МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Методическая разработка для 1 курса ММФ

Авторы доц. ЖЕЛЯБИН В.Н., проф. ЧУРКИН В.А.

Содержание

2 Евклидовы и эрмитовы пространства

2.1 Определения евклидовых и эрмитовых пространств

Пусть F — поле вещественных ($\mathbb{R}$) или комплексных ($\mathbb{C}$) чисел. Векторное пространство V над полем F называется *эрмитовым*, если каждой упорядоченной паре векторов a, b из V поставлено в соответствие число $(a,b) \in F$, называемое скалярным произведением вектора a на вектор b и обладающее следующими свойствами:

1) $(a,b) = \overline{(b,a)}$, где $\overline{(b,a)}$ — комплексно сопряженное число для (b,a),
2) $(a, \alpha b) = \alpha(a,b)$ для любого $\alpha \in F$,
3) $(a+b, c) = (a,c) + (b,c)$,
4) если $a \neq 0$, то $(a,a) \in \mathbb{R}$ и $(a,a) > 0$.

Если $F = \mathbb{R}$, то V называется *евклидовым*, в этом случае $(a,b) = (b,a)$.

Пример 1. Рассмотрим обычную евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$. Тогда произведение векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, определенное как

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = ||\overrightarrow{a}||\,||\overrightarrow{b}||\cos(\widehat{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}),$$

где $(\widehat{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}})$ — наименьший угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, а $||\overrightarrow{a}||$ — длина вектора $\overrightarrow{a}$, является известным скалярным произведением векторов.

Пример 2. Пусть $V = \mathbb{R}^n$ — n — мерное пространство вектор-столбцов длины n над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Зададим на V скалярное произведение, полагая

$$(a,b) = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n,$$

где $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. Как легко видеть, (доказать самостоятельно) введенное таким образом произведение действительно является скалярным произведением. Такое скалярное произведение называется стандартным, а евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ называется стардартным (координатным).

Упражнение. *Пусть $V = \mathbb{C}^n$ — n — мерное пространство вектор-столбцов длины n над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Зададим на V скалярное произведение, полагая*

$$(a,b) = \overline{\alpha_1}\beta_1 + \ldots + \overline{\alpha_n}\beta_n,$$

где $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. Доказать, что введенное таким образом произведение действительно является скалярным произведением. Эрмитово пространство $\mathbb{C}^n$ азывается стардартным (координатным)

Пример 3. Рассмотрим векторное (функциональное) пространство

$C_{[p,q]} = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ непрерывные функции на отрезке $[p,q]$ с вещественными значениями$\}$.

На пространстве $C_{[p,q]}$ определим скалярное произведение, полагая

$$(f,g) = \int_p^q f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

Тогда $C_{[p;q]}$ с введенным скалярным произведением является евклидовым пространством.

Лемма 1. *В любом эрмитовом (евклидовом) пространстве скалярное произведение* $(\,,\,)$ *удовлетворяет следующим свойствам:*

(a) $(\mathbf{0}, a) = 0$, *где* $\mathbf{0}$ *— нулевой вектор пространства* V,

(b) $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$,

(c) $(\alpha a, b) = \overline{\alpha}(a, b)$ *(в евклидовом пространстве* $(\alpha a, b) = \alpha(a, b)$*).*

Доказательство. Поскольку $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{0}$, где 0 — нулевой элемент поля F, то по свойствам 1) и 2) сколярного произведения

$$(\mathbf{0}, a) = \overline{(a, \mathbf{0})} = \overline{(a, 0 \cdot \mathbf{0})} = \overline{0(a, \mathbf{0})} = \overline{0} = 0.$$

Поэтому (a) доказано.

В силу свойств 1) и 3) имеем

$$(a, b + c) = \overline{(b + c, a)} = \overline{(b, a) + (c, a)} = \overline{(b, a)} + \overline{(c, a)} = (a, b) + (a, c).$$

Поэтому (b) доказано.

Докажем (c). По 1) и 3)

$$(\alpha a, b) = \overline{(b, \alpha a)} = \overline{\alpha(b, a)} = \overline{\alpha}\overline{(b, a)} = \overline{\alpha}(a, b).$$

Поэтому (c) доказано.

Пусть V — евклидово пространство. Рассмотрим множество

$$V_{\mathbb{C}} = \{u + iv | u, v \in V \text{ и } i = \sqrt{-1}\text{— мнимая единица}\}$$

формальных сумм $u + iv$. Каждую формальную сумму $u + iv$ можно понимать как упорядоченную пару векторов u и v. Таким образом, $u + iv = w + iz$ тогда и только тогда, когда $u = w$ и $v = z$. Превратим множество $V_{\mathbb{C}}$ в векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, полагая в качестве операции сложения векторов

$$(u + iv) + (w + iz) = (u + w) + i(v + z),$$

а в качестве операции умножения вектора на скаляр

$$(a + ib)(u + iv) = au - bv + i(av + bv),$$

где au — результат умножения вектора u на скаляр a в евклидовом пространстве V.

Упражнение. *Доказать, что введенные таким образом операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр действительно превращают множество* $V_{\mathbb{C}}$ *в векторное пространство над полем* $\mathbb{C}$.

Зададим на векторном пространстве $V_{\mathbb{C}}$ скалярное произведение векторов

$$\langle u + iv, w + iz \rangle = (u, w) + (v, z) - i((v, w) - (u, z)).$$

Лемма 2. *Введенное произведение векторов в векторном пространстве* $V_{\mathbb{C}}$ *является скалярным произведением.*

Доказательство. Пусть $x = u + iv$ и $y = w + iz$. Тогда, с одной стороны,

$$\langle x, y \rangle = (u, w) + (v, z) - i((v, w) - (u, z)).$$

С другой стороны,

$$\langle y, x \rangle = (w, u) + (z, v) - i((z, u) - (w, v)).$$

Поэтому

$$\overline{\langle y,x\rangle} = (w,u)+(z,v)+i((z,u)-(w,v)) = (u,w)+(v,z)-i((v,w)-(u,z)) = \langle x,y\rangle.$$

Свойство 1) доказано.

Пусть $\alpha = a+ib$ — скаляр из $V_{\mathbb{C}}$. Тогда $\alpha y = aw - bz + i(az+bw)$ и

$$\langle x,\alpha y\rangle = (u, aw-bz) + (v, az+bw) - i((v, aw-bz) - (u, az+bw)) =$$

$$(u,aw)-(u,bz)+(v,az)+(v,bw)-i((v,aw)-(v,bz)-(u,az)-(u,bw)) =$$

$$a(u,w)-b(u,z)+a(v,z)+b(v,w)-i(a(v,w)-b(v,z)-a(u,z)-b(u,w)) =$$

$$a((u,w)+(v,z))+b((v,w)-(u,z))-i(a((v,w)-(u,z))-b((u,w)+(v,z))) =$$

$$(a+ib)((u,w)+(v,z)-i((v,w)-(u,z))) = \alpha\langle x,y\rangle.$$

Свойство 2) доказано.

Свойство 3) очевидно. Докажем справедливость свойства 4). Действительно,

$$\langle x,x\rangle = (u,u)+(v,v)-i((v,u)-(u,v)) = (u,u)+(v,v) \geq 0$$

и если $x \neq 0$, то $\langle x,x\rangle > 0$.

Следовательно, $V_{\mathbb{C}}$ — эрмитово пространство со скалярным произведением $\langle\,,\rangle$. Введенное таким образом пространство $V_{\mathbb{C}}$ называется комплексификацией евклидова пространства V.

Пусть a — вектор эрмитова пространства V. Тогда длину $||a||$ вектора a определим следующим образом

$$||a|| = \sqrt{(a,a)}.$$

В силу свойства 4) скалярного произведения длина вектора a определена корректно. Кроме того, для любого $\alpha \in F$ имеем

$$||\alpha a|| = |\alpha|\,||a||.$$

Если длина вектора a равна 1, то a — вектор единичной длины или *нормированный* вектор.

Пусть a — ненулевой вектор. Тогда $||a|| \neq 0$. Положим $a' = \frac{a}{||a||}$. Как легко видеть,

$$||a'|| = \sqrt{\left(\frac{a}{||a||}, \frac{a}{||a||}\right)} = \sqrt{\frac{(a,a)}{||a||^2}} = 1.$$

Теорема 1 (неравенство Коши-Буняковского-Шварца). *Для любых векторов x,y эрмитова (евклидова) пространства V справедливо неравенство*

$$|(x,y)| \leq ||x||\,||y||,$$

где $|(x,y)|$ — модуль числа (x,y), т.е. $|(x,y)| = \sqrt{(x,y)\overline{(x,y)}}$.

Доказательство. Пусть x,y — вектора эрмитова пространства V. Если $y=0$, то все доказано. Поэтому можно считать, что $y \neq 0$. Рассмотрим вектор $z = x - \frac{(y,x)}{(y,y)}y$. Тогда

$$(z,y) = (x - \frac{(y,x)}{(y,y)}y, y) = (x,y) - \frac{\overline{(y,x)}}{(y,y)}(y,y) = (x,y)-(x,y) = 0.$$

Следовательно,

$$0 \le (z,z) = (x - \frac{(y,x)}{(y,y)}y, z) = (x,z) - (\frac{(y,x)}{(y,y)}y, z) = (x,z) = (x,x) - (x, \frac{(y,x)}{(y,y)}y) = (x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}.$$

Поэтому

$$\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \le (x,x).$$

Отсюда получаем, что

$$|(x,y)|^2 \le ||x||^2||y||^2.$$

Тогда $|(x,y)| \le ||x||\,||y||$.

Заметим, что равенство $|(x,y)| = ||x||\,||y||$ достигается тогда и только тогда, когда скалярное произведение $(z,z) = 0$. Отсюда получаем, что $z = x - \frac{(y,x)}{(y,y)}y = 0$, т.е. вектора x и y — линейно зависимы.

Из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Длины векторов x, y и $x+y$ удовлетворяют следующему неравенству (треугольников)*

$$||x+y|| \le ||x|| + ||y||.$$

Доказательство. По свойствам скалярного произведения имеем

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + \overline{(x,y)} + (y,y).$$

Пусть $(x,y) = a + ib$. Тогда

$$|(x,y)| = \sqrt{(x,y)\overline{(x,y)}} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского получаем

$$(x,y) + \overline{(x,y)} = 2a \le 2|(x,y)| \le 2||x||\,||y||.$$

Следовательно,

$$||x+y||^2 \le ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2.$$

Поэтому

$$||x+y|| \le ||x|| + ||y||.$$

Следствие 2. *Пусть V — евклидово пространство. Тогда для любых ненулевых векторов $x, y \in V$ существует угол ϕ, зависящий от x, y, такой, что $0 \le \phi \le \pi$ и*

$$\cos\phi = \frac{(x,y)}{||x||\,||y||}.$$

Упражнение. *Доказать, что в любом эрмитовом (евклидовом) пространстве имеет место тождество параллелограмма*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

Лемма 3. *В любом эрмитовом (евклидовом) пространстве скалярное произведение можно выразить через длины векторов и операции сложения векторов и умножения на скаляр. Более точно, для любых векторов $x, y \in V$:*

для эрмитова пространства

$$(x,y) = \frac{i||x+y||^2 - ||ix+y||^2 - (i-1)||x||^2 - (i-1)||y||^2}{2i};$$

для евклидова пространства

$$(x,y) = \frac{||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2}{2}.$$

Доказательство. Пусть V — эрмитово пространство. Тогда

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y).$$

Поэтому в любом эрмитовом (евклидовом) пространстве справедливо равенство

$$(x,y) + (y,x) = ||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2.$$

Подставляя в это равенство вместо x вектор ix, получим

$$-i(x,y) + i(y,x) = ||ix+y||^2 - ||ix||^2 - ||y||^2 = ||ix+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2.$$

Умножим теперь первое равенство на i и вычтем из него второе, получим

$$2i(x,y) = i||x+y||^2 - i||x||^2 - i||y||^2 - ||ix+y||^2 + ||x||^2 + ||y||^2 =$$

$$i||x+y||^2 - ||ix+y||^2 - (i-1)||x||^2 - (i-1)||y||^2.$$

Отсюда следует

$$(x,y) = \frac{i||x+y||^2 - ||ix+y||^2 - (i-1)||x||^2 - (i-1)||y||^2}{2i}.$$

Для евклидова пространства все очевидно.

2.2 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Вектора x и y эрмитова пространства V называются *ортогональными* (обозначение $x \perp y$), если их скалярное произведение $(x,y) = 0$. В силу леммы 1.1 получаем, что нулевой вектор $\mathbf{0}$ ортогонален любому вектору пространства V.

Пусть вектора x и y — ортогональны. Тогда

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = ||x||^2 + ||y||^2.$$

В эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ это равенство известно как теорема Пифагора.

Система ненулевых векторов $a_1, \ldots, a_m$ эрмитова пространства называется *ортогональной*, если $(a_i, a_j) = 0$ для $i \neq j$. Ортогональная система векторов единичной длины называется *ортонормированной.*

Лемма 1. *Любая ортогональная система ненулевых векторов $a_1, \ldots, a_m$ — линейно независима. Пусть $dimV = n$. Тогда $m \leq n$.*

Доказательство. Предположим, что некоторая линейная комбинация векторов $a_1, \ldots, a_m$ равна нулю, т.е.

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_1 a_m = \mathbf{0},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F$. Тогда, умножая скалярно обе части этого равенства на вектор a_i, получим

$$\mathbf{0} = (a_i, \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_1 a_m) = \alpha_1 (a_i, a_1) + \ldots + \alpha_m (a_i, a_m).$$

Ввиду ортогональности системы $a_1, \ldots, a_m$ имеем $\alpha_i(a_i, a_i) = 0$. Поэтому $\alpha_i = 0$. В силу произвольности выбора вектора a_i получаем, что все коэффициенты $\alpha_i = 0$. Следовательно, система векторов $a_1, \ldots, a_m$ — линейно независима.

Поскольку число любой линейно независимой системы векторов не превосходит размерности пространства, то $m \leq n$

Теорема 1 (процесс ортогонализации). *Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — линейно независимая система векторов эрмитова (евклидова) пространства V. Тогда можно построить такую ортонормированную систему векторов $e_1, \ldots, e_m$, что каждый вектор e_i является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_i$.*

Доказательство. Положим $e_1 = \frac{a_1}{||a_1||}$. Тогда e_1 — нормированный вектор и является линейной комбинацией вектора a_1.

Предположим, что вектора $e_1, \ldots e_i$ уже построены. Пусть

$$\alpha_1 = (e_1, a_{i+1}), \ldots, \alpha_i = (e_i, a_{i+1}).$$

Рассмотрим вектор

$$e'_{i+1} = a_{i+1} - \alpha_1 e_1 - \ldots - \alpha_i e_i.$$

Ясно, что $e'_{i+1} \neq 0$, в противном случае, a_{i+1} является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_i$. Кроме того, для любого $j = 1, ..., i$ получаем

$$(e_j, e'_{i+1}) = (e_j, a_{i+1}) - \alpha_1(e_j, e_1) - \ldots - \alpha_i(e_j, e_i) = (e_j, a_{i+1}) - \alpha_j = \alpha_j - \alpha_j = 0.$$

Поэтому $(e_1, e'_{i+1}) = ... = (e_i, e'_{i+1}) = 0$. Поскольку каждый вектор e_j, где $j = 1, ..., i$, является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_j$, то и e'_{i+1} является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_{i+1}$.

Пусть теперь $e_{i+1} = \frac{e'_{i+1}}{||e'_{i+1}||}$. Тогда $e_1, ..., e_{i+1}$ — ортонормированная система из $i+1$ векторов, и каждый вектор e_j из этой системы является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_j$.

Продолжая этот процесс, можно построить систему векторов $e_1, \ldots, e_m$.

Следствие 1. *Пусть V — конечномерное эрмитово (евклидово) пространство размерности n. Тогда пространство V имеет ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$. Более того, для любого вектора x*

$$x = (e_1, x)e_1 + \ldots + (e_n, x)e_n.$$

Данное представление вектора x называется разложением Фурье, а коэффициенты $(e_1, x), \ldots, (e_n, x)$ называются коэффициентами Фурье в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — произвольный базис пространства V. В силу теоремы 1 можно построить ортонормированную систему векторов $e_1, ..., e_n$. Покажем, что $e_1, ..., e_n$ — линейный базис пространства V.

Пусть x — произвольный ненулевой вектор из V. Рассмотрим вектор

$$y = x - ((e_1, x)e_1 + \ldots + (e_n, x)e_n).$$

Тогда для любого вектора e_i получаем $(e_i, y) = 0$. Если $y \neq 0$, то пространство V размерности n содержит $n+1$ линейно независимых векторов $e_1, ..., e_n, y$. Следовательно,

$$x = (e_1, x)e_1 + \ldots + (e_n, x)e_n.$$

Лемма 2. *Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис эрмитова (евклидова) пространства V. Пусть*

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j,\ y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j,\ \textit{где } \alpha_j, \beta_j \in F$$

Тогда

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} \beta_j,\ ||x||^2 = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2.$$

Доказательство. Поскольку

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases},$$

то

$$(x, y) = \left(\sum_i \alpha_i e_i, \sum_j \beta_j e_j \right) = \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \beta_j (e_i, e_j) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} b_j$$

В частности,

$$||x||^2 = (x, x) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2$$

2.3 Ортогональные дополнения и ортогональные суммы

Пусть V — эрмитово (евклидово) пространство. Два множества, M и N из V, называются ортогональными (обозначается $M \perp N$), если $(m, n) = 0$ для любого $m \in M$ и $n \in N$.

Упражнение. *Пусть $M \perp N$. Доказать, что либо $M \cap N = \emptyset$, либо $M \cap N = \{0\}$. Как следствие, если N, M — подпространства в V, то $M \cap N = \{0\}$.*

Сумма $U_1 + ... + U_k$ векторных подпространств $U_1, \dots, U_k$ пространства V называется ортогональной, если $U_i \perp U_j$ для $i \neq j$. Ортогональная сумма всегда является прямой суммой.

Действительно, пусть $U = U_1 + ... + U_k$ — ортогональная сумма. Предположим, что

$$x = u_1 + \ldots + u_k \text{ и } x = u_1' + \ldots + u_k', \text{где } u_1, u_1' \in U_1, ..., u_k, u_k' \in U_k,$$

два представления вектора x. Тогда

$$0 = (u_1 - u_1') + \ldots + (u_k - u_k').$$

Так как $u_i - u_i' \in U_i$, то, умножая скалярно обе части последнего равенства на вектор $u_i - u_i'$, получим, что $(u_i - u_i', u_i - u_i') = 0$, т.е. $u_i = u_i'$ для $i = 1, \dots, k$.

Пусть M — подмножество эрмитова пространства V. Определим ортогональное дополнение множества M, полагая

$$M^{\perp} = \{v \in V | (v, m) = 0 \text{ для всех } m \in M\}.$$

Упражнение. *Пусть M — непустое подмножество из V. Доказать, что $M^{\perp}$ — подпространство в V.*

Теорема 1. *Пусть V — конечномерное эрмитово пространство, и L — его подпространство. Тогда V есть прямая (ортогональная) сумма подпространства L и его ортогонального дополнения. В частности, $dimV = dimL + dimL^{\perp}$.*

Доказательство. Пусть $e_1, ..., e_k$ — ортонормированный базис подпространства L и $x \in V$. Рассмотрим вектор $y = (e_1, x)e_1 + ... + (e_k, x)e_k$ и положим $z = x - y$. Тогда

$$(e_i, z) = (e_i, x - y) = (e_i, x) - (e_i, y) = (e_i, x) - (e_i, (e_1, x)e_1 + ... + (e_k, x)e_k) =$$

$$(e_i, x) - (e_1, x)(e_i, e_1) - ... - (e_i, x)(e_i, e_i) - ... - (e_k, x)(e_i, e_k) = (x, e_i) - (x, e_i) = 0$$

для любого $i = 1, ..., k$. Следовательно, $z \in L^{\perp}$. Поэтому $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in L^{\perp}$. Тогда $V = L + L^{\perp}$ — ортогональная сумма. Ясно, что объединение базисов L и $L^{\perp}$ будет базисом пространства V. Поэтому $\dim V = \dim L + \dim L^{\perp}$.

Элемент y подпространства L, построенный при доказательстве теоремы 1, называется *ортогональной проекцией* x на подпространство L, а $z = x - y \in L^{\perp}$ называется *ортогональной составляющей* относительно подпространства L.

Пусть y — ненулевой вектор эрмитова пространства V. Тогда, как показано в теореме 1.1, для вектора x имеем

$$(x - \frac{(y, x)}{(y, y)}y, y) = 0.$$

Пусть L — подпространство, порожденное вектором y. Тогда $\frac{(y,x)}{(y,y)}y$ — ортогональная проекция x на подпространство L. Число $\frac{(x,y)}{(x,y)}$ называется *коэффициентом* Фурье вектора x относительно y. Вектор $x - \frac{(y,x)}{(y,y)}y$ — ортогональная составляющая относительно подпространства L.

Упражнение. *Пусть V — конечномерное эрмитово (евклидово) пространство. Доказать, что для подпространств L, L_1, L_2 имеют место следующие соотношения:*

$$L^{\perp\perp} = L,\ (L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp},\ (L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}.$$

Пусть L — подпространство евклидова (эрмитова) пространства V. Расстоянием $\rho(x, L)$ от точки евклидова пространства, заданной вектором x до подпространства L, называется минимум расстояний от данной точки до точек пространства L, т.е.

$$\rho(x, L) = \min\{||x - u||,\ \text{где } u \in L\}.$$

Покажем, что $\rho(x, L) = ||z||$, где z — ортогональная составляющая вектора x относительно подпространства L.

Действительно, $x = y + z$, где элемент y — ортогональная проекция x на подпространство L, а $z \in L^{\perp}$ — ортогональная составляющая относительно подпространства L. Тогда для $u \in L$

$$||x - u|| = ||y + z - u|| = ||(y - u) + z|| = ||y - u|| + ||z||.$$

Поэтому

$$\rho(x, L) = \min\{||x - u||,\ \text{где } u \in L\} = \min\{||y - u|| + ||z||,\ \text{где } u \in L\} = ||z||.$$

Пример. Пусть на отрезке $[0, 1]$ задана функция $f(x) = \sqrt{x}$, и мы хотим приблизить ее прямой линией $y = a \cdot x + b$.

