. 4; [2], гл. 4;[3], гл. 8).
5. Обратные операторы. Критерий существования обратного ограниченного оператора. Теорема Неймана. Спектр и резольвента линейного оператора. Свойства спектра линейного ограниченного оператора ([1], гл.4;[3], гл. 13; [5], гл.3, 6).
6. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.([1], гл.4;[2], гл.3).
7. Сопряженные операторы в банаховом пространстве. Сопряженные, самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Элементы спектральной теории. ([2], гл. 7; [3], гл. 9; [5], гл. 6).
8. Компактные операторы. Основные свойства компактных операторов. Критерий конечномерности нормированного пространства. Альтернатива Фредгольма. Теоремы Фредгольма. Полнота собственных функций самосопряженного вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве. ([1], гл. 4,9;[2], гл.6;[3], гл. 9,13).
9. Функции ограниченной вариации. Теорема о представлении функции ограниченной вариации в виде суммы функции скачков, абсолютно непрерывной функции и сингулярной функции. Интеграл Римана-Стилтьеса. Вид линейного ограниченного функционала в $C[a,b]$. Нерефлексивность пространства $C[a,b]$. ([1], гл.5,6,7;[4], гл.3,4,8,9).

Программа семинарских занятий

5 семестр

1. Счетные множества. Метрические пространства.
2. Открытые, замкнутые множества.
3. Сходимость в метрических пространствах. Полнота, пополнение.
4. Плотность, всюду плотность; сепарабельность метрических пространств.

5-6. Компактность, вполне ограниченность, относительная компактность.

7. Контрольная работа.
8. Нормированные пространства.

9-10 Гильбертовы пространства.

11. Линейные функционалы. Непрерывные функционалы. Свойства.
12. Сопряженное пространство. Сходимость.

13-14. Теорема Хана-Банаха. Следствия из теоремы.

15. Виды линейных непрерывных функционалов в конечномерных нормированных пространствах, в пространствах c_0, l_p $(1 \le p < \infty)$, в гильбертовом пространстве (теорема Рисса).
16. Контрольная работа.

6 семестр

1-2. Линейные ограниченные операторы. Норма, сходимость операторов.

3. Обратные операторы.

4-5. Спектр, резольвента линейного оператора.

6. Сопряженные, самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.
7. Контрольная работа.
8. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике. Теорема Банаха-Штейнгауза.

9-10. Вложение нормированного пространства во второе сопряженное. Слабая сходимость в нормированных пространствах.

11.-12. Компактные операторы.

13. Альтернатива Фредгольма. Интегральные уравнения с вырожденным ядром.
14. Контрольная работа.

Основная литература

1. Колмогоров. А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 2004.
2. Люстерник Л.А.. Соболев В.И. *Элементы функционального анализа*. М.:Наука, 1965.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П.. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1984.
4. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной*. М.: Гостехизд-во. 1974.
5. Треногин В.А. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1980.

Дополнительная литература

6. Н.А . Люлько, О.Д . Максимова, В.Ю.Ляпидевский *Функциональный* анализ. *Учебное пособие*. НГУ.2005, 136 стр.
7. Треногин В.А., Писаревский Е.М., Соболева Т.С. *Задачи и упражнения по функциональному анализу. 1984.*
8. Очан Ю.С. *Сборник задач по математическому анализу*. М.: Просвещение, 1981.
9. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыко Я.В. *Задачи и упражнения по функциональному анализу*. Минск, 1978.
10. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. *Теоремы и задачи функционального анализа*. 2-е изд., М. Наука, 1988.