Учебный курс
Дифференциальные уравнения
3-й и 4-й семестры
математический факультет

1. Организационно-методический раздел.

1.1. Курс «Диференциальные уравнения» реализуется в рамках направления «Математика», соответствует разделу «Общие математические и естественнонаучные дисциплины» и относится к вузовской тематике.

1.2. **Цели и задачи курса.**

Годовой курс лекций и семинаров по обыкновенным дифференциальным уравнениям предназначен для студентов 2 курса механико-математического факультета. Основной целью освоения этой дисциплины является изучение основных разделов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и получение первоначальных сведений об уравнениях с частными производными первого порядка.

1.3. **Требования к уровню содержания курса.**

По окончании изучения указанной дисциплины студент должен

– иметь представление об основных разделах теории обыкновенных дифференциальных уравнений;
– знать основные теоремы курса обыкновенных дифференциальных уравнений;
– уметь строить решения некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений, решать краевые задачи, исследовать устойчивость решений дифференциальных уравнений, находить решения уравнений с частными производными первого порядка.

1.4. **Формы контроля.**

Итоговый контроль. Для контроля усвоения курса учебным планом предусмотрен экзамен по окончании курса.
Текущий контроль. В течение первого семестра студенты выполняют две контольные работы и сдают зачет в конце семестра. В течение

второго семестра студенты выполняют две контрольные работы и итоговую контрольную работу в конце семестра. Выполнение указанных видов работ является обязательным для всех студентов, а результаты текущего контроля служат основанием для выставления оценок в ведомость контрольной недели на факультете.

2. Содержание дисциплины.

2.1. **Новизна курса.** В предлагаемом курсе излагаются основные разделы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Программа курса соответствует аналогичным курсам, составленным для студентов математических специальностей в ведущих университетах России и других стран. В некоторые разделы курса внесены дополнения, которые отражают последние научные результаты в области обыкновенных дифференциальных уравнений. При изложении ряда разделов целенаправленно используются идеи функционального анализа.

2.2. **Тематический план курса (распределение часов).**

	Наименование разделов и тем	Лекции	Семинары	Лаб. работы	Самост. работа	Всего
		Количество часов				
1	Основные понятия и определения теории обыкновенных дифференциальных уравнений.	2	2			
2	Задача Коши для уравнений и систем произвольного порядка. Теоремы существования и единственности.	8	2			
3	Методы интегрирования простейших обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Понижение порядка.		10			

	Наименование разделов и тем	Лекции	Семинары	Лаб. работы	Самост. работа	Всего
		Количество часов				
4	Свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Зависимость решений от параметров и правой части. Гладкость решений.	4	4			
5	Линейные уравнения. Системы линейных уравнений (общие свойства).	6	4			
6	Линейные уравнения и системы уравнений с постоянными коэффициентами.	4	16			
7	Краевые задачи для линейных уравнений и систем уравнений. Принцип максимума.	12	6			
8	Представление решений рядами. Специальные функции.	6	6			
9	Устойчивость решений. Точки покоя.	12	10			
10	Периодические решения линейных и нелинейных уравнений и систем уравнений.	5	2			
11	Обыкновенные дифференциальные уравнения и математическое моделирование.	2				

	Наименование разделов и тем	Лекции	Семинары	Лаб. работы	Самост. работа	Всего
		Количество часов				
12	Уравнения с частными производными первого порядка.	5	6			
13	Дифференциальные уравнения и функциональный анализ (понятия об операторно-дифференциальных уравнениях; обратные задачи, нелокальные задачи).	2				

2.3. **Содержание отдельных разделов и тем.**

1. Общие понятия, определения. Общее решение и общий интеграл. Интегральные кривые. Поле направлений и геометрическая интерпретация.

2. Задача Коши. Примеры несуществования и неединственности. Корректность задачи. Локальная теорема существования и единственности. Лемма Гронуолла и единственность решений. Теорема Пикара существования и единственности решений. Теорема Пеано существования решений. Теорема Коши существования голоморфного решения для уравнения с голоморфной правой частью. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Теоремы существования и единственности решений задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Методы интегрирования простейших дифференциальных уравнений — уравнений с разделяющимися переменными, однородных дифференциальных уравнений и уравнений, сводящихся к ним, линейных уравнений и уравнений, сводящихся к ним, уравнений в полных дифференциалах и сводящихся к ним. Уравнения Риккати. Уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной. Уравнения высокого порядка. Особые решения.