Рассмотрим евклидово пространство $C_{[0,1]}$. Тогда задача сводится к отысканию значений a, b, для которых длина $||\sqrt{x} - (a \cdot x + b)||$ является минимальной. В пространстве $C_{[0,1]}$ рассмотрим подпространство L, порожденное векторами 1 и x. Длина $||\sqrt{x} - (a \cdot x + b)||$

минимальна, когда вектор $\sqrt{x} - a \cdot x - b$ является ортогональной составляющей вектора $\sqrt{x}$ на подпространство L. Поэтому вектор $a \cdot x + b$ должен быть ортогональной проекцией вектора $\sqrt{x}$ на подпространство L.

Сначала процессом Грама-Шмидта найдем ортогональный базис e_1, e_2 подпространства L. Положим $e_1 = 1$. Тогда

$$(e_1, x) = \int_0^1 1 \cdot x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Пусть $e_2' = x - (e_1, x) e_1 = x - \frac{1}{2} \cdot 1$. Тогда

$$||e_2'|| = \sqrt{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 \, dx} = \sqrt{\frac{1}{3}(x - \frac{1}{2})^3 \Big|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

и $e_2 = \frac{e_2'}{||e_2'||} = 2\sqrt{3}(x - \frac{1}{2} \cdot 1)$. Теперь найдем ортогональную проекцию y вектора $\sqrt{x}$ на подпространство L

$$y = (\sqrt{x}, e_1) e_1 + (\sqrt{x}, e_2) e_2 = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx + 12 \int_0^1 \sqrt{x}(x - \frac{1}{2} \cdot 1) \, dx \cdot (x - \frac{1}{2} \cdot 1) =$$

$$\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^1 + 12 (\frac{2}{5} \sqrt{x^5} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^1)(x - \frac{1}{2} \cdot 1) = \frac{4}{5} x + \frac{4}{15}.$$

2.4 Задачи

1. Пусть $M = L + x_0$ — линейное многообразие евклидова пространства. Расстоянием $\rho(x, M)$ от точки, заданной вектором x до многообразия M называется минимум расстояний от данной точки до точек M, т.е.

$$\rho(x, L + x_0) = \min\{||x - u||, \text{ где } u \in L + x_0\}.$$

Доказать, что $\rho(x, L + x_0) = \rho(x - x_0, L)$.

2. Определителем Грама системы векторов $a_1, ..., a_k$ евклидова пространства называется следующий определитель

$$G(a_1, ..., a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & ... & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & ... & (a_2, a_k) \\ ... & ... & ... & ... \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & ... & (a_k, a_k) \end{vmatrix}.$$

Доказать, что вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда $G(a_1, ..., a_k) \neq 0$.

3. Пусть $M = L + x_0$ — линейное многообразие евклидова пространства, и $a_1, ..., a_k$ — некоторый базис подпространства L. Доказать, что

$$\rho(x, L)^2 = \frac{G(a_1, ..., a_k, x)}{G(a_1, ..., a_k)},\ \rho(x, L + x_0)^2 = \frac{G(a_1, ..., a_k, x - x_0)}{G(a_1, ..., a_k)}.$$

4. Параллелепипедом (k-мерным параллелепипедом), построенным на векторах $a_1, ..., a_k$, называется совокупность векторов

$$\Pi(a_1, ..., a_k) = \{\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k |\, 0 \leq \alpha_i \leq 1\}.$$

Основанием параллелепипеда называется параллелепипед, построенный на любых $k - 1$ векторах из $a_1, ..., a_k$. Индуктивно определим объем k-мерного параллелепипеда:

1) $V(a_1) = ||a||$;

2) $V(a_1, ..., a_k) = V(a_1, ..., a_{k-1})h_k$, где h_k — длина ортогональной составляющей вектора a_k относительно линейной оболочки векторов $a_1, ..., a_{k-1}$.

Доказать, что $V(a_1, ..., a_k) = \sqrt{G(a_1, ..., a_k)}$.

5. Пусть $a_1, ..., a_k$ — ортогональная система векторов длины a. Тогда параллелепипед $\Pi(a_1, ..., a_k)$ называется кубом (k-мерным кубом) с ребром a. Доказать, что планету Земля можно изометрично расположить в n-мерном евклидовом кубике с ребром в 1 см, если n — достаточно большое число, например, $n > 5 \cdot 10^{18}$.

6. Пусть любые два из данных k векторов евклидова пространства V образуют тупой угол. Доказать, что $k \geq 1 + \dim V$.

7. Найти расстояние от функции $(\cos t)^{k+1}$ до линейной оболочки L функций $1, \cos t, \sin t, ..., \cos kt, \sin kt$ в пространстве вещественных непрерывных функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

3 Линейные отображения векторных пространств со скалярным произведением

3.1 Линейные отображения

Пусть V_1 и V_2 — произвольные векторные пространства над полем F. Отображение $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$ называется линейным отображением (гомоморфизмом) векторных пространств, если для любых $a, b \in V_1$ и $\alpha, \beta \in F$ имеет место

$$\mathcal{A}(\alpha a + \beta b) = \alpha \mathcal{A} a + \beta \mathcal{A} b,$$

где $\mathcal{A}a$ и $\mathcal{A}b$ — образы векторов a и b относительно отображения $\mathcal{A}$.

Множество

$$\ker \mathcal{A} = \{u \in V_2 | \mathcal{A} v = 0\}$$

называется *ядром* линейного отображения $\mathcal{A}$. Ядро линейного отображения $\mathcal{A}$ является подпространством в V_1. Действительно, пусть $x, y \in \ker \mathcal{A}$. Тогда для любых $\alpha, \beta \in F$ получаем, что

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A} x + \beta \mathcal{A} y = 0.$$

Следовательно, $\alpha x + \beta y \in \ker \mathcal{A}$. Поэтому $\ker \mathcal{A}$ — подпространство в V_1.

Линейное отображение $\mathcal{A}$ с нулевым ядром называется *инъективным.*

Множество

$$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{u \in V_2 | u = \mathcal{A} v \text{ для некоторого вектора } v \in V_1\}$$

называется *образом* линейного отображения $\mathcal{A}$. Для подпространства $U \subseteq V_1$ положим

$$\mathcal{A}(U) = \{w \in V_2 | w = \mathcal{A} u \text{ для некоторого вектора } u \in U\}.$$

Подмножество $\mathcal{A}(U)$ является подпространством в V_2. Действительно, пусть $u, w \in \mathcal{A}(U)$. Тогда $u = \mathcal{A}x$ и $w = \mathcal{A}y$ для некоторых векторов $x, y \in U$. Поэтому для любых $\alpha, \beta \in F$ получаем

$$\alpha u + \beta w = \alpha \mathcal{A} x + \beta \mathcal{A} y = \mathcal{A}(\alpha x + \beta y) \in \mathcal{A}(U).$$

Как следствие получаем, что $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — подпространство в V_2.

Линейное отображение $\mathcal{A}$ называется *сурьективным*, если $\operatorname{Im} \mathcal{A} = V_2$. Линейное отображение $\mathcal{A}$ называется *изоморфизмом* векторных пространств, если оно инъективно и сурьективно.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$ — линейное отображение. Предположим, что $U = \operatorname{Lin}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — линейная оболочка множества векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq V_1$. Тогда $\mathcal{A}(U) = \operatorname{Lin}(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n)$. В частности, $\dim \mathcal{A}(U) \leq \dim U$.*

Доказательство. Пусть $w \in \mathcal{A}(U)$. Тогда $w = \mathcal{A}u$ для некоторого вектора $u \in U$. Поскольку $u \in U$, то

$$u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. По определению линейного отображения получаем

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 \mathcal{A} e_1 + \ldots + \alpha_n \mathcal{A} e_n.$$

Следовательно, $\mathcal{A}u \in \mathcal{A}(U)$. Поэтому $\mathcal{A}(U) \subseteq \operatorname{Lin}(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n)$. Так как $e_1, \ldots e_n \in U$, то $\mathcal{A}e_1, \ldots \mathcal{A}e_n \in \mathcal{A}(U)$. Следжовательно,

$$\mathcal{A}(U) = \operatorname{Lin}(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n).$$

Выберем в $\{e_1, \ldots, e_n\}$ максимальную независимую подсистему векторов $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}$. Тогда $\dim U = k$. Так как

$$\mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_n) \subseteq \mathrm{Lin}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}),$$

то

$$\mathrm{Lin}(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n) \subseteq \mathrm{Lin}(\mathcal{A}e_{i_1}, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_{i_k}).$$

Поэтому

$$\dim \mathrm{Lin}(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n) \leq \dim \mathrm{Lin}(\mathcal{A}e_{i_1}, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_{i_k}) \leq k = \dim U.$$

Следовательно, $\dim \mathcal{A}(U) \leq \dim U$.

Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — линейное отображение конечномерного векторного пространства V. Тогда число $rk(\mathcal{A}) = \dim \mathrm{Im}\mathcal{A}$ называется *рангом*, а число $d(\mathcal{A}) = \dim \ker \mathcal{A}$ называется *дефектом* линейного отображения $\mathcal{A}$. Справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — линейное отображение конечномерного векторного пространства V. Тогда размерность V равна сумме ранга и дефекта линейного отображения $\mathcal{A}$, т.е.*

$$\dim V = rk(\mathcal{A}) + d(\mathcal{A}).$$

Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_k$ — базис подпространства $\mathrm{Im}\mathcal{A}$. Тогда $k = rk(\mathcal{A})$. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — такие векторы пространства V, что $u_1 = \mathcal{A}v_1, \ldots, u_k = \mathcal{A}v_k$. Пусть теперь $U = Lin(v_1, \ldots, v_k)$. Покажем, что $U \cap \ker(\mathcal{A}) = 0$. Предположим, что

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k \in \ker(\mathcal{A}),$$

для некоторых коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$. Тогда получаем

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k = \alpha_1 \mathcal{A}v_1 + \ldots + \alpha_k \mathcal{A}v_k = \mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) = 0.$$

Так как векторы $u_1, \ldots, u_k$ — линейно независимы, то $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$. Поэтому $U \cap \ker(\mathcal{A}) = 0$.

Рассмотрим произвольный вектор u пространства V. Тогда $\mathcal{A}u \in \mathrm{Im}\mathcal{A}$ и

$$\mathcal{A}u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k,$$

для некоторых коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$. Положим

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k.$$

Тогда

$$\mathcal{A}(u - v) = \mathcal{A}u - \mathcal{A}v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k - \mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) =$$

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k - (\alpha_1 \mathcal{A}v_1 + \ldots + \alpha_k \mathcal{A}v_k) = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k - (\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_k u_k) = 0.$$

Поэтому $u - v \in \ker(\mathcal{A})$. Следовательно, $V = U \oplus \ker(\mathcal{A})$. Отсюда получаем, что

$$\dim V = \dim U + \dim \ker(\mathcal{A}) = rk(\mathcal{A}) + d(\mathcal{A}).$$

Пусть U — подпространство в V_1 и $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$ — линейное отображение. Тогда $\mathcal{A}$ задает линейное отображение $\mathcal{A}|_U : U \mapsto V_2$, определенное правилом $\mathcal{A}|_U x = \mathcal{A}x$, где $x \in U$. Линейное отображение $\mathcal{A}|_U$ называется ограничением $\mathcal{A}$ на подпространство U.

Множество линейных отображений $V_1 \mapsto V_2$ обозначим через $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$. На этом множестве можно ввести структуру векторного пространства, определив операцию сложения двух элементов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ как $(\mathcal{A}+\mathcal{B})v = \mathcal{A}v + \mathcal{B}v$, а умножения на скаляр $\alpha \in F$ как $(\alpha\mathcal{A})v = \alpha(\mathcal{A}v)$, здесь $v \in V_1$.

Элементы пространства $\mathrm{Hom}(V, V)$ будем называть *линейными преобразованиями* или *линейным оператором* векторного пространства V.

Изоморфизм эрмитовых (евклидовых) пространств V_1 и V_2 — это изоморфизм $\mathcal{A}$ векторных пространств V_1 и V_2 с дополнительным свойством

$$(a, b)_1 = (\mathcal{A}a_2, \mathcal{A}b_2)_2,\ \forall a, b \in V_1,$$

здесь $(\ ,\ )_1$ и $(\ ,\ )_2$ — скалярные произведения в V_1 и V_2.

Теорема 1. *Эрмитовы (евклидовы) пространства размерности n изоморфны координатному эрмитову (евклидову) пространству $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$). Два эрмитовых (евклидовых) пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.*

Доказательство. Пусть V — эрмитово пространство и $\dim V = n$. Выберем ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V. Определим линейное отображение $\mathcal{A}$ между V и $\mathbb{C}^n$, полагая

$$\mathcal{A} : a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Тогда $\mathcal{A}$ — изоморфизм векторных пространств V и $\mathbb{C}^n$. В силу леммы 1.2.2 получаем

$$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \beta_i = (\mathcal{A}a, \mathcal{A}b).$$

Случай евклидового пространства разбирается аналогично.

Отсюда следует, что два эрмитовых (евклидовых) пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.

Пусть V — конечномерное векторное пространство с базисом $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ и x — вектор из V. Тогда

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

где $x_1, \dots, x_n \in F$. Через x_e будем обозначать столбец, состоящий из координат $x_1, \dots, x_n$ вектора x в базисе e.

Лемма 3. (Рисса) *Пусть V — конечномерное эрмитово (евклидово) пространство и $f : V \mapsto F$ — линейное отображение. Тогда существует единственный вектор y пространства V такой, что $f(x) = (y, x)$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис пространства V и $\overline{f(e_1)}, \dots, \overline{f(e_n)}$ — сопряженные числа к числам $f(e_1), \dots, f(e_n)$. Положим

$$y = \overline{f(e_1)} e_1 + \ldots + \overline{f(e_n)} e_n.$$

Тогда для любого $i = 1, \dots, n$

$$(y, e_i) = (\overline{f(e_1)} e_1 + \ldots + \overline{f(e_n)} e_n, e_i) = f(e_1)(e_1, e_i) + \ldots + f(e_n)(e_n, e_i) = f(e_i)(e_i, e_i) = f(e_i).$$

Поэтому для любого $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ получаем

$$f(x) = \alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_n f(e_n) = \alpha_1 (y, e_1) + \ldots + \alpha_n (y, e_n) = (y, \alpha_1 e_1) + \ldots + (y, \alpha_n e_n) = (y, x).$$

Пусть z — другой вектор, для которого $f(x) = (z, x)$. Тогда

$$(y - z, x) = (y, x) - (z, x) = f(x) - f(x) = 0$$

для любого $x \in V$. Отсюда следует, что $y = z$.

3.2 Линейные отображения и матрицы

Пусть V_1 и V_2 — векторные пространства над полем F размерностей m и n соответственно. Зафиксируем $e_1, \ldots, e_m$ — базис пространства V_1 и $f_1, \ldots, f_n$ — базис пространства V_2. Тогда для каждого $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ имеем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}e_1 = \alpha_{11}f_1 + \ldots + \alpha_{i1}f_i + \ldots + \alpha_{n1}f_n \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\mathcal{A}e_j = \alpha_{1j}f_1 + \ldots + \alpha_{ij}f_i + \ldots + \alpha_{nj}f_n \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\mathcal{A}e_m = \alpha_{1m}f_1 + \ldots + \alpha_{im}f_i + \ldots + \alpha_{nm}f_n,
\end{aligned}$$

где для любых индексов i, j скаляры $\alpha_{ij} \in F$. Поставим в соответствие линейному отображению $\mathcal{A}$ матрицу

$$A_f^e = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{i1} & \ldots & \alpha_{im} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}.$$

Как известно, это сопоставление является изоморфизмом векторных пространств $\mathrm{Hom}(V_1.V_2)$ и $M_{n,m}(F)$ — множество матриц размера $n \times m$. Следовательно, $\dim \mathrm{Hom}(V_1.V_2) = nm$. Предыдущую систему равенств можно переписать в следующей матричной форме

$$(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_m) = (f_1, \ldots, f_n)A.$$

Пусть x — вектор из V_1. Тогда

$$x = x_1e_1 + \ldots + x_me_m,$$

где $x_1, \ldots, x_m \in F$. Для матрицы $A = (\alpha_{ij})$ из $M_{n,m}(F)$ рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$, заданное матрицей A, т.е. $\mathcal{A}$ задано правилом

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{m}(\alpha_{1i}x_i)f_1 + \ldots + \sum_{i=1}^{m}(\alpha_{ni}x_i)f_n.$$

Если

$$y = \mathcal{A}x = y_1f_1 + \ldots + y_nf_n,$$

где $y_1, \ldots, y_m \in F$, то вектор-столбцы x_e и $\mathcal{A}x_f$ векторов x и $\mathcal{A}x$ в базисах $e_1, \ldots, e_m$ и $f_1, \ldots, f_n$ связаны равенством

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix}$$

или тоже самое $y_f = Ax_e$.

Если $V_1 = V_2$, а базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ совпадают, то матрицу преобразования $\mathcal{A}$ обозначим через A_e.

Теорема 1. *Пусть V — конечномерное векторное пространство, $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — линейное преобразование. Рассмотрим два базиса $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ пространства V. Тогда матрицы A_e и A_f преобразования $\mathcal{A}$ в этих базисах связаны равенством*

$$A_f = T^{-1} A_e T,$$

где T — матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $f_1, \ldots, f_n$.

Доказательство. Пусть $T = (t_{ij})$, $A_e = (\alpha_{ij})$, $A_f = (\beta_{ij})$. Тогда базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ пространства V связаны равенствами

$$\begin{aligned} &f_1 = t_{11}e_1 + \ldots + t_{n1}e_n \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &f_n = t_{1n}e_1 + \ldots + t_{nn}e_n. \end{aligned}$$

В матричной форме эту систему равенств можно записать как

$$(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)T.$$

Подействуем на обе части каждого равенства преобразованием $\mathcal{A}$, получим

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}f_1 = t_{11}\mathcal{A}e_1 + \ldots + t_{n1}\mathcal{A}e_n \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &\mathcal{A}f_n = t_{1n}\mathcal{A}e_1 + \ldots + t_{nn}\mathcal{A}e_n \end{aligned}$$

или в матричной форме $(\mathcal{A}f_1, \ldots, \mathcal{A}f_n) = (\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n)T$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\beta_{11}f_1 + \ldots + \beta_{n1}f_n = t_{11}(\alpha_{11}e_1 + \ldots + \alpha_{n1}e_n) + \ldots + t_{n1}(\alpha_{1n}e_1 + \ldots + \alpha_{nn}e_n) \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &\beta_{1n}f_1 + \ldots + \beta_{nn}f_n = t_{1n}(\alpha_{11}e_1 + \ldots + \alpha_{n1}e_n) + \ldots + t_{nn}(\alpha_{1n}e_1 + \ldots + \alpha_{nn}e_n). \end{aligned}$$

Подставляя вместо $f_1, \ldots, f_n$ их выражения через $e_1, \ldots, e_n$, получаем

$$\begin{aligned} &(\sum_{i=1}^{n} t_{1i}\beta_{i1})e_1 + \ldots + (\sum_{i=1}^{n} t_{ni}\beta_{i1})e_n = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}t_{i1})e_1 + \ldots + (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ni}t_{i1})e_n \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &(\sum_{i=1}^{n} t_{1i}\beta_{in})e_1 + \ldots + (\sum_{i=1}^{n} t_{ni}\beta_{in})e_n = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}t_{in})e_1 + \ldots + (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ni}t_{in})e_n. \end{aligned}$$

В матричной форме эти равенства можно записать как

$$(e_1, \ldots, e_n)(TA_f) = (e_1, \ldots, e_n)(A_eT).$$

Отсюда получаем $TA_f = A_eT$. Следовательно, $A_f = T^{-1}A_eT$.

Упражнение. *Пусть V — конечномерное векторное пространство и $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ — два базиса V. Пусть x — вектор из V, T — матрица перехода от базиса e к f. Доказать, что $x_e = Tx_f$.*

Мы будем отождествлять вектор x конечномерного пространства V с его вектор-столбцом в некотором фиксированном базисе e. Если $\mathcal{A}$ — линейное преобразование пространства V и A — его матрица в базисе e, то допустима запись $\mathcal{A}x = Ax$.

На векторном пространстве $\mathrm{Hom}(V, V)$ введем операцию умножения линейных преобразований, полагая $(\mathcal{AB})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$. Если векторное пространство V — конечномерно и

A, B — матрицы линейных преобразований $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ в некотором базисе, то AB — матрица линейного преобразования $\mathcal{AB}$ в том же базисе. Дейтвителдьно, для вектора x мы имеем $\mathcal{A}x = Ax$ и $\mathcal{B}x = Bx$. Тогда

$$\mathcal{AB}x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x) = A(Bx) = (AB)x.$$

В заключение этого параграфа приведем алгоритм поиска ядра и образа линейного преобразования.

Пусть A — матрица размера $n \times m$. *Элементарными преобразованиями* столбцов матрицы A являются следующие преобразования

1) Элементарное преобразование типа I меняет в матрице A местами i-тый и k-тый столбцы.

2) Элементарное преобразование типа II состоит в умножении i-ого столбца матрицы A на скаляр $c \in F$ и прибавлении его к k-ому столбцу.

Аналогичным образом вводятся элементарные преобразования строк матрицы.

Рассмотрим матрицу $A^\top$, транспонированную к матрице A. Если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарного преобразования i-ого и k-ого столбцов, то матрица $B^\top$ получена из матрицы $A^\top$ с помощью того же самого элементарного преобразования, примененного к i-тый и k-той строкам.

Каждую матрицу A элементарными преобразованиями столбцов можно привести к ступенчатой матрице. Поэтому матрицу $A^\top$ элементарными преобразованиями строк можно привести к ступенчатой матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1k_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{2k_2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{rk_r} & \cdots & a_{rm} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_{1k_1}, \ldots, a_{rk_r} \neq 0$, $1 \leq r \leq n$ и $1 \leq k_1 < \ldots < k_r \leq m$.

Элементарные преобразования типа I и II строк (столбцов) матрицы являются отношением эквивалентности на множестве матриц размера $n \times m$, которое будем обозначать $A \sim B$ для матриц A и B.

Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — линейное преобразование конечномерного векторного пространства, заданное матрицей A порядка n. Образуем матрицу $\begin{pmatrix} A^\top & | & E \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица порядка n. Элементарными преобразованиями строк приведем эту матрицу к виду $\begin{pmatrix} C & | & B \end{pmatrix}$, где C — ступенчатая матрица. Тогда ненулевые строки матрицы C, записанные как вектор-столбцы, образуют базис $\mathrm{Im}\mathcal{A}$, а все строки матрицы B, имеющие нулевое продолжение в C, записанные как вектор-столбцы, образуют базис $\ker \mathcal{A}$. Корректность алгоритма следует из леммы 1.2.

Пример. Найдем образ и ядро линейного преобразования, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 10 & 8 \\ 5 & 11 & 16 & 12 \end{pmatrix}$$

Образуем матрицу

$$\begin{pmatrix} A^\top & | & E \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 11 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 10 & 16 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Умножим 1-ю строку последовательно на -2, -3, -2 и, сложив ее с 2-ой, 3-ей, 4-ой строками, получим

$$\left(A^\top \mid E\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Умножим 2-ю строку последовательно на -1, -2 и сложим ее с 3-ей, 4-ой строками, получим

$$\left(A^\top \mid E\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Тогда вектор-столбцы $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют базис $\mathrm{Im}\mathcal{A}$, а вектор-столбцы $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют базис $\ker \mathcal{A}$.

3.3 Характеристический многочлен

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица порядка n, E — единичная матрица и t — переменная. Многочлен

$$\chi_A(t) = \det(tE - A) = (-1)^n \det(A - tE) = (-1)^n \det \begin{pmatrix} a_{11} - t & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$$

называется *характеристическим* многочленом матрицы A.

Напомним, что матрицы A и B *подобны*, если $A = T^{-1}BT$ для некоторой невырожденной матрицы T, т.е. матрицы с ненулевым определителем. Тогда, для подобных матриц A и B имеет место

$$\chi_A(t) = \det(tE - A) = \det(tE - T^{-1}BT) = \det(T)^{-1}\det(tE - B)\det(T) = \chi_B(t).$$

Следовательно, характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

Таким образом, можно говорить о характеристическом многочлене $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ линейного преобразования $\mathcal{A}$ конечномерного векторного пространства V. А именно, положим $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_A(t)$, где A — матрица линейного преобразования $\mathcal{A}$ в некотором базисе пространства V.

Упражнение. *Напомним, что след квадратной матрицы определяется равенством*

$$Tr(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}.$$

Доказать, что следы и определители подобных матриц совпадают.

Пусть $\mathcal{A}$ — линейное преобразование векторного пространства V. Тогда ненулевой вектор v из V называется *собственным* вектором линейного преобразования $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}v = \alpha v$, где α — скаляр из поля F. При этом скаляр α называется *собственным значением* линейного преобразования $\mathcal{A}$.

Пусть
$$V_\alpha = \{x \in V | \mathcal{A}x = \alpha x\}.$$
Тогда $V_\alpha = \ker(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — тождественное линейное преобразование. Векторное подпространство V_α называется пространством собственных векторов, отвечающих собственному значению α.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейное преобразование конечномерного векторного пространства. Тогда скаляр α — собственное значение $\mathcal{A}$ в том и только в том случае, когда $\chi_\mathcal{A}(\alpha) = 0$.*

Доказательство. Пусть A — матрица, соответствующая преобразованию $\mathcal{A}$ в некотором базисе $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, и x — собственный вектор для $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению α. Тогда $(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})x = 0$. Поэтому линейная однородная система уравнений $(A - \alpha E)X = 0$ имеет ненулевое решение x, здесь мы отождествили вектор x с его вектор-столбцом в базисе e. В этом случае $\det(A - \alpha E) = 0$ (см. например, [1, 5, 2, 6]). Следовательно, $\chi_\mathcal{A}(\alpha) = 0$.

Пусть $\chi_\mathcal{A}(\alpha) = 0$. Тогда $\det(A - \alpha E) = 0$. Следовательно, найдется такой ненулевой вектор x, что $(A - \alpha E)x = 0$. Поэтому $\mathcal{A}x = \alpha x$.

Подпространство U в V называется *инвариантным* относительно линейного преобразования $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}(U) \subseteq U$.

Примерами подпространств, инвариантных относительно линейного преобразования $\mathcal{A}$, являются: само подпространство V, нулевое подпространство, $\ker\mathcal{A}$, $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Если α — собственное значение для $\mathcal{A}$, то подпространство V_α — инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

Лемма 2. *Пусть V — конечномерное векторное пространство, $\mathcal{A}$ — его линейное преобразование и $U_1, \ldots, U_n$ — инвариантные относительно $\mathcal{A}$ подпространства. Предположим, что*
$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n.$$
Тогда $\chi_\mathcal{A}(t) = \chi_1(t) \ldots \chi_n(t)$ — произведение характеристических многочленов ограничения линейного преобразования $\mathcal{A}$ на подпространства $U_1, \ldots, U_n$.

Доказательство. В каждом подпространстве U_i выберем базис $u_{i1}, \ldots, u_{ik_i}$. Пусть A_i — матрица ограничения линейного преобразования $\mathcal{A}$ на подпространство U_i в базисе $u_{i1}, \ldots, u_{ik_i}$. Тогда в базисе $u_{11}, \ldots, u_{1k_1}, u_{21}, \ldots, u_{2k_2}, \ldots, u_{n1}, \ldots, u_{nk_n}$ пространства V матрица A линейного преобразования $\mathcal{A}$ имеет клеточно-диагональный вид
$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}.$$
Пусть $m = \dim V$. Тогда $m = k_1 + \ldots + k_n$ и
$$\chi_\mathcal{A}(t) = (-1)^m \det(A - tE) = (-1)^m \det \begin{pmatrix} A_1 - tE_1 & & & \\ & A_2 - tE_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n - tE_n \end{pmatrix} =$$
$$(-1)^m \det(A_1 - tE_1) \ldots \det(A_n - tE_n) = (-1)^{k_1} \det(A_1 - tE_1) \ldots (-1)^{k_n} \det(A_n - tE_n) = \chi_1(t) \ldots \chi_n(t).$$

Лемма 3. *Пусть V — векторное пространство и $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — его линейные преобразования. Пусть α — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, то подпространство V_α инвариантно относительно преобразования $\mathcal{B}$.*

Доказательство. Пусть $x \in V_\alpha$. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}x) = (\mathcal{AB})x = (\mathcal{BA})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) = \alpha(\mathcal{B}x).$$

Следовательно, $\mathcal{B}x \in V_\alpha$.

Теорема 1. (Гамильтона-Кэли).*Линейное преобразование $\mathcal{A}$ конечномерного векторного пространства и соответствующая ему матрица A аннулируют свой характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$, т.е. $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \chi_A(A) = 0$.*

Доказательство теоремы Гамильтона-Кэли можно найти в [1, 5, 2, 6].

Упражнение. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем вещественных чисел и $\mathcal{A}$ — линейное преобразование пространства V. Доказать, что в V существует одномерное или двухмерное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$.*

В дальнейшем множество собственных значений линейного преобразования $\mathcal{A}$ будем обозначать через $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$.

3.4 Сопряженные линейные отображения

Пусть V_1 и V_2 — эрмитовы (евклидовы) пространства со скалярными произведениями $(\,,)_1$ и $(\,,)_2$. Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$. Линейное отображение $\mathcal{A}^* : V_2 \mapsto V_1$ называется *сопряженным* к $\mathcal{A}$, если

$$(\mathcal{A}x_1, x_2)_2 = (x_1, \mathcal{A}^* x_2)_1$$

для любых $x_1 \in V_1$ и $x_2 \in V_2$.

Если A — матрица из $M_{n,m}(\mathbb{C})$, то через A^* обозначим сопряженно-транспонированную матрицу к матрице A, т.е. $A^* = \overline{A}^\top$, где матрица $\overline{A}$ получена из матрицы A комплексным сопряжением каждого его элемента. Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$. Тогда, как легко видеть, $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$. Поэтому $\det(A^*) = \det(\overline{A}^\top) = \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$. Если A, B — матрицы из $M_n(\mathbb{C})$, то $(AB)^* = B^* A^*$.

Упражнение. *Пусть A — невырожденная матрица. Доказать, что $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Теорема 1. *$\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$ — линейное отображение эрмитовых (евклидовых) пространств. Если существует линейное отображение $\mathcal{A}^* : V_2 \mapsto V_1$ сопряженное к $\mathcal{A}$, то оно – единственно. Пусть V_1 и V_2 — пространства конечной размерности. Тогда отображение $\mathcal{A}^*$ всегда существует. При этом, если A — матрица линейного отображения $\mathcal{A}$, заданная в некоторых ортонормированных базисах эрмитовых пространств V_1 и V_2, то A^* — матрица линейного отображения $\mathcal{A}^*$, заданная в тех же ортонормированных базисах эрмитовых пространств V_2 и V_1.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ имеет два сопряженных линейных отображения $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{B}$ — отображения пространства V_2 в пространство V_1, и для любых векторов $x \in V_1, y \in V_2$ имеем

$$(x, \mathcal{A}^* y)_1 = (\mathcal{A}x, y)_2 = (x, \mathcal{B}y)_1.$$

Поэтому $(x, (\mathcal{A}^* - \mathcal{B})y)_1 = 0$. Следовательно, $\mathcal{A}^* y = \mathcal{B}y$ для любого вектора $y \in V_2$, т.е. $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}$.

Пусть размерности пространств V_1 и V_2 конечны. Зафиксируем в пространстве V_1 ортонормированный базис $e_1, \dots, e_m$, а в V_2 ортонормированный базис $f_1, \dots, f_n$. Пусть в этих базисах линейному отображению $\mathcal{A}$ соответствует матрица

$$A_f^e = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A}^* : V_2 \mapsto V_1$, заданное равенствами

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}^* f_1 = \overline{\alpha}_{11} e_1 + \ldots + \overline{\alpha}_{1m} e_m \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &\mathcal{A}^* f_n = \overline{\alpha}_{n1} e_1 + \ldots + \overline{\alpha}_{nm} e_m. \end{aligned}$$

Тогда для элементов e_i, f_j получаем,

$$(\mathcal{A}e_i, f_j)_2 = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} f_k, f_j,)_2 = (\alpha_{ji} f_j, f_j,)_2 = (f_j, \overline{\alpha}_{ji} f_j)_2 =$$

$$(e_i, \overline{\alpha}_{ji} e_i)_1 = (e_i, \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_{jk} e_k)_1 = (e_i, \mathcal{A}^* f_j)_1.$$

Отсюда следует, что $(\mathcal{A}x, y)_2 = (x, \mathcal{A}^* y)_1$ для любых векторов $x \in V_1, y \in V_2$. Следовательно, $\mathcal{A}^*$ — линейное отображение, сопряженное к $\mathcal{A}$. По построению $\mathcal{A}^*$ получаем, что A^* — матрица линейного отображения $\mathcal{A}^*$ в базисах $f_1, \dots, f_n$ и $e_1, \dots, e_m$.

Следствие 1. *Пусть $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ — ортонормированный базис и $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ — произвольный базис эрмитова (евклидова) пространства V. Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — линейное преобразование и A — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в базисе f. Если B — матрица преобразования $\mathcal{A}^*$ в базисе f, то*

$$B = (T^*T)^{-1} A^* (T^*T),$$

где T — матрица перехода от базиса e к базису f.

Доказательство. Пусть A_e — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в базисе e. По теореме 1 A_e^* — матрица преобразования $\mathcal{A}^*$ в базисе e. По теореме 2.1 имеем $B = T^{-1} A_e^* T$ и $A = T^{-1} A_e T$. Отсюда $A_e = TAT^{-1}$. Тогда

$$B = T^{-1}(TAT^{-1})^* T = T^{-1}(T^*)^{-1} A^* T^* T = (T^*T)^{-1} A^* (T^*T).$$

Упражнение. *Пусть $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ — произвольный базис эрмитова пространства V. Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — линейное преобразование и A — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в базисе f, а B — матрица преобразования $\mathcal{A}^*$ в базисе f. Доказать, что*

$$B = G(f_1, f_2, .., f_n)^{-1} A^* G(f_1, f_2, .., f_n),$$

где $G(f_1, f_2, .., f_n)$ — матрица Грама системы векторов базиса f.

Следствие 2. *Пусть V — конечномерное эрмитово пространство, и $\mathcal{A}$ — его линейное преобразование. Если α — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$, то $\overline{\alpha}$ — собственное значение преобразования $\mathcal{A}^*$.*

Доказательство. Пусть A — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе пространства V. Тогда A^* — матрица преобразования $\mathcal{A}^*$ в том же базисе. Так как α — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$, то по лемме 3.1 $\det(A - \alpha E) = 0$. Тогда

$$\det(A^* - \overline{\alpha} E) = \det((A - \alpha E)^*) = \det((\overline{A - \alpha E})^\top) = \overline{\det(A - \alpha E)} = 0.$$

Следовательно, $\chi_{\mathcal{A}^*}(\overline{\alpha}) = 0$. В силу леммы 3.1 $\overline{\alpha}$ — собственное значение преобразования $\mathcal{A}^*$.

Лемма 1. *Для любого линейного преобразования $\mathcal{A}$ сопряженное преобразование $\mathcal{A}^*$ обладает следующими свойствами:*
(i) $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$,
(ii) $(\alpha\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^*$, где $\alpha \in \mathbb{C}$,
(iii) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$,
(iv) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$.

Доказательство. По определению сопряженного преобразования для любых $x, y \in V$ имеем
$$(x, (\mathcal{A}^*)^*y) = (\mathcal{A}^*x, y) = \overline{(y, \mathcal{A}^*x)} = \overline{(\mathcal{A}y, x)} = (x, \mathcal{A}y).$$
Отсюда получаем (i).

Аналогично
$$(x, (\alpha\mathcal{A})^*y) = (\alpha\mathcal{A}x, y) = \overline{\alpha}(\mathcal{A}x, y) = (x, \overline{\alpha}\mathcal{A}^*y).$$
Поэтому $(\alpha\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^*$.

Докажем (iv). Мы имеем
$$(x, (\mathcal{A}\mathcal{B})^*y) = ((\mathcal{A}\mathcal{B})x, y) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}x), y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{B}^*(\mathcal{A}^*y)) = (x, (\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*)y).$$
Поэтому $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$.

Лемма 2. *Пусть V — конечномерное эрмитово (евклидово) пространство, и $\mathcal{A}$ — его линейное преобразование. Пусть подпространство U инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Тогда ортогональное дополнение $U^\perp$ — инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$.*

Доказательство. По условию леммы $\mathcal{A}u \in U$ для любого $u \in U$. Пусть $x \in U^\perp$. Тогда для любого $u \in U$
$$(u, \mathcal{A}^*x) = (\mathcal{A}u, x) = 0.$$
Следовательно, $\mathcal{A}^*x \in U^\perp$. Поэтому $U^\perp$ — инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$.

Пусть $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$ — линейное отображение эрмитовых пространств, а $\mathcal{A}^* : V_2 \mapsto V_1$ — сопряженное к $\mathcal{A}$ отображение. Тогда $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ — линейное преобразование пространства V_1, а $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ — линейное преобразование пространства V_2.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$ — линейное отображение конечномерных эрмитовых (евклидовых) пространств. Тогда* $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}\mathcal{A}^*) = \mathrm{Sp}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})$. Тогда $\mathcal{A}^*\mathcal{A}x = \alpha x$ для ненулевого вектора $x \in V_1$. Предположим, что $\mathcal{A}x \neq 0$. Так как $\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{A}x = \alpha\mathcal{A}x$, то $\mathcal{A}x$ — собственный вектор преобразования $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, отвечающий собственному значению α. Следовательно, $\alpha \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)$.

Предположим, что $\mathcal{A}x = 0$. Тогда $\alpha = 0$. Если A — матрица линейного отображения $\mathcal{A}$, заданная в некоторых ортонормированных базисах векторных пространств V_1 и V_2, то $Ax = 0$. Следовательно, $\det(A) = 0$. Тогда $\det(A^*) = \overline{\det(A)} = 0$. Поэтому $A^*y = 0$ для ненулевого вектора $y \in V_2$. Следовательно, $\mathcal{A}^*y = 0$. Тогда $\mathcal{A}\mathcal{A}^*y = 0$. Поэтому $\alpha \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)$.

Таким образом, $\mathrm{Sp}(A^*A) \subseteq \mathrm{Sp}(AA^*)$. Аналогично получаем, что $\mathrm{Sp}(AA^*) \subseteq \mathrm{Sp}(A^*A)$.

3.5 Эрмитовы, косоэрмитовы преобразования

Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — линейное преобразование эрмитова пространства. Тогда $\mathcal{A}$ называется *эрмитовым (самосопряженным)* преобразованием, если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. В случае евклидовых пространств $\mathcal{A}$ называется *симметрическим* преобразованием.

Пусть A — матрица из $M_n(\mathbb{C})$. Тогда A называется *эрмитовой* матрицей, если $A^* = A$. В вещественном случае эрмитова матрица называется *симметрической.*

Пусть V — эрмитово (евклидово) пространство размерности n. Тогда матрица эрмитова (симметрического) преобразования в ортонормированном базисе является эрмитовой (симметрической). Если A — эрмитова (симметрическая) матрица порядка n, то $\mathcal{A} : V \mapsto V$, заданное правилом $\mathcal{A}x = Ax$, является эрмитовым (симметрическим) преобразованием.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — эрмитово (симметрическое) преобразование конечномерного эрмитова (евклидова) пространства. Тогда собственные значения преобразования $\mathcal{A}$ вещественны.*

Доказательство. Пусть x — собственный вектор преобразования $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению α. Тогда

$$\alpha(x, x) = (x, \alpha x) = (x, \mathcal{A}x) = (x, \mathcal{A}^* x) = (\mathcal{A}x, x) = (\alpha x, x) = \overline{\alpha}(x, x).$$

Так как $x \neq 0$, то $\alpha = \overline{\alpha}$. Поэтому α — вещественное число.

Пусть V — евклидово пространство. Рассмотрим пространство $V_{\mathbb{C}}$ — комплексификацию пространства V. Если A — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе, то матрица A индуцирует в эрмитовом пространстве $V_{\mathbb{C}}$ эрмитово преобразование. По предыдущему, собственные значения этого преобразования, а следовательно, и матрицы A — вещественны. Поэтому собственные значения преобразования $\mathcal{A}$ вещественны.

Приведем еще одно доказательство леммы 1, основанное на принципе максимума из математического анализа.

Пусть $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис евклидова пространства V и A — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе. Если x_e — вектор столбец из координат вектора x в базисе e, то Ax_e — вектор столбец из координат вектора $\mathcal{A}x$ в том же базисе. Тогда по лемме 2.2.2 $(x, \mathcal{A}x) = x_e^\top A x_e$. Рассмотрим функцию $f(x_e) = x_e^\top A x_e$. Тогда $f(x_e)$ — функция, заданная на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}$. Так как $f(x_e)$ — многочлен степени 2 от координат вектора x, то функция $f(x_e)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Поэтому, по теореме Больцоно-Вейерштрасса, $f(x_e)$ достигает своего максимума λ на компакте $S = \{x \in V | \, ||x|| = 1\}$. Следовательно, $(u, \mathcal{A}u) = \lambda$, для некоторого $u \in S$ и $(x, \mathcal{A}x) \leq \lambda$ для всех $x \in S$. Пусть y — ненулевой вектор. Так как $\frac{y}{||y||}$ — вектор длины 1, то $(\frac{y}{||y||}, \mathcal{A}\frac{y}{||y||}) \leq \lambda$. Тогда

$$(y, \mathcal{A}y) \leq \lambda ||y||^2 \text{ для любого вектора } y \text{ и } (u, \mathcal{A}u) = \lambda.$$

Подставим в это неравенство вместо y вектор $u + \epsilon z$, где $\epsilon \in \mathbb{R}$, получим

$$(u + \epsilon z, \mathcal{A}(u + \epsilon z)) \leq \lambda(u + \epsilon z, u + \epsilon z).$$

Отсюда

$$(u, \mathcal{A}u) + \epsilon(u, \mathcal{A}z) + \epsilon(z, \mathcal{A}u) + \epsilon^2(z, \mathcal{A}z) \leq \lambda((u, u) + 2\epsilon(u, z) + \epsilon^2(z, z)).$$

Так как $(u, \mathcal{A}u) = \lambda(u, u)$, то

$$\epsilon(u, \mathcal{A}z) + \epsilon(z, \mathcal{A}u) + \epsilon^2(z, \mathcal{A}z) \leq \lambda(2\epsilon(u, z) + \epsilon^2(z, z)).$$

Так как $\mathcal{A}$ — симметрическое преобразование, то

$$(u, \mathcal{A}z) + (z, \mathcal{A}u) = (u, \mathcal{A}z) + (\mathcal{A}z, u) = 2(u, \mathcal{A}z).$$

Поэтому

$$2\epsilon(u, \mathcal{A}z) + \epsilon^2(z, \mathcal{A}z) \leq \lambda(2\epsilon(u, z) + \epsilon^2(z, z)).$$

Тогда
$$2\epsilon(u, \mathcal{A}z - \lambda z) + \epsilon^2(z, \mathcal{A}z - \lambda z) \le 0$$
для любого вектора z.

Если $\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$, то $\mathrm{Im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = V$ и $u = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})z$, для некоторого вектора z. Поэтому
$$2\epsilon(u, u) + \epsilon^2(z, \mathcal{A}z - \lambda z) \le 0.$$
Выберем положительное число ϵ так, что $\frac{2(u,u)}{\epsilon} > -(z, \mathcal{A}z - \lambda z)$. Тогда получим
$$2\epsilon(u, \mathcal{A}z - \lambda z) + \epsilon^2(z, \mathcal{A}z - \lambda z) > 0.$$
Следовательно, $\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \neq 0$. Тогда λ — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$.

Пусть v — собственный вектор преобразования $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ. Рассмотрим подпространства L, порожденное вектором v. Тогда $V = L + L^{\perp}$, и по лемме 4.2 подпространство $L^{\perp}$ инвариантно относительно преобразования $\mathcal{A}$. Применяя индукцию по размерности пространства получаем, что $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{R}$.

Также отметим, что спектр линейного преобразования $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ неотрицательный, т.е. $\alpha \ge 0$ для любого $\alpha \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})$. Действительно, пусть α — собственное значение линейного преобразования $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и v — собственный вектор, отвечающий α. Тогда
$$\alpha(v, v) = (\alpha v, v) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}v, v) = (\mathcal{A}v, \mathcal{A}v) \ge 0.$$
Следовательно, $\alpha \ge 0$.

Заметим, что в силу леммы 4.1, для эрмитова преобразования $\mathcal{A}$ имеет место
$$(i\mathcal{A})^* = \bar{i}\mathcal{A}^* = -i\mathcal{A}.$$

Линейное преобразование $\mathcal{A} : V \mapsto V$ эрмитова пространства называется *косоэрмитовым (кососопряженным)*, если $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$. В случае евклидовых пространств $\mathcal{A}$ называется *кососимметрическим.*

Пусть A — матрица из $M_n(\mathbb{C})$. Тогда A называется *косоэрмитовой* матрицей, если $A^* = -A$. В вещественном случае косоэрмитова матрица называется кососимметрической.