4. Продолжимые и непродолжимые решения. Гладкость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Зависимость решений от параметров, правой части и начальных условий.
5. Линейные уравнения произвольного порядка. Линейная зависимость и независимость систем функций. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений. Общее решение уравнений с ненулевой правой частью. Метод вариации постоянных. Линейная зависимость и независимость вектор-функций. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений. Общее решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с ненулевым столбцом свободных членов. Метод вариации постоянных.
6. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен. Построение фундаментальной системы решений. Построение частных решений в случае специальной правой части. Метод вариации постоянных. Уравнения, сводящиеся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

   Линейные системы с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен. Построение фундаментальной системы решений методом Эйлера. Матричная экспонента. Построение частных решений в случае столбца свободных членов специального вида. Метод вариации постоянных. Системы не нормального вида.
7. Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка. Задача Штурма-Лиувилля. Функция Грина. Собственные значения и собственные функции. Принцип максимума. Уравнения с колеблющимися решениями.

   Краевые задачи для систем линейных уравнений. Матрица Грина. Условия однозначной разрешимости.
8. Представление решений дифференциальных уравнений рядами. Уравнение Бесселя и функции Бесселя. Краевая задача для функций Бесселя. Гипергеометрическое уравнение Гаусса и гипергеометрические функции. Уравнение Лежандра и функции Лежандра. Присоединенные функции Лежандра.
9. Устойчивость решений дифференциальных уравнений и систем. Асимптотическая устойчивость. Фазовое пространство и фазовые

траектории. Теорема Ляпунова об устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости. Устойчивость решений систем с постоянными коэффициентами. Матричное уравнение Ляпунова. Устойчивость по первому приближению. Точки покоя и их классификация. Фазовые портреты для системы двух дифференциальных уравнений. Автономные системы. Простейшие свойства решений. Виды траекторий. Предельные циклы.

10. Периодические решения нелинейных систем дифференциальных уравнений. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Устойчивость решений линейных систем с периодическими коэффициентами.

11. Обыкновенные дифференциальные уравнения и математическое моделирование. Движение материальной точки. Математические модели биологических систем. Тепловой взрыв. Колебания маятника. Задачи вариационного исчисления.

12. Уравнения с частными производными первого порядка. Функциональная зависимость и независимость систем функций. Характеристики. Первые интегралы. Общий интеграл. Линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка. Задача Коши. Квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка. Задача Коши. Уравнение Гамильтона-Якоби.

13. Дифференциальные уравнения и функциональный анализ. Дифференциально-операторные уравнения в банаховых пространствах. Нелокальные краевые задачи и «нагруженные» уравнения. Дифференциальные уравнения с неизвестными коэффициентами.

2.4. **Контрольные вопросы и задания.**

1. Какие функции называются решением дифференциального уравнения? Общим решением дифференциального уравнения?

2. Какие функции представляют собой решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений? Общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений?

3. Какие функции представляют собой интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений? Общий интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений?

4. Что такое поле направлений?
5. Что представляет собой интегральная кривая обыкновенного дифференциального уравнения?
6. Пусть функция $y(x)$ определяется из соотношения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

   Привести пример обыкновенного дифференциального уравнения, решением которого является эта функция а) первого порядка; б) второго порядка.
7. Построить приближения Пеано (ломаные Эйлера) к решению задачи

$$y' = x - y^2, \quad y(0) = 0,$$

   рассматривая уравнение в квадрате $\{(x, y): \quad |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1\}$ и деля отрезок существования решения последовательно на равные части.
8. При каких a и b функция $f(x, y) = (2 + \cos x)y^{\frac{2}{3}}$ удовлетворяет условию Липшица в полосе $\{(x, y) : -\infty < x < +\infty, \ a \leq y \leq b\}$?
9. Показать, что задача Коши

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0,$$

   имеет бесконечно много решений, определенных на промежутке $[0, +\infty)$.
10. Какие кривые называются траекториями системы обыкновенных дифференциальных уравнений и чем они отличаются от интегральных кривых?
11. Можно ли систему обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящую из уравнений разного порядка, свести к системе, состоящей из обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка?
12. Всегда ли можно систему обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка свести к одному уравнению?
13. Можно ли, зная общее решение обыкновенного дифференциального уравнения, найти решение задачи Коши?