Пусть V — эрмитово (евклидово) пространство размерности n. Тогда матрица косоэрмитового (кососимметрического) преобразования в ортонормированном базисе является косоэрмитовой (кососимметрической). Если A — косоэрмитова (кососимметрическая) матрица порядка n, то $\mathcal{A} : V \mapsto V$, заданное правилом $\mathcal{A}x = Ax$, является косоэрмитовым (кососимметрическим) преобразованием.

Лемма 2. *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ евклидова пространства V является кососимметричеким тогда и только тогда, когда любой вектор x из V ортогонален своему образу $\mathcal{A}x$.*

Доказательство. Пусть $x \perp \mathcal{A}x$ для любого $x \in V$. Пусть x, y — произвольные векторы из V. Тогда $(x + y) \perp \mathcal{A}(x + y)$. Следовательно, $(\mathcal{A}(x + y), x + y) = 0$. Поскольку
$$(\mathcal{A}(x + y), x + y) = (\mathcal{A}x, x) + (\mathcal{A}x, y) + (\mathcal{A}y, x) + (\mathcal{A}y, y),$$
то $(\mathcal{A}x, y) + (\mathcal{A}y, x) = 0$. Отсюда получаем, что
$$(\mathcal{A}x, y) = -(\mathcal{A}y, x) = -(y, \mathcal{A}^*x) = -(\mathcal{A}^*x, y).$$
Следовательно, $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$.

Обратно, пусть $\mathcal{A}$ — коссосиметрическое преобразование. Тогда $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$ и $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^*x) = -(x, \mathcal{A}x)$ для любого $x \in V$. Поэтому $(\mathcal{A}x, x) = -(\mathcal{A}x, x)$. Следовательно, $(\mathcal{A}x, x) = 0$.

Пусть $\mathcal{A}$ — косоэрмитово (кососимметрическое) преобразование. Тогда для любых векторов x, y

$$(\mathcal{A}^2x, y) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}^*y) = -(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = -(x, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}y)) = (x, \mathcal{A}^2y).$$

Поэтому преобразование $\mathcal{A}^2$ — эрмитово (симметрическое).

Пусть β — собственное значение преобразования $\mathcal{A}^2$ и v — собственный вектор, отвечающий β. Тогда, по лемме 1, β — вещественное число. Покажем, что $\beta \leq 0$. Действительно,

$$\beta(v, v) = (\beta v, v) = (\mathcal{A}^2v, v) = (\mathcal{A}v, \mathcal{A}^*v) = -(\mathcal{A}v, \mathcal{A}v) \leq 0.$$

Отсюда получаем, что $\beta \leq 0$.

Предположим, что V — конечномерное пространство и A — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в некотором базисе. Тогда A^2 — матрица преобразования $\mathcal{A}^2$.

Пусть теперь α — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$. Тогда

$$\det(A^2 - \alpha^2E) = \det(A - \alpha E)\det(A + \alpha E).$$

Так как $\det(A - \alpha E) = 0$, то $\det(A^2 - \alpha^2E) = 0$. Поэтому α^2 — собственное значение преобразования $\mathcal{A}^2$. Тогда α^2 — отрицательное вещественное число. Следовательно, либо $\alpha = 0$, либо α — чисто мнимое комплексное число.

Пусть α — собственное значение преобразования $\mathcal{A}^2$. Так как $\alpha \leq 0$, то $\alpha = -\beta^2$, где $\beta \geq 0$. Тогда

$$\det(A^2 - \alpha E) = \det(A^2 + \beta^2E) = \det(A - i\beta E)\det(A + i\beta E) = \det(A - \sqrt{\alpha}E)\det(A + \sqrt{\alpha}E).$$

Следовательно, либо $\det(A - \sqrt{\alpha}E) = 0$, либо $\det(A + \sqrt{\alpha}E) = 0$. Поэтому, либо $\sqrt{\alpha}$, либо $-\sqrt{\alpha}$ — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$.

Предположим, что $\mathcal{A}$ — кососимметрическое преобразование. В этом случае характеристический многочлен $\mathcal{A}$ является многочленом с вещественными коэффициентами. Если $-\sqrt{\alpha}$ — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$, то комплексно-сопряженное к ниму число $\overline{-\sqrt{\alpha}}$ также является собственным значением преобразования $\mathcal{A}$. Так $\overline{-\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\alpha}$, то $\sqrt{\alpha}$ — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$.

Таким образом, справедлива

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — косоэрмитово (кососимметрическое) преобразование конечномерного эрмитова (евклидова) пространства. Тогда $\mathcal{A}^2$ — эрмитово (симметрическое) преобразование. Все ненулевые собственные значения преобразования $\mathcal{A}^2$ отрицательные. Каждое собственное значение преобразования $\mathcal{A}$ либо равно нулю, либо является чисто мнимым комплексным числом. Более того, если α — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$, то α^2 — собственное значение преобразования $\mathcal{A}^2$. Если α — собственное значение преобразования $\mathcal{A}^2$, то либо $\sqrt{\alpha}$, либо $-\sqrt{\alpha}$ — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ — кососимметрическое преобразование, то $\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha}$ — собственные значения преобразования $\mathcal{A}$.*

Упражнение. *Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — косоэрмитово преобразование конечномерного эрмитова пространства. Доказать, что $i\mathcal{A}$ — эрмитово преобразование. Вывести отсюда, что каждое собственное значение преобразования $\mathcal{A}$ либо равно нулю, либо является чисто мнимым комплексным числом.*

Эрмитовы, косоэрмитовы и симметрические, кососимметрические преобразования являются подклассом более широкого класса преобразований, а именно, нормальных линейных преобразований.

Линейное преобразование $\mathcal{A} : V \mapsto V$ эрмитова (евклидова) пространства называется *нормальным*, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, т.е. преобразования $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ коммутируют.

Если A — матрица нормального преобразования $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе, то в силу теоремы 4.1, A^* — матрица преобразования $\mathcal{A}^*$ в том же базисе. Поэтому $AA^* = A^*A$. Обратно, пусть A — нормальная матрица из $M_n(\mathbb{C})$, т.е. $AA^* = A^*A$. Тогда линейное преобразование $\mathcal{A} : V \mapsto V$, заданное правилом $\mathcal{A} : x \mapsto Ax$ является нормальным.

Теорема 1. *Пусть V — конечномерное эрмитово пространство и $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — нормальное преобразование. Тогда характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^{p}(t-\alpha_i)^{n_i}$ и $V = V_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_p}$— ортогональная сумма, т.е. $V_{\alpha_i} \perp V_{\alpha_j}$ для $i \neq j$ и $\dim V_{\alpha_i} = n_i$. В частности, собственные векторы преобразования $\mathcal{A}$, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Поскольку V — эрмитово пространство, то $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^{p}(t-\alpha_i)^{n_i}$. Рассмотрим подпространство V_{α_1} собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$, отвечающих собственному значению α_1. Тогда $V = V_{\alpha_1} \oplus V_{\alpha_1}^{\perp}$. В силу леммы 3.3 V_{α_1} инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$. Тогда, по лемме 4.2, $V_{\alpha_1}^{\perp}$ инвариантно относительно $(\mathcal{A}^*)^*$. В силу леммы 4.1 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^*$. Поэтому $V_{\alpha_1}^{\perp}$ — инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Ограничение линейного преобразования $\mathcal{A} - \alpha_1\mathcal{E}$ на подпространство $V_{\alpha_1}^{\perp}$ является невырожденным линейным преобразованием. Ясно, что $(t-\alpha_1)^{k_1}$ — характеристический многочлен преобразования $\mathcal{A}|_{V_{\alpha_1}}$, здесь $k_1 = \dim V_{\alpha_1}$. Тогда, в силу леммы 3.2, $k_1 = n_1$ и $\prod_{i=2}^{p}(t-\alpha_i)^{n_i}$ — характеристический многочлен преобразования $\mathcal{A}|_{V_{\alpha_1}^{\perp}}$. Поскольку $\dim V_{\alpha_1}^{\perp} < \dim V$, то индукцией по размерности V получаем, что $V_{\alpha_1}^{\perp} = V_{\alpha_2} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_p}$ — ортогональная сумма, при этом $\dim V_{\alpha_i} = n_i$. Следовательно, $V = V_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_p}$ — ортогональная сумма и $\dim V_{\alpha_i} = n_i$ для каждого $i = 1, \ldots, p$.

Примером нормального преобразования эрмитова пространства может служить преобразование, заданное диагональной матрицей с комплексными коэффициентами. Нормальные преобразования такого типа называются *каноническими*.

Теорема 2. *Для любого нормального преобразования $\mathcal{A}$ конечномерного эрмитова пространства V существует ортонормированный базис пространства V, состоящий из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$. В этом базисе преобразование $\mathcal{A}$ имеет канонический вид, т.е. его матрица диагональна с собственными значениями по диагонали.*

Доказательства. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ — собственные значения преобразования $\mathcal{A}$ и $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_p}$ — подпространства собственных векторов, отвечающих этим собственным значениям. Тогда, в силу теоремы 1, имеем $V = V_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_p}$ — ортогональная сумма. Выберем в подпространстве V_{α_i} ортонормированный базис $u_{i1}, \ldots, u_{in_i}$, здесь n_i — кратность корня α_i в характеристическом многочлене $\chi_{\mathcal{A}}(t)$. По определению подпространства V_{α_i} мы имеем $\mathcal{A}u_{ij} = \alpha_i u_{ij}$. Тогда

$$u_{11}, \ldots, u_{1n_1}, \ldots, u_{p1}, \ldots, u_{pn_p}$$

является базисом пространства V, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид с собственными значениями по диагонали.

Заметим, что теоремы 1 и 2 остаются справедливыми, если в условиях этих теорем эрмитово пространство заменить на евклидово и добавить включение $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{R}$. Ввиду сказанного выше, получаем

Следствие 1. *Для любого эрмитова (симметрического) преобразования $\mathcal{A}$ конечномерного эрмитова (евклидова) пространства V существует ортонормированный базис пространства V, состоящий из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$. В этом базисе* *преобразование $\mathcal{A}$ имеет канонический вид, т.е. его матрица диагональна с вещественными собственными значениями по диагонали.*

Пример. Пусть симметрическое преобразование $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства $V = \mathbb{R}^3$ задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти ортонормированный базис, в котором линейное преобразование $\mathcal{A}$ имеет канонический вид.

Сначала вычислим характеристический многочлен

$$\chi_A(t) = -\det \begin{pmatrix} 11-t & 2 & -8 \\ 2 & 2-t & 10 \\ -8 & 10 & 5-t \end{pmatrix} = (t^2-81)(t-18).$$

Поэтому $\mathrm{Sp}(A) = \{-9, 9, 18\}$.Тогда

$$V = V_{-9} + V_9 + V_{18}.$$

Найдем базис подпространства V_{-9}. Элементарными преобразованиями строк матрицы получаем, что

$$(A+9E|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 2 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 10 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 11 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 54 & 54 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Вектор-столбец $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ образует базис V_{-9}. Найдем базис подпространства V_9

$$(A-9E|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 10 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Вектор-столбец $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ образует базис V_9. Аналогично, вектор-столбец $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ образует базис V_{18}.

В ортонормированном базисе $e_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$,$e_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ линейное преобразование $\mathcal{A}$ имеет канонический вид

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Следствие 2. *Для любого косоэримитова преобразования $\mathcal{A}$ конечномерного эрмитова пространства V существует ортонормированный базис пространства V, состоящий из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$. В этом базисе преобразование $\mathcal{A}$ имеет канонический вид, т.е. его матрица диагональна с нулевыми или чисто мнимыми собственными значениями по диагонали.*

3.6 Нормальные преобразования евклидовых пространств

В этом параграфе будет описан канонический вид нормального преобразования, действующего в конечномерном евклидовом пространстве. Сначала исследуем кососимметрические преобразования, действующие в евклидовых пространствах.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — кососимметрическое преобразование конечномерного евклидова пространства. Предположим, что $\mathcal{A}^2 + \alpha\mathcal{E} = 0$, где $\alpha > 0$. Тогда $\dim V = 2n$, $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 + \alpha)^n$ и в V существует ортонормированный базис $f_1, g_1, \ldots, f_n, g_n$, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет клеточно-диагональный вид*

$$S(\alpha) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $\beta = \sqrt{\alpha}$ и g_1 — произвольный нормированный вектор в пространстве V. Положим $f_1 = -\beta^{-1}\mathcal{A}g_1$. Тогда $\mathcal{A}f_1 = -\beta^{-1}\mathcal{A}^2 g_1 = \beta^{-1}\alpha\mathcal{E}g_1 = \beta g_1$. Поэтому

$$\mathcal{A}f_1 = \beta g_1 \text{ и } \mathcal{A}g_1 = -\beta f_1.$$

В силу леммы 5.2 $f_1 \perp g_1$. Покажем, что f_1 — нормированный вектор. Действительно,

$$(f_1, f_1) = (\beta^{-1}\mathcal{A}g_1, \beta^{-1}\mathcal{A}g_1) = \beta^{-2}(g_1, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}g_1)) = -\beta^{-2}(g_1, \mathcal{A}(\mathcal{A}g_1)) = -\beta^{-2}(g_1, \mathcal{A}^2 g_1) =$$

$$-\beta^{-2}(g_1, -\alpha g_1) = \beta^{-2}\alpha(g_1, g_1) = 1.$$

Рассмотрим подпространство U, натянутое на векторы f_1 и g_1, т.е. $U = \mathrm{Lin}(f_1, g_1)$. Ясно, что U инвариантно относительно $\mathcal{A}$. В силу леммы 4.2, ортогональное дополнение $U^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Поскольку $\dim U^\perp < \dim V$, то, применяя несложную индукцию по размерности пространства, можно считать, что $\dim U^\perp = 2(n-1)$ и $(t^2 + \alpha)^{n-1}$ — характеристический многочлен ограничения преобразования $\mathcal{A}$ на $U^\perp$. Матрица преобразования $\mathcal{A}|_U$ в базисе f_1, g_1 имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому $t^2 + \alpha$ — характеристический многочлен преобразования $\mathcal{A}|_U$. Так как $V = U \oplus U^\perp$, то $\dim V = 2n$, и по лемме 3.2 получаем $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 + \alpha)^n$. Применяя аналогичные рассуждения для пространства $U^\perp$, можно выбрать ортонормированный базис $f_2, g_2, \ldots, f_n, g_n$ пространства $U^\perp$, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}|_{U^\perp}$ имеет указанный в лемме вид. Тогда $f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots, f_n, g_n$ — искомый базис.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — кососимметрическое преобразование конечномерного евклидова пространства. Тогда $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^k \prod_{i=1}^{p}(t^2 + \alpha_i)^{n_i}$, где $-\alpha_1, \ldots, -\alpha_p$ — отрицательные ненулевые собственные значения преобразования $\mathcal{A}^2$ и*

$$V = \ker\mathcal{A} \oplus \ker(\mathcal{A}^2 + \alpha_1\mathcal{E}) \oplus \ldots \oplus \ker(\mathcal{A}^2 + \alpha_p\mathcal{E}) \text{ — ортогональная сумма.}$$

При этом, $\dim\ker\mathcal{A} = k$ и $\dim\ker(\mathcal{A}^2 + \alpha_i E) = 2n_i$. Кроме того, существует ортонормированный базис пространства V, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет клеточно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & S(\alpha_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & S(\alpha_p) \end{pmatrix},$$

где A_1 — нулевая матрица порядка k, а порядок $S(\alpha_i)$ матрицы равен $2n_i$.

Доказательство. В силу леммы 5.3 преобразование $\mathcal{A}^2$ является симметрическим. Пусть $0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$ — различные собственные значения преобразования $\mathcal{A}^2$. Как было отмечено в параграфе 3.5 $\gamma_i < 0$ для любого $i = 1, \ldots, p$. Следовательно, каждое $\gamma_i = -\alpha_i$, где $\alpha_i > 0$ для любого $i = 1, \ldots, p$. В силу теоремы 5.2 получаем

$$V = V_0 \oplus V_{\gamma_1} \oplus \ldots \oplus V_{\gamma_p} \text{ — ортогональная сумма.}$$

Подпространства $V_0, V_{\gamma_1}, \ldots, V_{\gamma_p}$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$.

Рассмотрим подпространство V_{γ_i}. Поскольку $(\mathcal{A}^2 + \alpha_i\mathcal{E}) = (\mathcal{A}^2 - \gamma_i\mathcal{E})$, то

$$V_{\gamma_i} = \ker(\mathcal{A}^2 - \gamma_i\mathcal{E}) = \ker(\mathcal{A}^2 + \alpha_i\mathcal{E}).$$

Ясно, что $\ker\mathcal{A} \subseteq \ker\mathcal{A}^2$. Пусть $x \in \ker\mathcal{A}^2$. Тогда $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}x) = -(x, \mathcal{A}^2x) = 0$. Поэтому $V_0 = \ker\mathcal{A}^2 = \ker\mathcal{A}$. Отсюда получаем

$$V = \ker\mathcal{A} \oplus \ker(\mathcal{A}^2 + \alpha_1\mathcal{E}) \oplus \ldots \oplus \ker(\mathcal{A}^2 + \alpha_p\mathcal{E}) \text{ — ортогональная сумма.}$$

Тогда получаем $\chi_{\mathcal{A}|_{V_0}}(t) = t^k$, где $k = \dim V_0$. Поскольку $(\mathcal{A}^2 + \alpha_i\mathcal{E})|_{V_{\gamma_i}} = 0$, то по лемме 1 $\dim ker(\mathcal{A}^2 + \alpha_i\mathcal{E}) = 2n_i$ и характеристический многочлен преобразования $\mathcal{A}|_{V_{\gamma_i}}$ имеет вид $(t^2 + \alpha_i)^{n_i}$. В силу леммы 3.2 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^k \prod_{i=1}^{p}(t^2 + \alpha_i)^{n_i}$.

Пусть $f_{i1}, g_{i1}, \ldots, f_{in_i}, g_{in_i}$ — ортонормированный базис пространства $\ker(\mathcal{A}^2 + \alpha_i\mathcal{E})$, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет вид $S(\alpha_i)$. Такой базис существует в силу леммы 1. Выберем в $\ker(\mathcal{A})$ произвольный ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_k$. Тогда матрица преобразования $\mathcal{A}$ в базисе

$$e_1, \ldots, e_k, f_{11}, g_{11}, \ldots, f_{1n_1}, g_{1n_1}, \ldots, f_{p1}, g_{p1}, \ldots, f_{pn_p}, g_{pn_p}$$

имеет искомый вид.

Лемма 2. *Каждое линейное преобразование $\mathcal{A}$ конечномерного эрмитова (евклидова) пространства представляется в виде суммы $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ эрмитового (симметрического) и косоэрмитового (кососимметрического) преобразований. Более того,*

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{A}^*}{2} \quad \text{и} \quad \mathcal{C} = \frac{\mathcal{A} - \mathcal{A}^*}{2}.$$

Линейное преобразование $\mathcal{A}$ нормально тогда и только тогда, когда $\mathcal{BC} = \mathcal{CB}$.

Доказательство. Сначала заметим, что преобразование $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$ является эрмитовым (симметрическим), а преобразование $\mathcal{A} - \mathcal{A}^*$ является косоэрмитовым (кососимметрическим) для любого линейного преобразования $\mathcal{A}$ конечномерного эрмитова (евклидова) пространства. Более того, справедливо разложение

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{A}^*}{2} + \frac{\mathcal{A} - \mathcal{A}^*}{2}.$$

Пусть $\mathcal{B} = (\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)/2$, $\mathcal{C} = (\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)/2$. Тогда

$$\mathcal{BC} = \frac{\mathcal{A}^2 - \mathcal{A}\mathcal{A}^* + \mathcal{A}^*\mathcal{A} - (\mathcal{A}^*)^2}{4} \quad \text{и} \quad \mathcal{CB} = \frac{\mathcal{A}^2 - \mathcal{A}^*\mathcal{A} + \mathcal{A}\mathcal{A}^* - (\mathcal{A}^*)^2}{4}.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{A}$ — нормальное преобразование тогда и только тогда, когда $\mathcal{BC} = \mathcal{CB}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — нормальное преобразование конечномерного евклидова пространства. Тогда существует ортонормированный базис пространства V, в котором матрица $\mathcal{A}$ имеет клеточно-диагональный вид*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix},$$

где A_1 — диагональная матрица и для $i > 1$ матрица

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} = r_i \begin{pmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix}, \text{ где } r_i > 0 \text{ и } \phi_i \neq \pi k.$$

Доказательство. В силу леммы 2 $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$, где $\mathcal{B}$ — симметрическое, а $\mathcal{C}$ — кососимметрическое преобразования и $\mathcal{BC} = \mathcal{CB}$. По лемме 5.1 собственные значения $a_1, \ldots, a_p$ преобразования $\mathcal{B}$ — вещественные числа. По теореме 5.1

$$V = V_{a_1} \oplus \ldots \oplus V_{a_p}.$$

В силу леммы 3.3 подпространства $V_{a_1}, \ldots, V_{a_p}$ инвариантны относительно преобразования $\mathcal{C}$. Рассмотрим $\mathcal{C}_i$ — ограничение преобразования $\mathcal{C}$ на подпространство V_{a_i}. Тогда по теореме 1 в некотором ортонормированном базисе $e_{i1}, \ldots, e_{ik_i}, f_{i1}, g_{i1}, f_{i2}, g_{i2}, \ldots, f_{in_i}, g_{in_i}$ пространства V_{α_i} матрица преобразования $\mathcal{C}_i$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \begin{pmatrix} 0 & -b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \begin{pmatrix} 0 & -b_{n_i} \\ b_{n_i} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, b_1, \ldots, b_{n_i} \neq 0.$$

Так как $\mathcal{A}|_{V_{a_i}} = \mathcal{B}|_{V_{a_i}} + \mathcal{C}|_{V_{a_i}}$, то матрица преобразования $\mathcal{A}|_{V_{a_i}}$ в этом базисе имеет

$$\begin{pmatrix} a_i & & & & & & \\ & a_i & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_i & & & \\ & & & & \begin{pmatrix} a_i & -b_1 \\ b_1 & a_i \end{pmatrix} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \begin{pmatrix} a_i & -b_{n_i} \\ b_{n_i} & a_i \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Образуем из этих базисов базис

$$e_{11}, \ldots, e_{1k_1}, e_{21}, \ldots, e_{2k_2}, \ldots, e_{p1}, \ldots, e_{pk_p}, f_{11}, g_{11}, f_{12}, g_{12}, \ldots, f_{1n_1}, g_{1n_1}, f_{21}, g_{21}, f_{22}, g_{22}, \ldots$$

пространства V. В этом базисе матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет искомый вид.

Теперь рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$. Число $a_i^2 + b_i^2$ — определитель этой матрицы. Ясно, что $r_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \neq 0$. Тогда

$$\begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} = r_i \begin{pmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix}, \text{ где } \phi_i \neq \pi k.$$

3.7 Унитарные и ортогональные преобразования

Линейное преобразование $\mathcal{A}$ эрмитова (евклидова) пространства V называется *унитарным (ортогональным)*, если оно сохраняет скалярное произведение, т.е. $(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b) = (a, b)$ для любых векторов $a, b \in V$.

Ядро унитарного (ортогонального) преобразования равно нулю. Действительно, пусть $a \in \ker \mathcal{A}$. Тогда

$$(a, a) = (\mathcal{A}a, \mathcal{A}a) = 0.$$

Поэтому $a = 0$. Осюда получаем, $\ker \mathcal{A} = 0$.

Если $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный система векторов эрмитова (евклидова) пространства V и $\mathcal{A}$ — унитарное (ортогональное) преобразование пространства V, то $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$ — ортонормированный система векторов V. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — унитарное (ортогональное) преобразование конечномерного эрмитова (евклидова) пространства V. Тогда $\mathcal{A}$ — изоморфизм, и ортонормированная система векторов переходит под действием $\mathcal{A}$ в ортонормированную систему векторов. Кроме того, пусть линейное преобразование $\mathcal{A}$ эрмитова (евклидова) пространства V переводит ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ в ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$. Тогда $\mathcal{A}$ — унитарное (ортогональное) преобразование.*

Доказательство. Докажем, что линейное преобразование переводящее ортономированый базис в отртонормированый базис является ортоганальным.

Пусть $\mathcal{A}$ переводит ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ в ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$. Тогда $\mathcal{A}e_i = f_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим векторы $a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ и $b = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$. Тогда $\mathcal{A}a = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$ и $\mathcal{A}b = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_n f_n$. Отсюда получаем,

$$(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b) = \sum_{i=1, j=1}^{n} (\alpha_i f_i, \beta_j f_j) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \beta_i = (a, b).$$

Следовательно, $\mathcal{A}$ — унитарное (ортогональное) преобразование.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ рассмотрим преобразование

$$\mathcal{A}_\phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

поворот на угол ϕ. Тогда для векторов $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ получаем

$$(\mathcal{A}_\phi a, \mathcal{A}_\phi b) = (\begin{pmatrix} a_1\cos\phi - a_2\sin\phi \\ a_1\sin\phi + a_2\cos\phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1\cos\phi - b_2\sin\phi \\ b_1\sin\phi + b_2\cos\phi \end{pmatrix}) =$$

$$(a_1\cos\phi - a_2\sin\phi)(b_1\cos\phi - b_2\sin\phi) + (a_1\sin\phi + a_2\cos\phi)(b_1\sin\phi + b_2\cos\phi) = a_1b_1 + a_2b_2 = (a, b).$$

Следовательно, $\mathcal{A}$ — ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^2$.

Приведем еще один пример нетривиального унитарного (ортогонального) преобразования.

Пусть V — эрмитово (евклидово) пространство. Тогда преобразование $\mathcal{A} : x \mapsto -x$ является унитарным (ортогональным).

Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ $(A \in M_n(\mathbb{R}))$ называется *унитарной* , если $A^* = \overline{A}^\top = A^{-1}$. Вещественная матрица A порядка n *ортогональна*, если $A^\top = A^{-1}$. Как легко видеть, столбцы (строки) унитарной (ортогональной) матрицы образуют ортонормированную систему векторов.

Упражнение. *Доказать, что для унитарной (ортогональной) матрицы A модуль* $|\det(A)| = 1$.

Пусть V — эрмитово (евклидово) пространство размерности n. Тогда матрица A унитарного (ортогонального) преобразования $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе является унитарной (ортогональной). Действительно, в силу теоремы 4.1, A^* — матрица преобразования $\mathcal{A}^*$. Поскольку $(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b) = (a, b)$, то $(a, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}b)) = (a, b)$. Отсюда получем, что $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{E}$. Поэтому $A^*A = E$. В частности, $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$. Следовательно, унитарное (ортогональное) преобразование конечномерного эрмитова (евклидова) пространства является нормальным. Если A — унитарная (ортогональная) матрица порядка n, то $\mathcal{A} : V \mapsto V$, заданное правилом $\mathcal{A}x = Ax$, является унитарным (ортогональным) преобразованием пространства V.

Поэтому, из теоремы 1 получаем следующее

Следствие 1. *Матрица перехода от одного ортонормированного базиса эрмитова (евклидова) пространства к другому является унитарной (ортогональной).*

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — унитарное (ортогональное) преобразование. Тогда модули его собственных значений равны 1.*

Доказательство. Пусть α — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$ и x — собственный вектор, отвечающий α. Если V — эрмитово пространство, то

$$(x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\alpha x, \alpha x) = \overline{\alpha}\alpha(x, x).$$

Следовательно, $\alpha\overline{\alpha} = 1$, т.е. модуль $|\alpha| = 1$.

Для евклидовых пространств $(x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\alpha x, \alpha x) = \alpha^2(x, x)$. Следовательно, $\alpha = \pm 1$.

Лемма 2. *Линейное преобразование $\mathcal{A} : V \mapsto V$ эрмитова (евклидова) пространства является унитарным (ортогональным) тогда и только тогда, когда оно сохраняет длину вектора.*

Доказательство. Если $\mathcal{A}$ — унитарное преобразование, то оно сохраняет длину вектора. Обратно, пусть $||\mathcal{A}x|| = ||x||$ для любого $x \in V$. Тогда, ввиду леммы 1.1.3, для любых $x, y \in V$

$$(x, y) = \frac{i||x+y||^2 - ||ix+y||^2 - (i-1)||x||^2 - (i-1)||y||^2}{2i}.$$

Отсюда получаем, что

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = \frac{i||\mathcal{A}x+\mathcal{A}y||^2 - ||i\mathcal{A}x+\mathcal{A}y||^2 - (i-1)||\mathcal{A}x||^2 - (i-1)||\mathcal{A}y||^2}{2i} =$$

$$\frac{i||\mathcal{A}(x+y)||^2 - ||\mathcal{A}(ix+y)||^2 - (i-1)||\mathcal{A}x||^2 - (i-1)||\mathcal{A}y||^2}{2i} =$$

$$\frac{i||x+y||^2 - ||ix+y||^2 - (i-1)||x||^2 - (i-1)||y||^2}{2i} = (x, y).$$

Следовательно,

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y).$$

Таким образом, $\mathcal{A}$ — унитарное преобразование. Случай евклидова пространства разбирается аналогично.

Как следствие теоремы 5.2 и леммы 1 получаем канонический вид унитарного преобразования

Теорема 2. *Для любого унитарного преобразования $\mathcal{A}$ конечномерного эрмитова пространства V существует ортонормированный базис пространства V, состоящий из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$. В этом базисе преобразование $\mathcal{A}$ имеет канонический вид, т.е. его матрица диагональна с собственными значениями по диагонали. При этом модули этих элементов равны 1.*

Ясно, что матрица $r\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$, где $r > 0$, ортогональна тогда и только тогда, когда $r = 1$. Поэтому из теоремы 6.2 и леммы 1 получаем канонический вид ортогонального преобразования

Теорема 3. *Для любого ортогонального преобразования $\mathcal{A}$ конечномерного евклидова пространства V существует ортонормированный базис пространства V, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет клеточно-диагональный вид*

$$\begin{pmatrix} -E_{k_1} & & & & \\ & E_{k_2} & & & \\ & & A_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_m \end{pmatrix},$$

где E_{k_i} — единичная матрица порядка k_i, и матрица

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix}, \text{ где } \phi_i \neq \pi k.$$

Дадим геометрическую интерпретацию ортогонального преобразования $\mathcal{A}$ трехмерного евклидова пространства.

Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис, в котором матрица A преобразования $\mathcal{A}$ имеет канонический вид. Если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix},$$

то преобразование $\mathcal{A}$ оставляет неподвижными векторы подпространства (на прямой) $\mathrm{Lin}(e_1)$. В тоже самое время $\mathcal{A}$ осуществляет поворот на угол ϕ в подпространстве (в плоскости) $\mathrm{Lin}(e_2, e_3)$ вокруг оси $l = \mathrm{Lin}(e_1)$.

Если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Тогда преобразование $\mathcal{A}$ осуществляет поворот на угол ϕ в подпространстве (в плоскости) $\mathrm{Lin}(e_2, e_2)$ вокруг оси l, а затем производит зеркальное отражение относительно $\mathrm{Lin}(e_2, e_3)$.

Пусть V — конечномерное евклидово пространство и L — его подпространство. Тогда $V = L + L^\perp$ и для вектора $x \in V$ имеет место разложение $x = y + z$, где $y \in L$, $z \in L^\perp$. Линейное преобразование $\mathcal{A} : V \mapsto V$, заданное правилом $\mathcal{A}(x) = y - z$, называется *зеркальным отражением* относительно подпространства L.

Следствия 5.1 и 5.2 говорят о том, что всякая эрмитова (косоэрмитова) матрица подобна диагональной. Понятие унитарной (ортогональной) матрицы позволяет дать более точное описание матрицы подобия. Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть A — эрмитова, косоэрмитова (симметрическая) матрица порядка n. Тогда A подобна диагональной матрице B с помощью унитарной (ортогональной) матрицы T. Другими словами, $B = T^{-1}AT = T^*AT$.*

Доказательство. Пусть A — эрмитова матрица порядка n. Рассмотрим линейное преобразование $\mathcal{A} : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$, заданное матрицей A, т.е. $\mathcal{A}x = Ax$. Тогда по следствию 5.1 существует ортонормированный базис, эрмитово пространства $\mathbb{C}^n$, в котором матрица B преобразования $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид. Пусть T — матрица перехода от стандартного базиса к этому новому базису. Тогда $B = T^{-1}AT$, и по следствию 1 T — унитарная матрица.

Остальные случаи доказываются аналогично.

Для кососимметрических матриц справедлива

Теорема 5. *Пусть A — кососимметрическая матрица порядка n. Тогда A подобна клеточно-диагональной матрице*

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix},$$

где A_1 — нулевая матрица и для $i > 1$ матрица

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix},$$

с помощью ортогональной матрицы T, т.е. $B = T^{-1}AT = T^\top AT$.

И, наконец,

Теорема 6. *Пусть A — ортогональная матрица порядка n. Тогда A подобна клеточно-диагональной матрице*

$$B = \begin{pmatrix} -E_{k_1} & & & & \\ & E_{k_2} & & & \\ & & A_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_m \end{pmatrix}$$

с помощью ортогональной матрицы T, т.е. $B = T^{-1}AT = T^\top AT$, здесь E_{k_i} — единичная матрица порядка k_i, и матрица

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix}, \text{ где } \phi_i \neq \pi k.$$

Приведем еще одно доказательство теоремы 3. Справедлива следующая

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — ортогональное преобразование конечномерного евклидова пространства. Предположим, что многочлен $t^2 - \beta t + \gamma$ не имеет вещественных корней и $\mathcal{A}^2 - \beta\mathcal{A} + \gamma\mathcal{E} = 0$. Тогда $\gamma = 1$, $\dim V = 2n$, $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 - \beta t + 1)^n$ и в V существует ортонормированный базис $f_1, g_1, \ldots, f_n, g_n$, в котором матрица преобразования*

$\mathcal{A}$ *имеет клеточно-диагональный вид*

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \phi \neq \pi k$$

где $\cos\phi + i\sin\phi$ *— корень многочлена* $t^2 - \beta t + 1$.

Доказательство. Выберем в V вектор x единичной длины. Тогда $\mathcal{A}x$ — вектор единичной длины. Заметим, что векторы x и $\mathcal{A}x$ линейно независимы. Действительно, если $\mathcal{A}x = \lambda x$, то

$$(\mathcal{A}^2 - \beta\mathcal{A} + \gamma\mathcal{E})x = \mathcal{A}^2x - \beta\mathcal{A}x + \gamma\mathcal{E}x = (\lambda^2 - \beta\lambda + \gamma)x.$$

Отсюда получаем, что λ — вещественный корень многочлена $t^2 - \beta t + \gamma$. Противоречие с условием леммы.

Пусть $U = Lin(x, \mathcal{A}x)$. Как легко видеть, подпространство U инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_U$ — ограничение преобразования $\mathcal{A}$ на подпространство U. Тогда

$$\mathcal{B}x = \mathcal{A}x,$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^2x = \beta\mathcal{A}x - \gamma x.$$

Поэтому $B = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ — матрица преобразования $\mathcal{B}$ в базисе $x, \mathcal{A}x$.Значит $\det(B) = \gamma$. Поскольку $\mathcal{B}$ — ортогональное преобразование, то $\gamma = \pm 1$. Характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{B}}(t) = t^2 - \beta t + \gamma$ не имеет вещественных корней. Поэтому $\gamma = 1$.

Непосредственным вычислением получаем, что x ортогонален вектору $\mathcal{A}x - (x, \mathcal{A}x)x$. Заметим, что

$$(x, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}(\mathcal{A}x)) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}^2x) = (\mathcal{A}x, \beta\mathcal{A}x - \gamma x) = \beta(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) - (\mathcal{A}x, x).$$

Отсюда

$$(x, \mathcal{A}x) = \frac{\beta}{2}.$$

Поэтому

$$\mathcal{A}x - (x, \mathcal{A}x)x = \mathcal{A}x - \frac{\beta}{2}x.$$

Длина

$$||\mathcal{A}x - \frac{\beta}{2}x|| = \sqrt{(\mathcal{A}x - \frac{\beta}{2}x, \mathcal{A}x - \frac{\beta}{2}x)} =$$

$$\sqrt{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) - \beta(\mathcal{A}x, x) + \frac{\beta^2}{4}(x, x)} = \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4}}.$$

Пусть $f_1 = x$, $g_1 = \frac{\mathcal{A}x - \frac{\beta}{2}x}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4}}}$. Тогда f_1, g_1 — ортонормированный базис подпространства U и $\mathcal{A}x = \frac{\beta}{2}f_1 + \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4}}g_1$. Имеем

$$\mathcal{A}f_1 = \mathcal{A}x = \frac{\beta}{2}x + (\mathcal{A}x - \frac{\beta}{2}x) = \frac{\beta}{2}f_1 + \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4}}g_1,$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}x - \frac{\beta}{2}x) = \mathcal{A}^2x - \frac{\beta}{2}\mathcal{A}x = \beta\mathcal{A}x - x - \frac{\beta}{2}\mathcal{A}x =$$

$$\frac{\beta}{2}\mathcal{A}x - x = \frac{\beta}{2}(\frac{\beta}{2}f_1 + \sqrt{1-\frac{\beta^2}{4}}g_1) - f_1 = -(1-\frac{\beta^2}{4})f_1 + \frac{\beta}{2}\sqrt{1-\frac{\beta^2}{4}}g_1.$$

Поэтому

$$\mathcal{B}f_1 = \mathcal{A}f_1 = \frac{\beta}{2}f_1 + \sqrt{1-\frac{\beta^2}{4}}g_1,$$

$$\mathcal{B}g_1 = \mathcal{A}g_1 = -\sqrt{1-\frac{\beta^2}{4}}f_1 + \frac{\beta}{2}g_1.$$

Отсюда получаем, что матрица B преобразования $\mathcal{B}$ в базисе f_1, g_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta}{2} & -\sqrt{1-\frac{\beta^2}{4}} \\ \sqrt{1-\frac{\beta^2}{4}} & \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\cos\phi + i\sin\phi$ — корень многочлена $t^2 - \beta t + 1$. Тогда $\beta = 2\cos\phi$ и

$$B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\phi \neq \pi k$.

Поскольку подпространство U — инвариантно относительно $\mathcal{A}$, то U — инвариантно относительно $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$. В силу леммы 4.2, ортогональное дополнение $U^\perp$ — также инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Поскольку $\dim U^\perp < \dim V$, то, применяя несложную индукцию по размерности пространства, можно считать, что $\dim U^\perp = 2(n-1)$ и $(t^2-\beta+1)^{n-1}$ — характеристический многочлен ограничения преобразования $\mathcal{A}$ на $U^\perp$. Как было показано, матрица преобразования $\mathcal{A}|_U$ в базисе f_1, g_1 имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$. Поэтому $t^2-\beta t+1$ — характеристический многочлен преобразования $\mathcal{A}|_U$. Так как $V = U \oplus U^\perp$, то $\dim V = 2n$, и по лемме 3.2 получаем $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2-\beta t+1)^n$. Применяя аналогичные рассуждения для пространства $U^\perp$, можно выбрать ортонормированный базис $f_2, g_2, \ldots, f_n, g_n$, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}|_{U^\perp}$ имеет указанный в лемме вид. Тогда $f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots, f_n, g_n$ — искомый базис.

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{A}$ — ортогональное преобразование конечномерного евклидова пространства V. Тогда характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t+1)^{k_i}(t-1)^{k_2}\prod_{i=1}^m p_i^{s_i}(t)$, где каждый $p_i(t) = t^2 - \beta_i t + 1$ не имеет вещественных корней. Кроме того,*

$$V = V_{-1} \oplus V_1 \oplus \ker(\mathcal{A}^2 - \beta_1\mathcal{A} + 1) \oplus \ldots \oplus \ker(\mathcal{A}^2 - \beta_m\mathcal{A} + 1),$$

эта сумма является ортогональной и $\dim V_{-1} = k_1, \dim V_1 = k_2, \dim\ker(\mathcal{A}^2 - \beta_i\mathcal{A} + 1) = 2s_i$. В пространстве V существует ортонормированный базис, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет клеточно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} -E_{k_1} & & & & \\ & E_{k_2} & & & \\ & & A_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_m \end{pmatrix},$$

где E_{k_i} — единичная матрица порядка k_i, и матрица

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix}, \text{ где } \phi_i \neq \pi k.$$

Число γ_i — собственное значения линейного преобразования $\frac{\mathcal{A}+\mathcal{A}^*}{2}$ тогда и только тогда, когда либо $\gamma_i = \pm 1$ и $V_{\gamma_i} = V_1$ или $V_{\gamma_i} = V_{-1}$, либо $\gamma_i = \frac{\beta_i}{2}$ и имеет место $V_{\gamma_i} = \ker(\mathcal{A}^2 - \beta_i\mathcal{A} + 1)$.

Доказательство. Пусть $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ — характеристический многочлен преобразования $\mathcal{A}$. Если $p(t) = t^2 - \beta t + \gamma$ входит в разложение многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$, то $\ker(\mathcal{A}^2 - \beta\mathcal{A} + \gamma) \neq 0$. Действительно, пусть A — матрица преобразования $\mathcal{A}$ и z — корень многочлена $p(t)$. Тогда $\det(A - zE) = 0$. Поэтому

$$\det(A^2 - (z+\overline{z})A + z\overline{z}E) = \det(A - zE)\det(A - \overline{z}E) = 0.$$

Поскольку $z+\overline{z} = \beta$, $z\overline{z} = \gamma$, то $\det(A^2 - \beta A + \gamma E) = \det(A^2 - (z+\overline{z})A + z\overline{z}E) = 0$. Поэтому $\ker(\mathcal{A}^2 - \beta\mathcal{A} + \gamma) \neq 0$.

Пусть $U = \ker(\mathcal{A}^2 - \beta\mathcal{A} + \gamma)$ и $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_U$ — ограничение преобразования $\mathcal{A}$ на подпространство U. Тогда $\mathcal{B}^2 - \beta\mathcal{B} + \gamma = 0$. В силу леммы 3 получаем, что $\gamma = 1$. Так все веществены собственые значения ортоганальиного преобразования равны ± 1, то $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ имеет, указанный в теореме вид.

Пусть α — вещественное собственное значение преобразования $\mathcal{A}$. Тогда $\alpha = \pm 1$ и $V = V_\alpha \oplus V_\alpha^\perp$. Подпространство V_α инвариантно относительно $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$. В силу леммы 4.2, ортогональное дополнение $U^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Поскольку $\dim U^\perp < \dim V$, то, применяя несложную индукцию по размерности пространства, можно считать, что

$$V = V_{-1} \oplus V_1 \oplus \ker(\mathcal{A}^2 - \beta_1\mathcal{A} + 1) \oplus \ldots \oplus \ker(\mathcal{A}^2 - \beta_m\mathcal{A} + 1)$$

и эта сумма ортогональна. Аналогично разбирается случай, когда $\chi_{\mathcal{A}}$ не имеет вещественных корней.

Пусть $U = V_\alpha$ и $\mathcal{B}$ — ограничение преобразования $\mathcal{A}$ на U. Тогда характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{B}}(t) = (t-\alpha)^r$, где $r = \dim V_\alpha$. Поскольку $V = V_\alpha + V_\alpha^\perp$, то, в силу леммы 3.3.2, получаем, что $r = k_1$ или $r = k_2$. Для $\alpha = -1$ в любом ортонормированном базисе $e_{11}, \ldots, e_{1k_1}$ подпространства U матрица преобразования $\mathcal{B}$ равна $-E_{k_1}$. Для $\alpha = 1$ в любом ортонормированном базисе $e_{21}, \ldots, e_{2k_2}$ подпространства U матрица преобразования $\mathcal{B}$ равна E_{k_2}.

Пусть $U = \ker(\mathcal{A}^2 - \beta_i\mathcal{A} + 1)$ и $\mathcal{B}$ — ограничение преобразования $\mathcal{A}$ на U. Тогда, по лемме 3, $\dim U = 2r$, $\chi_{\mathcal{B}}(t) = (t^2 - \beta_i t + 1)^r$, и в U существует ортонормированный базис $f_{i1}, g_{i1}, \ldots, f_{ir}, g_{ir}$, в котором матрица преобразования $\mathcal{B}$ имеет клеточно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \phi_i \neq \pi l.$$

Поскольку $V = U + U^\perp$, то, в силу леммы 3.3.2, получаем, что $r = s_i$.

Образуем базис

$$e_{11}, \ldots, e_{1r_1}, e_{21}, \ldots, e_{2r_2}, f_{11}, g_{11}, f_{12}, g_{12}, \ldots, f_{1n_1}, g_{1n_1}, f_{21}, g_{21}, f_{22}, g_{22}, \ldots$$

пространства V. В этом базисе матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет искомый вид.