14. Какие решения обыкновенных дифференциальных уравнений называются особыми?
15. Все ли решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными находятся с помощью интегрирования?
16. Могут ли обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка иметь особые решения?
17. Сколько решений имеет задача Коши

$$y' = y^{2012}, \quad y(0) = 0 \quad ?$$

18. Найти кривую, у которой отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.
19. Какие условия обеспечивают единственность решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$?
20. Удовлетворяет ли условию Липшица на отрезке $[-1, 1]$ функция

$$f(y) = \begin{cases} y \ln |y|, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0 \end{cases} \quad ?$$

21. Имеет ли задача Коши

$$y' = y^{\frac{1}{2012}}, \quad y(0) = 0$$

ненулевое решение?
22. Как определяются пикаровские приближения к решению задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad ?$$

На каком промежутке гарантируется сходимость пикаровских приближений к точному решению?
23. Могут ли графики двух решений уравнений
а) $y' = x + \sin y$; б) $y'' = x + \sin y$
пересекаться в точке (1,2) плоскости Oxy ? в какой-либо другой точке?
24. Сколько производных имеет решение уравнения $y' = f(x, y)$, если функция $f(x, y)$ имеет частные производные по переменным x и y до 2012-го порядка включительно?

25. Имеет ли место единственность решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x,y)$, если функция $f(x,y)$ голоморфна на всей плоскости?
26. Пусть $f(x,y)$ есть функция
$$f(x,y) = \begin{cases} 2x, & \textit{если} \quad y \geq x^2, \\ \frac{2y}{x}, & \textit{если} \quad x^2 > y > -x^2, \\ -2x, & \textit{если} \quad y \leq -x^2. \end{cases}$$
Разрешима ли задача Коши
$$y' = f(x,y), \quad y(0) = 0,$$
и, если да, то сколько она имеет решений?
27. Всегда ли задача Коши для уравнения $y' = f(x,y)$ является корректной по Адамару задачей?
28. Какие задачи называются корректными по Адамару?
29. Имеет ли лемма Гронуолла дифференциальную форму? Есть ли у леммы Гронуолла обобщение на нелинейный случай?
30. Имеет ли место теорема существования решения задачи Коши для системы
$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \qquad y_2' = f_2(x, y_1, y_2),$$
если функции $f_1(x, y_1, y_2)$ и $f_2(x, y_1, y_2)$ голоморфны всюду в $\mathbb{R}^3$?
31. Можно ли утверждать, что задача Коши
$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0,$$
всегда имеет решение, определенное лишь на отрезке Пеано?
32. Привести пример задачи Коши, имеющей решение, непродолжимое влево от фиксированной точки x_1 ($x_1 < x_0$, x_0 — начальная точка).
33. В каких случаях имеет место малое изменение решений для задачи Коши для системы
$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \quad y_2' = f_2(x, y_1, y_2)$$
при малом изменении величины $|f_1(x, y_1, y_2) - f_2(x, y_1, y_2)|$ (начальные условия задаются в одной точке).

34. Пусть $y_1(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ есть линейно независимая на интервале (a, b) система функций такая, что ее определитель Вронского существует и нигде на (a, b) не обращается в нуль. Существует ли линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение, для которого данная система является фундаментальной системой решений?

35. Если функции $p_1(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$, $f(x)$ непрерывны на интервале (a, b), то всегда ли задача Коши

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad a < x_0 < b,$$

имеет решение, определенное на всем интервале (a, b)?

36. Существует ли линейное однородное дифференциальное уравнение, фундаментальной системой решений которого являются функции x, x^2 и только они

а) если искомое уравнение имеет только постоянные (действительные) коэффициенты?

б) если искомое уравнение может иметь переменные (действительные) коэффициенты?