Пусть γ_i — собственное значение $\frac{\mathcal{A}+\mathcal{A}^*}{2}$. Тогда $(\mathcal{A}+\mathcal{A}^*)x = 2\gamma_i x$ для некоторого ненулевого вектора x. Поскольку $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$, то

$$(\mathcal{A}+\mathcal{A}^{-1})x = (\mathcal{A}+\mathcal{A}^*)x = 2\gamma_i x.$$

Применяя к обоим частям этого равенства преобразоване $\mathcal{A}$ получаем, что

$$(\mathcal{A}^2 - 2\gamma_i\mathcal{A} + \mathcal{E})x = 0.$$

Пусть $t^2 - 2\gamma_i t + 1$ имеет вещественные корни λ_1, λ_2. Тогда $(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda_2\mathcal{E})x = 0$. Поэтому, либо $\ker(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E}) \neq 0$, либо $\ker(\mathcal{A} - \lambda_2\mathcal{E}) \neq 0$. Следовательно, либо λ_1, либо λ_2 — собственное значение $\mathcal{A}$. Если λ_1 — собственное значение $\mathcal{A}$, то $\lambda_1 = \pm 1$. Так λ_1 и λ_2 — корни многочлена $t^2 - 2\gamma_i t + 1$, то $\lambda_2 = \lambda_1^{-1} = \lambda_1$ и $\gamma_i = \lambda_1$. Случай для λ_2 разбирается аналогично. Также получаем, что $V_{\gamma_i} \subseteq V_{\pm 1}$. Пусть α — вещественное собственное значение преобразования $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}x = \alpha x$ и $\mathcal{A}^{-1}x = \alpha^{-1}x = \alpha x$. Поэтому

$$(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)x = (\mathcal{A} + \mathcal{A}^{-1})x = \mathcal{A}x + \mathcal{A}^{-1}x = 2\alpha x.$$

Следовательно, α — собственное значение $\frac{\mathcal{A}+\mathcal{A}^*}{2}$. В силу предыдущего получаем, что $V_\alpha = V_{\gamma_i}$.

Пусть $\gamma_i \neq \pm 1$. Тогда, в силу предыдущего, $t^2 - 2\gamma_i t + 1$ не имеет вещественных корней. Рассмотрим подпространство $U = \ker(A^2 - 2\gamma_i\mathcal{A} + \mathcal{E})$. Так как $V_{\gamma_i} \subseteq U$, то $U \neq 0$. Подпространства U и $U^\perp$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$. По лемме 2 $\chi_{\mathcal{A}|_U}(t) = (t^2 - 2\gamma_i t + 1)^{2r}$. В силу леммы 3.3.2 получаем, что $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}|_U}(t)\chi_{\mathcal{A}|_{U^\perp}}(t)$. Поэтому $t^2 - 2\gamma_i t + 1 = t^2 - \beta_i t + 1$, $\gamma_i = \frac{\beta_i}{2}$ и $V_{\gamma_i} \subseteq \ker(A^2 - \beta_i\mathcal{A} + \mathcal{E})$. Пусть $x \in \ker(A^2 - \beta_i\mathcal{A} + \mathcal{E})$. Тогда

$$(\mathcal{A} + \mathcal{A}^{-1} - \beta_i\mathcal{E})x = \mathcal{A}^{-1}(A^2 - \beta_i\mathcal{A} + \mathcal{E})x = 0.$$

Поэтому $(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)x = \beta_i x$. Следовательно, $\frac{\beta_i}{2}$ — собственное значение $\frac{\mathcal{A}+\mathcal{A}^*}{2}$ и $x \in V_{\frac{\beta_i}{2}}$. Отсюда получаем, что $V_{\gamma_i} = \ker(A^2 - \beta_i\mathcal{A} + \mathcal{E})$.

Теперь приведем еще одно доказательство теоремы 6.2.

Теорема 8. *Пусть $\mathcal{A}$ — нормальное преобразование конечномерного евклидова пространства V. Тогда в пространстве V существует ортонормированный базис, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет клеточно-диагональный вид*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix},$$

где A_1 — диагональная матрица и для $i > 1$ матрица

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} = r_i \begin{pmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix}, \text{ где } r_i > 0 \text{ и } \phi_i \neq \pi k.$$

Доказательство. Пусть $0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ — собственные значения линейного преобразования $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Тогда

$$V = V_0 \oplus V_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_p}$$

и эта сумма является ортогональной.

Покажем, что $\ker\mathcal{A} = \ker\mathcal{A}\mathcal{A}^* = V_0$. Ясно, что $\ker\mathcal{A} \subseteq \ker\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \ker\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Пусть $x \in \ker\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Тогда

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}x) = (x, \mathcal{A}\mathcal{A}^*x) = 0.$$

Поэтому $\mathcal{A}x = 0$ и $x \in \ker\mathcal{A}$. Следовательно, $\ker\mathcal{A} = \ker\mathcal{A}\mathcal{A}^* = V_0$.

Отсюда получаем, что ограничение $\mathcal{A}$ на подпространство V_0, $\mathcal{A}|_{V_0} = 0$. Тогда матрица линейного преобразования $\mathcal{A}|_{V_0}$ в ортонормированном базисе $e_{01}, \dots, e_{0k_0}$ подпространства V_0 равна нулю.

Так $\mathcal{A}$ — нормальное преобразование, то, в силу леммы 3.3, $\mathcal{A}(V_{\alpha_1}) \subseteq V_{\alpha_1}$ и $\mathcal{A}^*(V_{\alpha_1}) \subseteq V_{\alpha_1}$. Для ненулевого вектора $x \in V_{\alpha_1}$ имеет место $\mathcal{A}\mathcal{A}^*x = \alpha_1 x$. Отсюда получаем, что

$$\alpha_1(x, x) = (\mathcal{A}\mathcal{A}^*x, x) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) > 0.$$

Следовательно, $\alpha_1 > 0$. Поскольку $\mathcal{A}$ — невырожденное линейное преобразование на подпространстве V_{α_1}, то $\mathcal{A}^*x = \alpha_1\mathcal{A}^{-1}x$ для любого $x \in V_{\alpha_1}$.

Рассмотрим линейное преобразование $\mathcal{B} = \sqrt{\alpha_1^{-1}}\mathcal{A}|_{V_{\alpha_1}}$. Тогда для любого $x \in V_{\alpha_1}$

$$\mathcal{B}^*x = \sqrt{\alpha_1^{-1}}\mathcal{A}^*x = \sqrt{\alpha_1^{-1}}\alpha_1\mathcal{A}^{-1}x = (\sqrt{\alpha_1^{-1}}\mathcal{A})^{-1}x = \mathcal{B}^{-1}x.$$

Поэтому $\mathcal{B}$ — ортогональное преобразование подпространства V_{α_1}. По теореме 7 существует ортонормированный базис $e_{11}, \dots, e_{1k_1}, f_{11}, g_{11}, \dots, f_{1m_1}, g_{1m_1}$ подпространства V_{α_1}, в котором матрица линейного преобразования $\mathcal{B}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -E_{k_{11}} & & & & \\ & E_{k_{12}} & & & \\ & & \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{pmatrix} \cos\phi_{m_1} & -\sin\phi_{m_1} \\ \sin\phi_{m_1} & \cos\phi_{m_1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица линейного преобразования $\mathcal{A}|_{V_{\alpha_1}}$ в базисе $e_{11}, \dots, e_{1k_1}, f_{11}, g_{11}, \dots, f_{1m_1}, g_{1m_1}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha_1}E_{k_{11}} & & & & \\ & \sqrt{\alpha_1}E_{k_{12}} & & & \\ & & \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1}\cos\phi_1 & -\sqrt{\alpha_1}\sin\phi_1 \\ \sqrt{\alpha_1}\sin\phi_1 & \sqrt{\alpha_1}\cos\phi_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1}\cos\phi_{m_1} & -\sqrt{\alpha_1}\sin\phi_{m_1} \\ \sqrt{\alpha_1}\sin\phi_{m_1} & \sqrt{\alpha_1}\cos\phi_{m_1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для каждого собственного значения α_i существует ортонормированный базис $e_{i1}, \dots, e_{ik_i}, f_{i1}, g_{i1}, \dots, f_{im_i}, g_{im_i}$ подпространства V_{α_i}, в котором матрица линейного преобразования $\mathcal{A}|_{V\alpha_i}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha_i}E_{k_{i1}} & & & & \\ & \sqrt{\alpha_i}E_{k_{i2}} & & & \\ & & \begin{pmatrix} a_{i1} & -b_{i1} \\ b_{i1} & a_{i1} \end{pmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{pmatrix} a_{im_i} & -b_{i1m_i} \\ b_{im_i} & b_{im_i} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Образуем базис

$$e_{01}, \dots, e_{0k_0}, e_{11}, \dots, e_{1k_1}, \dots, e_{l1}, \dots, e_{lk_l}, f_{11}, g_{11}, \dots, f_{1m_1}, g_{1m_1}, \dots, f_{l1}, g_{l1}, \dots, f_{lm_l}, g_{lm_l}$$

пространства V. В этом базисе матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет искомый вид.

Пример 1. Найдем канонический вид ортогонального преобразования, заданного матрицей

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Представляем A в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц, т.е. $A = B + C$, где

$$B = \frac{A + A^*}{2} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C = \frac{A - A^*}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\chi_B(t) = -\frac{1}{216}((4-6t)^3 - 3(4-6t) + 2)$. Корни этого многочлена $t_1 = 1$, $t_{2,3} = \frac{1}{2}$. Поэтому, по теореме 5.1, $V = V_1 \oplus V_{\frac{1}{2}}$. Найдем базисы V_1 и $V_{\frac{1}{2}}$. Подпространство $V_1 = \ker(B - E)$. Образуем матрицу $(B - E|E)$. Элементарными преобразованиями строк матрицы получаем, что

$$\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right) \sim \left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right).$$

Следовательно, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — базис пространства V_1. Подпространство $V_{\frac{1}{2}} = \operatorname{Im}(B - E)$. Следовательно, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ — базис пространства $V_{\frac{1}{2}}$.

Рассмотрим линейное преобразование C. Ограничение $C|_{V_1} = 0$. Пусть преобразование $C_1 = C|_{V_{\frac{1}{2}}}$ — ограничение C на пространство $V_{\frac{1}{2}}$. Вычислим матрицу C_1 в базисе u_2, u_3. Нетрудно видеть, что

$$C_1 u_2 = C u_2 = \frac{3}{2}u_2 + u_3,$$

$$C_1 u_3 = C u_3 = -3u_2 - \frac{3}{2}u_3.$$

Поэтому $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -3 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ — матрица линейного преобразования C_1 в базисе u_2, u_3. Тогда $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ — матрица линейного преобразования C_1^2. Число $-\frac{3}{4}$ — ненулевое собственное значение матрицы C_1^2. Следовательно, $V_{\frac{1}{2}} = \ker(C_1^2 + \frac{3}{4}\mathcal{E})$.

Выберем произвольный нормированный вектор g_1 из $V_{\frac{1}{2}}$. Например, $g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}u_2$. Тогда $f_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}Cg_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Поэтому $Cf_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}g_1$ и $Cg_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_1$. В базисе f_1, g_1 матрица преобразования C_1 имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Положим $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}u_1$. Тогда в ортонормированном базисе e_1, f_1, g_1 матрица преобразования C имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ — матрица преобразования B в базисе e_1, f_1, g_1, то $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ — матрица преобразования A e_1, f_1, g_1. Кроме того, $D = T^{-1}AT$, где $T = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Как легко видеть, матрица T образована вектор-столбцами e_1, f_1, g_1.

Таким образом, данное ортогональное преобразование оставляет на месте точки на прямой $l = \mathrm{Lin}(e_1)$ и осуществляет поворот на угол 60° в плоскости $\mathrm{Lin}(f_1, g_1)$ вокруг оси l. Так как e_1 – вектор нормали к плоскости $\mathrm{Lin}(f_1, g_1)$, то уравнение плоскости $x+y+z = 0$.

Приведем решение этой задачи, основанное на теореме 7.

Как было показано, числа $1, \frac{1}{2}$ — собственные зназения линейного преобразования $\frac{\mathcal{A}+\mathcal{A}^*}{2}$. По теореме 5.1 $V = V_1 \oplus V_{\frac{1}{2}}$. Вектор $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ — базис пространства V_1. Векторы $u_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ — базис пространства $V_{\frac{1}{2}}$.

Ортонормированный базис подпространства V_1 — вектор $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Положим $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}u_2$. Процессом Грама-Шмидта ортогонализуем векторы $f_1, \mathcal{A}f_1$

$$g_1' = \mathcal{A}f_1 - (f_1, \mathcal{A}f_1)f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Положим $g_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}g_1'$. Тогда в ортономированном базисе e_1, f_1, g_1 матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{1}}{2}\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти канонический вид ортогональной матрицы

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}.$$

Матрица

$$B = \frac{A+A^*}{2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\chi_B(t) = t^2(t-1)$. Корни этого многочлена $t_1 = 1$, $t_{2,3} = 0$. Поэтому $V = V_1 \oplus V_0$. Вектор $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ — базис пространства V_1. Векторы $u_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — базис пространства V_0.

Ортонормированный базис подпространства V_1 — вектор $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Положим $f_1 = u_3$. Процессом Грама-Шмидта ортогонализуем векторы $f_1, \mathcal{A}f_1$

$$g_1' = \mathcal{A}f_1 - (f_1, \mathcal{A}f_1)f_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $||g_1'|| = 1$, то $g_1 = g_1'$. Тогда в ортонормированном базисе e_1, f_1, g_1 матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.8 Задачи

1. Найти
$$\max_{x\neq 0}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{||A^k x||}{||x||}\right),\quad \text{где}\quad A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Пусть
$$C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Доказать, что матрица $A=\frac{E-C}{E+C}$ — ортогональная. Найти собственные значения матрицы A, не вычисляя матрицу A. Найти канонический вид B ортогональной матрицы A и ортогональную матрицу T такую, что $B=T^{-1}AT$.

3. Пусть V — вещественное векторное пространство с базисом a_1, a_2, a_3. Для векторов
$$x=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3,\quad y=y_1a_1+y_2a_2+y_3a_3$$
зададим произведение
$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+2x_3y_3+x_1y_3+x_3y_1.$$
Доказать, что заданное произведение является скалярным произведением. Пусть линейное преобразование $\mathcal{A}: V\mapsto V$ имеет матрицу A в базисе a_1, a_2, a_3. Найти матрицу B сопряженного преобразования $\mathcal{A}^*$ в том же базисе, если
$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

4. Найти все векторы $x\in\mathbb{R}$, для которых $||x||>||Ax||>||A^2x||>||A^3x||>\ldots$, а также все векторы $y\in\mathbb{R}$, для которых $||y||>||A^{-1}y||>||A^{-2}y||>||A^{-3}y||>\ldots$, если $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$.

5. Найти ортогональную матрицу A с определителем, равным -1, и удовлетворяющую следующим свойствам $Au=v$, $Av=u$, где $u=(2,1,-2)^\top$, $v=(3,0,0)^\top$. Доказать единственность A и дать геометрическое описание оператора $\mathcal{A}: x\mapsto Ax$ пространства $\mathbb{R}^3$.

6. Найти канонический вид ортогональной матрицы
$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix},$$
не вычисляя ее характеристического многочлена.

7. При каких значениях комплексного параметра z матрица $\begin{pmatrix}z-3 & 1\\ 2z-4 & 1\end{pmatrix}$ подобна а) унитарной, б) эрмитовой, в) нормальной.

8. Найти все значения предела $\lim_{k\to\infty}\frac{||A^kx||}{||B^kx||}$ в зависимости от ненулевого вектора $x\in\mathbb{R}^2$, если
$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

4 Сингулярные числа, сингулярное и полярное разложение

Сингулярные числа, сингулярное и полярное разложения были впервые получены Е. Бельтрами в 1883 году для билинейных форм и независимо К. Жорданом в 1884 году для линейных операторов евклидовых пространств. Они дают новые канонические представления для форм и операторов, согласованные с евклидовой структурой и позволяющие решать ряд задач на экстремум. С тех пор сингулярные числа, сингулярное и полярное разложение многократно переоткрывались и обобщались. Особенно важное значение они приобрели с появлением компьютеров и их широким применением при решении естественно–научных задач. Дело в том, что сингулярные числа устойчивы при малых изменениях элементов матриц в отличие от собственных чисел, а алгоритмы решения систем линейных уравнений, связанные с сингулярным разложением, позволяют контролировать накопление ошибок округления, возникающих при компьютерных вычислениях.

Наше изложение будет охватывать и евклидовы, и эрмитовы пространства.

4.1 Сингулярные числа

Пусть V и W — два евклидовых (эрмитовых) пространства со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$.

Функция $\sigma : V \times W \mapsto \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ есть *билинейная* (соответственно, *полуторалинейная*) *форма* , если

1) $\sigma(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\sigma(x, z) + \beta\sigma(y, z))$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, $x, y, z \in V$;

2) $\sigma(x, \alpha y+\beta z) = \alpha\sigma(x, y)+\beta\sigma(x, z)$ (соответственно $\sigma(x, \alpha y+\beta z) = \overline{\alpha}\sigma(x, y)+\overline{\beta}\sigma(x, z)$), где $\overline{\alpha}$ — комплексное число, сопряженное к α.

Форма σ для краткости называется *спариванием* V и W.

Примеры.

1) Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto W$ — линейное отображение. Тогда $\sigma(x, y) = (y, \mathcal{A}x)$, $x \in V$, $y \in W$ — спаривание. Важность этой функции в том, что она задаёт коэффициент Фурье вектора $\mathcal{A}x$ относительно y, если $\|y\| = 1$.

2) Пусть V и W — подпространства евклидова пространства X со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$. Тогда $\sigma(x, y) = (y, x)$, где $x \in V$, $y \in W$, — спаривание. Важность этой функции в том, что она отражает углы между векторами подпространств V и W и, следовательно, взаимное расположение V и W в X.

Теорема 1.*Для любого спаривания σ евклидовых (эрмитовых) пространств V и W имеет место;*

1) Существует единственное линейное отображение $\mathcal{A} : V \mapsto W$, такое, что

$$\sigma(x, y) = (y, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^*y, x)$$

при всех $x \in V$, $y \in W$.

2) Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис V, $f_1, \ldots, f_s$ — базис W, то спаривание σ однозначно задается матрицей значений $\sigma_{ij} = \sigma(e_j, f_i)$ функции σ на векторах базисов. Пусть $\Sigma = (\sigma_{ij})$ — матрица, составленная из коэффициентов σ_{ij}. Тогда $\Sigma = G(f_1, \ldots f_s)A^e_f$, где $G(f_1, \ldots f_s)$ — матрица Грама системы векторов $f_1, \ldots, f_s$, а A^e_f — матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ в этой паре базисов. В частности, если $f_1, \ldots, f_s$ — ортонормированный базис, то $\Sigma = A^e_f$. Кроме того, если $x = \sum_j x_j e_j$, $y = \sum_i y_i f_i$, то в координатах

$$\sigma(x, y) = \sum_{i,\ j} \overline{y}_i a_{ij} x_j = \overline{y}_f^\top G(f_1, \ldots f_s) A^e_f x_e.$$

3) Если $e_1', \dots, e_n'$ и $f_1', \dots, f_s'$ — новые базисы V и W, а $P : e \to e'$ и $Q : f \to f'$ — матрицы перехода от старых базисов к новым, то матрица спаривания в новых координатах имеет вид

$$A_{f'}^{e'} = Q^* A_f^e P,$$

где $Q^* = \overline{Q}^\top$.

Доказательство. 1) Комплексно сопряженная функция $\overline{\sigma}(x,\ y) = \overline{\sigma(x,\ y)}$ линейна по $y \in W$ при каждом фиксированном $x \in V$. По лемме Рисса в пространстве W существует единственный вектор z, зависящий от x такой, что $\overline{\sigma}(x,\ y) = (z,\ \ y)$ для всех $y \in W$. Определим отображение $\mathcal{A} : V \mapsto W$, заданное правилом $z = \mathcal{A}x$. Тогда для любых $x \in V$ и $y \in W$ справедливо

$$\sigma(x,\ y) = (y,\ \ z) = (y,\ \mathcal{A}x).$$

Покажем линейность отображения $\mathcal{A} : V \to W$. Ввиду указанного тождества и линейности σ по первому аргументу для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем

$$(y, \mathcal{A}(\lambda x + x')) = \sigma(\lambda x + x',\ y) = \lambda\sigma(x, y) + \sigma(x', y) = \lambda(y,\ \mathcal{A}x) + (y,\ \mathcal{A}x') = (y,\ \ \lambda\mathcal{A}x + \mathcal{A}x').$$

Поскольку это верно для всех y, то вектор $\mathcal{A}(\lambda x + x') - (\lambda\mathcal{A}x + \mathcal{A}x')$ ортогонален любому вектору $y \in W$. Поэтому $\mathcal{A}(\lambda x + x') = \lambda\mathcal{A}x + \mathcal{A}x'$.

Если $\mathcal{B} : V \to W$ — другое отображение, для которого $\sigma(x, y) = (y, \mathcal{B}x)$. Тогда

$$(y, \mathcal{A}x - \mathcal{B}x) = (y, \mathcal{A}x) - (y, \mathcal{B}x) = \sigma(x, y) - \sigma(x, y) = 0.$$

Поэтому вектор $\mathcal{A}x - \mathcal{B}x$ ортогонален любому вектору $y \in W$. Поэтому $\mathcal{A}x - \mathcal{B}x = 0$ и $\mathcal{A} = \mathcal{B}$

Докажем пункт 2. Пусть $A_f^e = (\alpha_{ij})$. Тогда $\mathcal{A}e_j = \alpha_{1j}f_1 + ... + \alpha_{sj}f_s$. Поэтому

$$\sigma_{ij} = \sigma(e_j, f_i) = (f_i, \mathcal{A}e_j) = \alpha_{1j}(f_i, f_1) + ... + \alpha_{sj}(f_i, f_s) = (f_i, f_1)\alpha_{1j} + ... + (f_i, f_s)\alpha_{sj}.$$

Поэтому $\Sigma = G(f_1, ..., f_s)A_f^e$. Если $f_1, ..., f_s$ — ортонормированый базис, то $\Sigma = A_f^e$. Последнее утверждение пункта 2 следует из билинейности (полуторалинейности) σ.

Пункт 3 следует из формул замены столбцов координат $y_f = Qy_{f'},\quad x_e = Px_{e'}$ при переходе к новому базису и матричной формы для σ из 2).

Теперь наша цель — получить канонический вид для билинейных (полуторалинейных) функций $\sigma : V \times W \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, используя экстремумы модуля таких функций на произведении единичных сфер $S_V \times S_W = \{(x,\ y)\ :\ x \in V,\ y \in W, \|x\| = \|y\| = 1\}$. Поскольку произведение сфер — компакт, а модуль билинейной (полуторалинейной) функции непрерывен, то по теореме Больцоно-Вейерштрасса в некоторой точке компакта она достигает своего максимума.

Пусть

$$\max\{|\sigma(x, y)| (x,\ y) \in S_V \times S_W\} = |\sigma(v, w)| = r > 0.$$

Тогда $\sigma(v, w) = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}$. Заменим w на $we^{i\phi}$ получим, что

$$\sigma(v, we^{i\phi}) = \overline{e^{i\phi}}\sigma(v, w) = \overline{e^{i\phi}}e^{i\phi}r = r.$$

Поскольку $(v, we^{i\phi}) \in S_V \times S_W$, то можно считать, что $\sigma(v, w) = |\sigma(v, w)| = r = \sigma_{\max}$.

Способ отыскания этого максимума и точек, где он достигается, возникает из алгебры самосопряженных операторов. Отсюда, естественно, получается и сингулярное разложение матриц. Мы начнем с важной леммы, которая позволит далее вести индукцию по размерности.

Лемма 1. *Пусть в предыдущих обозначениях максимум* $|\sigma(x, y)|$ *на произведении сфер* $S_V \times S_W$ *достигается в точке* $(v, w) \in S_V \times S_W$. *Тогда, если* $x \in V$ *такой, что* $x \perp v$ *(т.е.* $(x, v) = 0$*), то* $\sigma(x, w) = 0$. *Аналогично, если* $y \in W$, $y \perp w$, *то* $\sigma(y, v) = 0$.

Доказательство. Допустим, что $|\sigma(x, w)| > 0$. Укажем тогда вектор $z \in S_V$ такой, что $|\sigma(z, w)| > \sigma(v, w) = \sigma_{\max}$, что приведёт к противоречию с выбором $(v, w) \in S_V \times S_W$.

Аналогично предыдущему можно считать, что комплексное число $\sigma(x, w)$ является положительным вещественным числом. Этого можно добиться, умножая x на подходящее число $\lambda = e^{i\varphi}$. Тогда $0 < \sigma(x, w) \leqslant \sigma(v, w) = \sigma_{\max}$.

Если $\sigma(x, w) = \sigma(v, w)$, то пусть $z = \frac{(x+v)}{\sqrt{2}}$. Тогда $\|z\| = 1$ и

$$\sigma(z, w) = \frac{\sigma(x, w) + \sigma(v, w)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sigma_{\max} > \sigma_{\max}$$

получили противоречие.

Если $0 < \sigma(x, w) < \sigma(v, w)$, то можно считать, что

$$\sigma(x, w) = \lambda\, \sigma_{\max}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Пусть теперь $z = \lambda x + \sqrt{1-\lambda^2} v$. Тогда $\|z\| = 1$ и

$$\sigma(z, w) = \lambda \sigma(x, w) + \sqrt{1-\lambda^2}\sigma(v, w) = \lambda(\lambda\sigma_{\max}) + \sqrt{1-\lambda^2}\sigma_{\max} > \sigma_{\max},$$

так как $\lambda^2 + \sqrt{1-\lambda^2} > 1$. Действительно, $\sqrt{1-\lambda^2} > 1 - \lambda^2$ при $0 < \lambda < 1$. Снова пришли к противоречию. Первое утверждение доказано.

Второе утверждение следует из первого, если заменить спаривание σ на сопряженное $\overline{\sigma}(x, y) = \overline{\sigma(x, y)}$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Для любой билинейной (полуторалинейной) формы* σ, *заданной на произведении евклидовых (эрмитовых) пространств* V *и* W, *существуют ортонормированные базисы* $v_1, \ldots, v_n$ *и* $w_1, \ldots, w_s$ *пространств* V *и* W *соответственно, такие, что матрица формы в этих базисах диагональна с монотонно убывающими элементами диагонали*

$$\sigma(v_j, w_i) = 0 \text{ при } i \neq j, \quad \sigma(v_1, w_1) \geqslant \sigma(v_2, w_2) \geqslant \ldots \geqslant \sigma(v_m, w_m), \quad m = \min\{n, s\}.$$

Таким образом, в координатах в этих ортонормированных базисах билинейная форма имеет единственный канонический вид

$$\sigma(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j x_j y_j, \quad \sigma_1 = \sigma(v_1, w_1), \sigma_2 = \sigma(v_2, w_2), \ldots, \sigma_m = \sigma(v_m, w_m).$$

Более того, числа $\sigma_1^2, ..., \sigma_m^2, 0, ..., 0$ *(число нулей равно* $n - m$*) соответственно* $\sigma_1^2, ..., \sigma_m^2$, $0, ..., 0$ *(число нулей равно* $s - m$*) — собственные значения самосопряженного оператора* $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ *соответственно* $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, *взятые с учетом их кратности.*

Доказательство. По принципу максимума из анализа существуют следующие максимумы:

$$\max\{|\sigma(x, y)| : x \in S_V,\ y \in S_W\} = \sigma(v_1, w_1) = \sigma_1,$$

$$\max\{|\sigma(x, y)| : x \in \{v_1\}^\perp \cap S_V,\ y \in \{w_1\}^\perp \cap S_W\} = \sigma(v_2, w_2) = \sigma_2,$$

$$\max\{|\sigma(x, y)| : x \in \{v_1\}^\perp \cap \{v_2\}^\perp \cap S_V,\ y \in \{w_1\}^\perp \cap \{w_2\}^\perp \cap S_W\} = \sigma(v_3, w_3) = \sigma_3,$$

и так далее. Этот процесс закончится на шаге $m = \min\{n, s\}$. При необходимости мы можем дополнить одну из ортонормированных систем $v_1, \ldots, v_m$ или $w_1, \ldots, w_m$ до ортонормированного базиса V или W.

Свойство $\sigma(v_j,\, w_i) = 0$ при $i \neq j$ следует из леммы 1. Неравенства

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_m \geqslant 0$$

следуют из сужения множеств, на которых вычисляется максимум функции.

Осталось доказать единственность диагональных коэффициентов. По теореме 1 форма σ однозначно задаёт линейное отображение $\mathcal{A} : V \mapsto W$, такое, что $\sigma(x,\, y) = (y,\, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^* y,\, x)$ при всех $x \in V$, $y \in W$. Тогда

$$(w_i,\, \mathcal{A}v_j) = (\mathcal{A}^* w_i,\, v_j) = \sigma(v_j,\, w_i) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j \\ \sigma_j & \text{при} \quad i = j. \end{cases}$$

Числа $(w_i,\, \mathcal{A}v_j)$ — коэффициенты Фурье $\mathcal{A}v_j$ в ортонормированном базисе $w_1, \ldots,\, w_m, \ldots w_s$, можно разложить вектор по базису:

$$\mathcal{A}v_j = \begin{cases} \sigma_j w_j & \text{при} \quad j \leqslant m \\ 0 & \text{при} \quad j > m, \end{cases} \qquad \mathcal{A}^* w_j = \begin{cases} \sigma_j v_j & \text{при} \quad j \leqslant m \\ 0 & \text{при} \quad j > m, \end{cases}$$

Эти равенства равносильны предыдущим. Отсюда

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}v_j = \begin{cases} \sigma_j^2 v_j & \text{при} \quad j \leqslant m \\ 0 & \text{при} \quad j > m, \end{cases} \qquad \mathcal{A}\mathcal{A}^* w_j = \begin{cases} \sigma_j^2 w_j & \text{при} \quad j \leqslant m \\ 0 & \text{при} \quad j > m. \end{cases}$$

Это значит, что $v_1, \ldots,\, v_n$ — ортонормированный базис V, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ с собственными значениями $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_m^2, 0, \ldots, 0$ (число нулей равно $n - m$). Аналогично для $w_1, \ldots,\, w_s$, W и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Учитывая линейный порядок, получим равенства $\sigma_j^2 = \lambda_j$ при $j \leqslant m$, где $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ — собственные числа самосопряженного оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ пространства V с учётом кратностей. Аналогично для $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ и W. Следовательно, числа σ_j задаются отображением и формой однозначно. Теорема доказана.

4.2 Сингулярное, полярное разложение

Как следствие теоремы 3.2 получается

Теорема 1 (о сингулярном разложении).

1) Для любого линейного отображения $\mathcal{A} : V \mapsto W$ евклидовых (эрмитовых) пространств существуют ортонормированные базисы $v_1, \ldots,\, v_n$ и $w_1, \ldots,\, w_s$ пространств V и W соответственно, а также неотрицательные вещественные числа

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_m,\ m = \min\{n,\ s\},$$

такие, что $\mathcal{A}v_j = \sigma_j w_j$ при всех $j \leqslant m$, $\mathcal{A}v_j = 0$ при всех $j > m$. Эти числа (и базисы) называются сингулярными относительно $\mathcal{A}$. Сингулярные числа задаются отображением $\mathcal{A}$ однозначно. Более точно, $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$, где $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ — собственные числа самосопряженного оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ пространства V.

2) Всякая вещественная (комплексная) матрица A порядка $s \times n$ имеет сингулярное разложение $A = Q\Sigma P^{-1}$, где P и Q — ортогональные (унитарные) матрицы порядков n и s соответственно, а $\Sigma = Diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ — вещественная диагональная матрица порядка $s \times n$, $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_m \geqslant 0$, $m = \min\{n,\ s\}$. Числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ задаются матрицей A однозначно и называются сингулярными числами матрицы A.

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из доказательства теоремы 2. Утверждение 2) — матричный вариант 1), поскольку переход от одного ортонормированного базиса к другому в пространстве столбцов задаётся умножением на ортогональную (унитарную) матрицу. Но мы поступим иначе, фактически указывая алгоритм построения сингулярных базисов в этом конкретном случае. Пусть $V = \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, $W = \mathbb{R}^s(\mathbb{C}^s)$ — координатные евклидовы (эрмитовы) пространства столбцов, и пусть $\mathcal{A} : x \mapsto Ax$ — умножение столбцов на матрицу A, задающее линейное отображение V в W. Тогда сопряженное отображение $\mathcal{A}^* : y \mapsto \overline{A}^\top y$ — умножение столбцов на сопряженно транспонированную матрицу. Матрица $\overline{A}^\top A$ линейного преобразования $\mathcal{A}^*\mathcal{A} : V \mapsto V$ симметрична (эрмитова). Поэтому V имеет ортонормированный базис $v_1, \ldots,\ v_n$, состоящий из собственных векторов для $\overline{A}^\top A$ с собственными значениями $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geq 0$. Положим $P = (v_1 \ldots v_n)$ — матрица, столбцы которой являются вектор-столбцы $v_1 \ldots v_n$. Тогда P — ортогональна (унитарна), поскольку её столбцы образуют ортонормированный базис. Положим $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$ при $j \leqslant m$ и пусть $\Sigma = Diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ — диагональная матрица порядка $s \times n$. Положим $w_j = \frac{Av_j}{||Av_j||}$ при $j \leqslant r = \operatorname{rk} A$. Так как

$$||Av_j|| = \sqrt{(\mathcal{A}v_j, \mathcal{A}v_j)} = \sqrt{(v_j, \mathcal{A}^*\mathcal{A}v_j)} = \sqrt{(v_j, \lambda_j v_j)} = \sqrt{\lambda_j} = \sigma_j,$$

то $w_j = \frac{Av_j}{\sigma_j}$. Кроме того,

$$(w_i, w_j) = (\frac{Av_i}{\sigma_i}, \frac{Av_j}{\sigma_j}) = \frac{(v_i, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}v_j))}{\sigma_i\sigma_j} = \frac{(v_i, \lambda_j v_j)}{\sigma_i\sigma_j} = \frac{\lambda_j}{\sigma_i\sigma_j}(v_i, v_j) = 0.$$

Дополним эту систему до ортонормированного базиса $w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots,\ w_s$ пространства W и положим $Q = (w_1 \ldots w_s)$. Тогда матрица Q ортогональна (унитарна). Кроме того, по правилам умножения матриц

$$AP = (Av_1 \ldots Av_n) = (\sigma_1 w_1, \ldots, \sigma_r w_r, 0, \ldots, 0) = Q\Sigma.$$

Отсюда следует, что $A = Q\Sigma P^{-1}$. Теорема доказана.

Замечание. Равенство $A = Q\Sigma P^{-1}$ или равносильное равенство $\Sigma = Q^{-1}AP$ означает, что любую вещественную (комплексную) матрицу можно привести к диагональному виду, домножая слева и справа на подходящие ортогональные (унитарные) матрицы. На практике для этого используют аналоги матриц элементарных преобразований — матрицы плоских вращений или отражений. Здесь даже не нужна особая теория.

Следствие (о полярном разложении). *Всякий линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова (эрмитова) пространства V имеет левое полярное разложение $\mathcal{A} = RS$, где R — ортогональный (унитарный), а S — самосопряженный оператор пространства V с неотрицательным спектром.*

Доказательство проще получить для матриц. Пусть $A = Q\Sigma P^{-1}$ — сингулярное разложение матрицы порядка n. Тогда $A = (QP^{-1})(P\Sigma P^{-1})$. Осталось положить $R = QP^{-1} = QP^*$, $S = P\Sigma P^{-1} = P\Sigma P^*$. Матрица R ортогональна (унитарна) как произведение ортогональных (унитарных) одинакового порядка. Матрица S самосопряжена как ортогонально (унитарно) подобная вещественной диагональной. Её спектр состоит из сингулярных чисел для A, поэтому неотрицателен.

Другое доказательство. Пусть $v_1, \ldots,\ v_n$ и $w_1, \ldots,\ w_n$ — сингулярные базисы пространства V относительно оператора $\mathcal{A} : V \mapsto V$, $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n$ — его сингулярные числа. Пусть линейный оператор S таков, что $Sv_j = \sigma_j v_j$ для всех j. Тогда S самосопряжен и имеет неотрицательный спектр. Пусть линейный оператор R таков, что $Rv_j = w_j$ для всех j. Тогда R сохраняет длину вектора, отправляя ортонормированный базис в ортонормированный, и потому ортогонален (унитарен). Кроме того, $\mathcal{A}v_j = \sigma_j w_j = R(Sv_j)$ для всех j. Поскольку $v_1, \ldots,\ v_n$ — базис V, то $\mathcal{A} = RS$. Следствие доказано.

Пример. Линейное отображение $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}^3$ координатных евклидовых пространств таково, что

$$\mathcal{A}:(1,1)\mapsto(2,1,-3);\mathcal{A}:(1,2)\mapsto(4,1,-4).$$

Найдем сингулярное разложение матрицы A отображения $\mathcal{A}$ в стандартном базисе.

Матрица $A=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\\-2&-1\end{pmatrix}$. Тогда $A^\top A$ — матрица линейного преобразования $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Умножая матрицы получаем

$$A^\top A=\begin{pmatrix}0&1&-2\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\1&0\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\2&5\end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $A^\top A$ равны 7 и 3, т.е. $\lambda_1=7,\lambda_2=3$. Тогда $\sigma_1=\sqrt{7},\sigma_2=\sqrt{3}$ — сингулярные числа отображения $\mathcal{A}$. Найдем собственные вектора u_1,u_2 матрицы $A^\top A$. Для $\lambda_1=7$ $u_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, для $\lambda_2=3$ $u_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, Нормируем эти вектора, получаем первый сингулярный базис $v_1=\frac{\sqrt{2}}{2}u_1,v_2=\frac{\sqrt{2}}{2}u_2$. Положим $w_1=Av_1/||Av_1||$ и $w_2=Av_2/||Av_2||$. Тогда

$$w_1=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix},w_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Дополним эту систему до ортонормированного базиса w_1,w_2,w_3 пространства $\mathbb{R}^3$. Получаем $w_3=\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$. Векторы w_1,w_2,w_2 — второй сингулярный базис. Тогда

$$P=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\Sigma=\begin{pmatrix}\sqrt{7}&0\\0&\sqrt{3}\\0&0\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{14}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{21}}\\\frac{1}{\sqrt{14}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{4}{\sqrt{21}}\\-\frac{3}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{21}}\end{pmatrix}$$

и $A=Q\Sigma P^{-1}$.

4.3 Сингулярные числа и норма линейного отображения

Сингулярные числа широко используются для точных оценок величины искажения длины вектора при линейном отображении.

Пусть $\mathcal{A}:V\to W$ — линейное отображение евклидовых (эрмитовых) пространств. Число

$$\|\mathcal{A}\|=\sup\{\frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|}\,|\,x\in V,\ x\neq 0\}$$

называется *нормой* линейного отображения $\mathcal{A}$, согласованной со скалярным произведением.

Покажем, что эта верхняя грань действительно достигается на некотором векторе и является просто максимальным коэффициентом искажения длины вектора.

Теорема 1. *В предыдущих обозначениях*
1) $\|\mathcal{A}x\|\leqslant\|\mathcal{A}\|\,\|x\|,\ \|\mathcal{A}x-\mathcal{A}y\|\leqslant\|\mathcal{A}\|\,\|x-y\|$.
2) $\|\mathcal{A}\|\geqslant 0$, $\|\mathcal{A}\|=0\Longleftrightarrow\mathcal{A}=0$.
3) $\|\mathcal{A}\|=\sup\{\|\mathcal{A}x\|\,|\,x\in V,\,\|x\|=1\}<\infty$.

4) $\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\| \leqslant \|\mathcal{A}\|+\|\mathcal{B}\|$.
5) $\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| \leqslant \|\mathcal{A}\|\,\|\mathcal{B}\|$.
6) $\|\lambda\mathcal{A}\| = |\lambda|\,\|\mathcal{A}\|$.
7) $\mathcal{A}v=\lambda v,\ v\neq 0 \Longrightarrow |\lambda| \leqslant \|\mathcal{A}\|$.

Доказательство. 1) При $x=0$ неравенство очевидно. При $x\neq 0$ получаем по определению

$$\frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|} \leqslant \sup\{\frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|}\,|\,x\in V,\ x\neq 0\} = \|\mathcal{A}\|.$$

Отсюда следуют оба нужных неравенства.

2) Очевидно из определения.

3) Следует из равенства

$$\frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|} = \|\mathcal{A}(\frac{x}{\|x\|})\|.$$

Поскольку сфера $\|x\|=1$ компактна, то непрерывная функция $x\mapsto\|\mathcal{A}x\|$ на ней ограничена и в некоторой точке достигает своего максимального значения.

4) При $\|x\|=1$ получаем по свойствам верхней грани

$$\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\| = \sup\|(\mathcal{A}x+\mathcal{A}x)\| \leqslant \sup(\|\mathcal{A}x\|+\|\mathcal{A}x\|) \leqslant \sup\|\mathcal{A}x\|+\sup\|\mathcal{A}x\| = \|\mathcal{A}\|+\|\mathcal{A}\|.$$

5) При $\|x\|=1$ получаем ввиду 1)

$$\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| = \sup\|\mathcal{A}(\mathcal{B}x)\| \leqslant \sup(\|\mathcal{A}\|\|\mathcal{B}x\|) \leqslant \|\mathcal{A}\|\,\sup\|\mathcal{B}x\| \leqslant \|\mathcal{A}\|\,\|\mathcal{B}\|.$$

6) Очевидно.

7) $|\lambda| \leqslant \dfrac{\|\mathcal{A}v\|}{\|v\|} \leqslant \sup\dfrac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|} = \|\mathcal{A}\|$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Норма линейного отображения $\mathcal{A}: V\mapsto W$ евклидовых (эрмитовых) пространств совпадает с его максимальным сингулярным числом σ_1. Точнее,*

$$\|\mathcal{A}x\| \leqslant \sigma_1\|x\|$$

для всех x из V. Равенство достигается только тогда, когда $x=0$ или когда x — собственный вектор оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ с максимальным собственным значением $\lambda_1=\sigma_1^2$.

Доказательство. Пусть $\sigma(x,\,y)=(y,\,\mathcal{A}x)$ — ассоциированная билинейная (полуторалинейная) форма. Ввиду неравенства Коши–Буняковского $|\sigma(x,\,y)| = |(y,\,\mathcal{A}x)| \leqslant \|y\|\|\mathcal{A}x\|$. Равенство в том и только том случае, когда $\mathcal{A}x=\lambda y$ при $y\neq 0$ Если $\|y\|=1$, то $\|\mathcal{A}x\|=|\lambda|$. Отсюда по основной теореме

$$\sigma_1 = \max\{|\,\sigma(x,\,y)|: x\in S_V,\ y\in S_W\} = \max\{\|\mathcal{A}x\|:\|x\|=1\} = \|A\|.$$

Следствие. $\|\mathcal{A}^*\| = \|\mathcal{A}\|$.

4.4 Задачи

1. Используя геометрическое описание самосопряженных и ортогональных операторов, опишите возможный образ единичной сферы евклидова пространства относительно линейного оператора.

2. Пусть $A = RS$ — полярное разложение. Очевидно, $A^*A = S^*R^*RS = S^2, \ \ S = \sqrt{A^*A}$. Докажите, что оператор S задаётся оператором A однозначно.

3. Доказать, что любой оператор A имеет также аналогичное *правое полярное разложение* $A = S'R'$.

4. Пусть V — евклидово пространство вещественных многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(f, g) = \int_0^1 fgdx$. Найти сингулярные числа и норму линейного преобразования

$$D : f(x) \mapsto 2f(x) - \frac{1}{2}f'(x).$$

5. Пусть V — евклидово пространство вещественных многочленов степени не выше 1 со скалярным произведением $(f, g) = \int_0^1 fgdx$. Найти сингулярные числа и норму линейного преобразования

$$D : f(x) \mapsto xf'(x).$$

6. Найти сингулярное разложение и норму матрицы $A = (1, 1, 1)$.

7. Найти сингулярные числа, сингулярные базы и норму для проектора в $\mathbb{R}^2$ на прямую $x_2 = 0$ параллельно $x_1 = 2x_2$.

8. Пусть E_{ij} — матрица порядка n, отличающаяся от нулевой матрицы только единицей на месте (i, j). Матрицу $A_\varepsilon = E_{12} + E_{23} + \ldots + E_{n-1,n} + \varepsilon E_{n1}$ можно рассматривать как возмущение матрицы A_0 на одном месте $(n, 1)$, при котором 0 заменяется на ε. Вычислить собственные и сингулярные числа матриц A_0 и A_ε. Оценить порядок изменения тех и других при переходе от 0 к ε, если $n = 10, \ \ \varepsilon = 10^{-10}$.

9. Доказать, что норма нормального оператора совпадает с его спектральным радиусом, т. е. с максимальным модулем для точек его спектра. Верно ли это для произвольных операторов?

10. Покажите, что если $\dim V \leqslant \dim W$, то в предыдущих обозначениях

$$\|\mathcal{A}x\| \geqslant \sigma_m \|x\|$$

для всех x из V. Равенство достигается в точности тогда, когда $x = 0$ или когда x — собственный вектор оператора A^*A с минимальным собственным значением $\lambda_m = \sigma_m^2$. В частности,

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \geqslant \sigma_m \|x - y\|$$

для всех x, y из V, и равенство здесь достигается когда $x = 0$ или когда x — собственный вектор оператора A^*A с минимальным собственным значением λ_m. Это дает точную оценку *снизу* для коэффициента искажения длины вектора при линейном отображении.

11. На практике нередко встречаются переопределенные системы s вещественных линейных уравнений $Ax = b$ от n неизвестных, $s > n$, не имеющие точных решений. В этом случае интересны псевдорешения, т. е. такие векторы x^0 из $\mathbb{R}^n$, что евклидовы нормы $||Ax^0 - b||$ и $||x^0|||$ минимальны. Используя свойства ортогональных матриц P и Q в сингулярном разложении $A = Q\Sigma P^{-1}$, доказать, что $x^0 = P\Sigma^+ Q^{-1}b$, где Σ^+ получается из Σ транспонированием и заменой ненулевых σ_j на σ_j^{-1}. Матрица $A^+ = P\Sigma^+ Q^{-1}$ называется *псевдообратной* для A.

12. Докажите *минимакс- и максимин-формулы*, характеризующие *все* сингулярные числа:

$$\sigma_j = \min_{\substack{U \leqslant V, \\ \dim U = n+1-j}} \max_{\substack{x \in U, \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\substack{U \leqslant V, \\ \dim U = j}} \min_{\substack{x \in U, \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

13. Вещественное или комплексное векторное пространство V называется нормированным пространством, если на V задано отображение (норма) $||\cdot|| : V \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим свойством:

1) $||x|| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$,
2) $||x + y|| \leqslant \|x\| + \|y\|$,
3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

Доказать, что отображение $|| \cdot || : V \mapsto \mathbb{R}$ является непрерывным.

14. Пусть пространство V — конечномерно. Доказать, что любые две нормы $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ в V эквиваленты, а именно, существуют такие положительные действительные числа C_1 и C_2, что для любого $x \in V$

$$C_2||x||_2 \leq ||x||_1 \leq C_2||x||_2.$$

5 Сингулярные числа и серия углов между подпространствами евклидова пространства

Напомним, что угол $\varphi(x,y)$ между ненулевыми векторами x и y евклидова пространства X задается условиями

$$\cos\varphi(x,y) = \frac{(x,y)}{||x||\,||y||}, \quad 0 \leqslant \varphi(x,y) \leqslant \pi.$$

Очевидно, векторы можно нормировать без изменения угла. Поэтому $\varphi(x,y) = \varphi(\frac{x}{||x||}\ \frac{y}{||y||})$. Будем считать по определению, что $\varphi(x,0) = \pi/2$.

Пусть V и W — два ненулевых подпространства из U. Предположим, что $\dim V = n$, $\dim W = s$ и $m = \min\{n,s\}$. Взаимное расположение V и W задает следующая *серия углов*

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \ldots \leqslant \varphi_m$$

между ними.

Положим

$$\varphi_1 = \min\{\varphi(x,y)\,|\,x \in V,\ y \in W,\ ||x|| = ||y|| = 1\}.$$

Ввиду компактности сфер и непрерывности скалярного произведения этот минимум достигается на некоторых векторах $v_1 \in V$, $w_1 \in W$, $||v_1|| = ||w_1|| = 1$. Кроме того, $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi$. Далее, пусть

$$\varphi_2 = \min\{\varphi(x,y)\,|\,x \in V,\ y \in W,\ |x| = |y| = 1,\ x \bot v_1,\ y \bot w_1\}.$$

Минимум снова достигается на векторах $v_2 \in V$, $w_2 \in W$, $|v_2| = |w_2| = 1$, $v_2 \bot v_1$, $w_2 \bot w_1$. Далее, среди векторов $x \in V$ и $y \in W$, длины 1 и ортогональных соответственно v_2, v_1 и w_2, w_1, выбираются векторы v_3 и w_3 под минимальным углом $\varphi_3 = \varphi(v_3, w_3)$. Такой процесс построения углов и векторов можно продолжать, пока в одном из подпространств не получится ортонормированный базис $v_1, \ldots,\ v_m$ или $w_1, \ldots,\ w_m$.

Если $\varphi_j = 0$, то в силу замечания, сделанного после теоремы 1.1.1, получаем $v_j = w_j$ и все такие векторы при $j = 1, 2, ..., k$ дают базис пересечения подпространств V и W. Далее, $\varphi_{k+1} > 0$ называется *углом* между подпространствами, φ_m — *раствором* подпространств. Это согласуется с обычным определением угла между V и W как наименьшего угла между ненулевыми векторами x из $V \cap (V \cap W)^{\perp}$ и y из $W \cap (V \cap W)^{\perp}$.

Определение серии углов геометрически ясно, и серия углов всегда существует, но наш последовательный выбор углов и векторов, вообще говоря, зависит не только от подпространств, но и от выбора предыдущих векторов на каждом шаге, начиная со второго. Поэтому необходимо

1) доказать корректность такого определения серии углов,

2) найти способ быстрого вычисления серии углов,

3) доказать, что серия углов полностью задает взаимное расположение двух подпространств данных размерностей.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть V и W — ненулевые подпространства евклидова пространства U, $\dim V = n$, $\dim W = s$, $m = \min\{n,s\}$. Предположим, что серия углов*

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \ldots \leqslant \varphi_m$$

между V и W достигается на ортонормированных системах векторов $v_1, \ldots,\ v_m$ из V и $w_1, \ldots,\ w_m$ из W. Тогда

$$\cos\varphi_1 \geqslant \cos\varphi_2 \geqslant \ldots \geqslant \cos\varphi_m$$

есть сингулярные числа оператора ортогонального проецирования $P : V \to W$, а системы $v_1, \dots, v_m$ и $w_1, \dots, w_m$ можно дополнить до сингулярных базисов V и W относительно P. Верно и обратное, на любой паре сингулярных базисов V и W относительно оператора ортогонального проецирования $P : V \to W$ достигается серия углов между V и W, а арккосинусы сингулярных чисел дают соответствующую серию углов.

Уточним: ортогональное проецирование U в W (параллельно $W^{\perp}$) это отображение $pr_W : U \mapsto W$, сопоставляющее каждому вектору $x \in U$ его ортогональную составляющую из W, т.е. для $x = x' + x''$, где $x' \in W$, $x'' \in W^{\perp}$, $pr_W(x) = x'$. Ортогональное проецирование $P : V \to W$ является сужением pr_W на V и P задается только взаимным расположением V и W в U. Отображение P однозначно задаёт свои сингулярные числа и их арккосинусы, т. е. серию углов между V и W. Ортогональное проецирование $P' : W \to V$ имеет те же сингулярные числа.

Доказательство. Скалярное произведение в U задаёт билинейную форму $\sigma(x, y) = (y, x)$ на $V \times W$. Найдём ассоциированное с билинейной формой σ линейное отображение V в W.

Разложим вектор $x \in V \subseteq U$ в сумму ортогональной проекции на W и ортогональной составляющей, т.е. $x = x' + x''$, где $x' \in W,\ x'' \in W^{\perp}$. Тогда для $y \in W$ имеем

$$\sigma(x\,, y) = (y,\, x) = (y,\, x' + x'') = (y,\, x') = (y,\, Px),$$

где $P : x \mapsto x'$ — ортогональное проецирование.

Ясно, что скалярное произведение векторов единичной длины максимально тогда и только тогда, когда угол между векторами минимален. Поэтому определение серии углов между подпространствами равносильно определению серии сингулярных чисел для билинейной формы $\sigma(x,\, y)$ или ассоциированного отображения P. Основная теорема (теорема 3.1.2) гарантирует корректность определения серии углов, а поиск сингулярных чисел и сингулярных базисов относительно проецирования P даёт способ их вычисления. Теорема доказана.

Упражнение 1. *Пусть $\mathcal{A} : V \to W$ — произвольное линейное отображение евклидовых пространств и $||\mathcal{A}||$ — его норма. Доказать, что существует реализация V и W в качестве таких подпространств подходящего евклидова пространства U, что $\mathcal{A} = ||\mathcal{A}||P$, где $P : V \to W$ — ортогональное проецирование в U.*

Упражнение 2. *Пусть серии углов между подпространствами V, W и V', W' евклидова пространства U совпадают, и пусть $\dim V = \dim V'$, $\dim W = \dim W'$. Тогда существует такой ортогональный оператор Q пространства U, что $QV = V'$, $QW = W'$.*

Следствие 1. *Пусть V и W — подпространства евклидова пространства U. Предположим, что $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_s$ — произвольные ортонормированные базисы V и W соответственно. Пусть $\sigma_{ij} = (f_i, e_j)$ и $\Sigma = (\sigma_{ij})$ — матрица порядка $s \times n$ (смешанная матрица Грама). Если $m = \min\{n,\ s\}$ и $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_m$ — сингулярные числа матрицы Σ, то*

$$\arccos\, \sigma_1 \leqslant \ldots \leqslant \arccos\, \sigma_m \text{ — серия углов между } V \text{ и } W.$$

Доказательство. Ортогональная проекция вектора x на подпространство W вычисляется через коэффициенты Фурье этого вектора в ортонормированном базисе подпространства по формуле $\mathrm{pr}_W x = \sum_i (f_i, x) f_i$. Поэтому

$$Pe_j = \mathrm{pr}_W e_j = \sum_i (f_i, e_j) f_i.$$

По теореме 3.1.1 матрица проецирования $P : V \to W$ в паре ортонормированных базисов $e_1, \ldots,\ e_n$ и $f_1, \ldots,\ f_s$ совпадает с матрицей Σ. Следовательно, сингулярные числа для P и Σ совпадают. Осталось применить предыдущую теорему.

Пример 1. Найдём подпространства собственных векторов для линейного оператора $L_A : X \mapsto AX$ в пространстве вещественных матриц $M_2(\mathbb{R})$, а также серию углов между ними, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Каждую матрицу $X \in M_2(\mathbb{R})$ отождествим с парой $(u\,v)$, где $u,\ v \in \mathbb{R}^2$ и u — первый, v — второй столбец матрицы U. Следующие равенства равносильны

$$AX = \lambda X, \quad (Au\ Av) = (\lambda u\ \lambda v), \quad \begin{cases} Au = \lambda u, \\ Av = \lambda v. \end{cases}$$

Легко найти спектры $\mathrm{Sp}(A) = \{0,\ -1\}$ и $\mathrm{Sp}(L_A) = \{0,\ 0,\ -1,\ -1\}$.

Если $\lambda = 0$, то $u = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Тогда подпространство V собственных векторов для L_A, отвечающих собственному значению нуль, состоит из матриц

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda = -1$, то $u = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ v = \delta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Тогда подпространство W собственных векторов для L_A, отвечающих собственному значению -1, состоит из матриц

$$Y = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -2\gamma & -2\delta \end{pmatrix}.$$

Найдём наименьший угол между подпространствами непосредственно по определению.

Используя координатное скалярное произведение, вычислим угол φ между X и Y:

$$\cos\varphi = \frac{(X, Y)}{||X||||Y||} = \frac{3\alpha\gamma + 3\beta\delta}{\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)}\sqrt{5(\gamma^2+\delta^2)}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}.$$

Ввиду неравенства Коши–Буняковского $\max\cos\varphi = 3/\sqrt{10}$, $\varphi_1 = \arccos(3/\sqrt{10})$ — наименьший угол между подпространствами собственных векторов-матриц.

Применим теперь следствие 1. Очевидно, матрицы

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

образуют ортонормированный базис V.

Аналогично, матрицы

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

образуют ортонормированный базис W.

Тогда смешанная матрица Грама имеет вид

$$((F_i, E_j)) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Её сингулярные числа $\sigma_1 = \sigma_2 = 3/\sqrt{10}$, серия углов $\varphi_1 = \varphi_2 = \arccos(3/\sqrt{10})$, угол между подпространствами V, W и раствор совпадают.

Пример 2. Найдем угол φ_1 между двумерной $A_0A_1A_2$ и имеющей с ней единственную общую вершину $(n-2)-$мерной гранью $A_0A_3A_4...A_n$ правильного $n-$мерного симплекса $A_0A_1A_2...A_n$. Найдем также предел угла φ_1 при $n \to \infty$.

Реализуем $A_0A_1...A_n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ как выпуклую оболочку точек

$$A_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)^\top,$$

$$A_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)^\top,$$

$$A_2 = (0, 0, 1, \dots, 0)^\top,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$A_n = (0, 0, 0, \dots, 1)^\top.$$

Напомним, что $(x_1, \dots, x_n)^\top$ — столбец элементами которого являются $x_1, \dots, x_n$. Грань $A_0A_1A_2$ параллельна линейной оболочке V векторов $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$. Аналогично, грань $A_0A_3A_4...A_n$ параллельна линейной оболочке W векторов $\overrightarrow{A_0A_3}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$. Ортонормированные базисы этих подпространств, конечно, можно построить процессом ортогонализации Грама-Шмидта, но в данном случае их нетрудно указать сразу. Действительно, в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ подпространство векторов, сумма координат которых равна нулю, имеет ортогональный базис

$$(1, -1, 0, 0, 0, \dots, 0)^\top,$$

$$(1, 1, -2, 0, 0, \dots, 0)^\top,$$

$$(1, 1, 1, -3, 0, \dots, 0)^\top,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$(1, 1, 1, 1, 1, \dots, -n)^\top.$$

Длина вектора $(1, 1, ..., 1, -k, 0, ..., 0)^\top$ равна $\sqrt{k^2+k} = \sqrt{k(k+1)}$. Отсюда, подпространство V имеет ортонормированный базис

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0, 0, \dots, 0)^\top,$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2, 0.0, \dots, 0)^\top,$$

а подпространство W — ортонормированный базис

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1, 0, 0, \dots, 0)^\top,$$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 0, 1, -2, 0, \dots, 0)^\top,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$f_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-1)}}(1, 0, 0, 1, 1, \dots, 1, 2-n)^\top.$$

Так как $(f_i, e_j) = \frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}$ при $1 \leqslant i \leqslant n-2$, $1 \leqslant j \leqslant 2$, то смешанная матрица Грама

$$A = ((f_i, e_j)) = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}}\frac{1}{\sqrt{6}} \end{array} \right).$$

Ее столбцы пропорциональны, поэтому ранг равен единице. Найдем сингулярные числа для A как квадратные корни из собственных чисел матрицы

$$A^*A = \left(\begin{array}{cccc} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}}\frac{1}{\sqrt{6}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}}\frac{1}{\sqrt{6}} \end{array} \right) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k(k+1)} \left(\begin{array}{cc} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{array} \right).$$

Ясно, что

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n-1})$$

и собственные числа матрицы

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

равны $\frac{4}{3}$, 0. Отсюда спектр для A^*A — это

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n-1})\frac{4}{3}, \quad \lambda_2 = 0$$

и, соответственно, сингулярные числа матрицы A — это

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n-1})\frac{4}{3}}, \quad \sigma_2 = 0.$$

Окончательно,

$$\varphi_1 = \arccos\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n-1})\frac{4}{3}}$$

и $\varphi_1 \to \arccos\sqrt{2/3}$ при $n \to \infty$. Раствор между гранями равен $\arccos 0 = \pi/2$.

В геометрии встречается задача вычисления двугранного угла между двумя смежными гранями многогранника. Их пересечение имеет размерность на единицу меньше по сравнению с размерностью граней. В этом случае помогает

Следствие 2. *Если* $\dim V = \dim W = 1 + \dim(V \cap W)$, *то для любых двух базисов* $e'_1, ..., e'_n$ *и* $f'_1, ..., f'_n$ *подпространств* V *и* W *угол* φ *между* V *и* W *можно найти по формуле*

$$\cos\varphi = \frac{|\det((f'_i, e'_j))|}{\sqrt{\det((f'_i, f'_j))}\sqrt{\det((e'_i, e'_j))}}.$$

Доказательство. Используем следствие 1. Пусть $e_1, ..., e_n$ и $f_1, ..., f_n$ — ортонормированные базисы подпространств V и W соответственно. Пусть $A = ((f_i, e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ — смешанная матрица Грама. Тогда сингулярные числа матрицы A дают косинусы серии углов между V и W. Ввиду условия на размерности подпространств серия косинусов углов включает $n-1$ единиц, поэтому, ввиду сингулярного разложения $A = Q\Sigma P^{-1}$, где Σ — диагональная матрица с элементами по диагонали $1, \dots, 1, |\det A|$. Отсюда получаем, что оставшийся косинус равен $|\det A|$.

Пусть S и T — матрицы переходов от ортонормированных базисов $e_1, ..., e_n$ и $f_1, ..., f_n$ к данным базисам $e'_1, ..., e'_n$ и $f'_1, ..., f'_n$ соответственно. Тогда $(e'_1, ..., e'_n) = (e_1, ..., e_n)S$, $(f'_1, ..., f'_n) = (f_1, ..., f_n)T$ и

$$(f'_i, e'_j) = (\sum_{k=1}^n t_{ki} f_k, \sum_{k=1}^n s_{kj} e_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n t_{ki}(f_k, e_l)s_{lj}.$$

Поэтому $A' = ((f'_i, e'_j)) = T^*((f_i, e_j))S = T^*AS$, $\det A' = \det T\ \det A\ \det S$. Аналогично

$$(e'_i, e'_j) = (\sum_{k=1}^n s_{ki} e_k, \sum_{k=1}^n s_{kj} e_k) = \sum_{k=1}^n s_{ki}s_{kj}.$$

Отсюда получаем, что $G(e'_1, ..., e'_n) = S^*S$. Тогда

$$\det G(e'_1, ..., e'_n) = \det(S^*S) = \det(S)^2.$$

Поэтому $|\det S| = \sqrt{\det G(e'_1, ..., e'_n)}$.

Другими словами, определитель матрицы перехода от ортонормированного базиса к некоторой системе векторов по модулю равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, а тогда равен корню квадратному из определителя Грама этой системы векторов.

Следовательно,

$$\cos\varphi = |\det A| = |\det(T)|^{-1}|\det(A')||\det(S)|^{-1} = \frac{|\det(A')|}{\sqrt{\det G(f'_1, ..., f'_n)}\sqrt{\det G(e'_1, ..., e'_n)}}.$$

Пример 3. Найдем угол между смежными гранями правильного октаэдра. Реализуем вершины октаэдра в $\mathbb{R}^3$ как центры граней куба $|x_i| \leqslant 1, \quad i = 1, 2, 3$. Достаточно найти угол между гранью, содержащей вершины $(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)$, и гранью, содержащей вершины $(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, -1)$. Эти грани, соответственно, параллельны линейным оболочкам $V = \langle(1, 0, -1), (0, 1, -1)\rangle, \quad W = \langle(1, 0, 1), (0, 1, 1)\rangle$. Как легко видеть, $\dim V = \dim W = 1 + \dim(V \cap W)$. Тогда по формуле из следствия 2

$$\cos\varphi = \frac{|\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|}{\sqrt{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}\sqrt{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, искомый угол равен $\arccos(1/3)$, двугранный угол, содержащий сам октаэдр, очевидно, тупой и равен $\arccos(-1/3)$.

Пример 4. Найдем двугранный угол в правильном n-мерном симплексе $A_0A_1A_2\dots A_n$. Реализуем его как в примере 2. Ввиду симметрии достаточно найти угол между смежными гранями $A_0A_1A_3\dots A_n$ и $A_0A_2A_3\dots A_n$, имеющими пересечение $A_0A_3A_4\dots A_n$. Грань

$A_0A_1A_3\dots A_n$ параллельна линейной оболочке V векторов

$$\begin{array}{rcccl}
e'_1 & = & \overrightarrow{A_0A_1} & = & (-1,1,0,0,\dots,0,0)^\top, \\
e'_2 & = & \overrightarrow{A_0A_3} & = & (-1,0,0,1,\dots,0,0)^\top, \\
\multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
e'_{n-1} & = & \overrightarrow{A_0A_n} & = & (-1,0,0,0\dots,0,1)^\top.
\end{array}$$

Грань $A_0A_2A_3\dots A_n$ параллельна линейной оболочке W векторов

$$\begin{array}{rcccl}
f'_1 & = & \overrightarrow{A_0A_2} & = & (-1,0,1,0,\dots,0,0)^\top, \\
f'_2 & = & \overrightarrow{A_0A_3} & = & (-1,0,0,1,\dots,0,0)^\top, \\
\multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
f'_{n-1} & = & \overrightarrow{A_0A_n} & = & (-1,0,0,0\dots,0,1)^\top.
\end{array}$$

Смешанная матрица Грама имеет порядок $n-1$ и вид

$$((f'_i, e'_j)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Она легко приводится элементарными преобразованиями к треугольному виду, ее определитель равен 1.

Матрицы Грама указанных базисов подпространств V и W имеют порядок $n-1$ и вид

$$((e'_i, e'_j)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Она легко приводится элементарными преобразованиями к треугольному виду, поэтому ее определитель равен n.

По формуле следствия 2 получаем $\cos\varphi = 1/n$. Поэтому, искомый двугранный угол $\varphi = \arccos(1/n)$ и стремится к $\pi/2$ при $\to \infty$.

Литература

[1] Винберг Э.Б. *Курс алгебры*, Университетский учебник, «Факториал Пресс», Москва (2002), С. 554.

[2] Кострикин А.И. *Введение в алгебру т. 2 Линейная алгебра*, Физико-математическая литература, Москва (2000), С. 367.

[3] Артамонов В.А. и др., *Сборник задач по алгебре под редакцией А.И. Кострикина*, т. 1, Физико-математическая литература, Москва (2007), С. 274.

[4] Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре*, 9-е издание, Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний (2005), С. 383.

[5] Мальцев А.И. *Основы линейной алгебры*, Издательство «Наука» Физико-математическая литература, Москва (1975), С. 398.

[6] Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. *Линейная алгебра и геометрия* , Физматлит, Москва (2009), С. 511.

[7] Чуркин В.А. *Жорданова классификация конечномерных линейных операторов*: Методические указания к новому методу построения жордановой базы для линейного оператора. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1991.

[8] Дементьева Н.В., Лисейкин В.Д.,Чуркин В.А.*Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной матрицы решений однородной системы уравнений с использованием корневого базиса:* Учебное псобие, Изд-во НГУ, Новосибирск (2008), С. 49.