37. Каков минимальный порядок линейного обыкновенного дифференциального уравнения, в фундаментальную систему решений которого входят функции x, e^x, $\cos x$, если

а) уравнение имеет постоянные (действительные) коэффициенты?

б) уравнение может иметь переменные (действительные) коэффициенты?

38. Можно ли задачу Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

преобразовать эквивалентным образом в задачу Коши с нулевыми начальными данными?

39. Можно ли линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$$

преобразовать к эквивалентному уравнению, не содержащему первой производной?

40. Если в линейном обыкновенном дифференциальном уравнении

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$$

положить $z(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$ (предполагается, что $y(x) \neq 0$), то какому дифференциальному уравнению будет удовлетворять функция $z(x)$?

41. Следует ли из необращения определителя Вронского системы $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ в нуль линейная независимость этой системы?

42. Доказать, что любое решение уравнения

$$y^{(5)} - y^{(4)} - 9y^{(3)} + y^{(2)} + 20y^{(1)} + 12y = 0$$

однозначно представимо в виде суммы решений уравнений

$$y^{(3)} - y^{(2)} - 5y^{(1)} - 3y = 0,$$

$$y^{(2)} - 4y = 0.$$

43. Можно ли составить линейное дифференциальное уравнение второго порядка, если известны его правая часть $f(x)$ и фундаментальная система решений $\{y_1(x), y_2(x)\}$ соответствующего однородного уравнения?

44. Пусть функция $p(x)$ определена и непрерывна при $x \geq 0$, и пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения уравнения $y'' + p(x)y = 0$, причем $\lim\limits_{x\to+\infty} y_i(x) = 0$, производные $y_i'(x)$, $i = 1, 2$, ограничены при $x \geq 0$. Доказать, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на промежутке $[0, +\infty)$.

45. Что представляет собой формула Остроградского-Лиувилля для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \quad ?$$

46. Можно ли построить фундаментальную систему решений для линейного обыкновенного дифференциального уравнения n–го порядка, зная решения $y_1(x)$, …, $y_{n-1}(x)$?

47. Пусть система $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ линейно независима на интервале (a, b). Будет ли эта система линейно независима на интервале (c, d), если

    а) $a \le c < d \le b$?

    б) $c \le a, \quad d \ge b$?

48. Будет ли система $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ линейно независимых на интервале (a, b) решений уравнения

$$y^{(m)} + p_1(x) y^{(m-1)} + \ldots + p_m(x) y = 0,$$

    где $m \ge n$, линейно независимой на интервале (c, d), если $a \le c < d \le b$?

49. Доказать, что если два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, $x \in (a, b)$, уравнения

$$(p(x) y')' + q(x) y = 0, \quad p(x) \neq 0 \quad \textit{при} \quad x \in (a, b),$$

    имеют общую точку экстремума, то они будут линейно зависимы на (a, b).

50. Можно ли решение задачи

$$y'' + x^2 y' + 2y = \sin x, \quad 0 < x < 1,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

    представить в виде суммы $u(x) + z(x)$ решений следующих задач

$$\begin{cases} u'' + x^2 u' + 2u = \sin x, \\ u(0) = -1, \quad u'(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} z'' + x^2 z' + 2z = 0, \\ z(0) = 1, \quad z'(0) = 1. \end{cases}$$

51. Можно ли уравнение $y'' + x^2 y' - \sin x \cdot y = 0$ свести к уравнению Риккати?

52. Может ли уравнение $y''' + a y' = \cos x$ ($a \neq 0$ — действительное число) иметь частные решения вида

    а) $C e^x \cos x$? б) $C x \cos x$? ($C \neq 0$, $C = \mathrm{const}$).

53. Какие системы вектор-функций называются линейно-независимыми?

54 Что представляет собой определитель Вронского системы вектор-функций? Какие у него свойства?

55. Известно одно решение $\{-\sin x, \cos x\}$ системы

$$y_1' = y_1 \cos^2 x - (1 - \sin x \cos x) y_2,$$
$$y_2' = (1 + \sin x \cos x) y_1 + y_2 \sin^2 x.$$

Найти все решения.

56. Найти все решения системы

$$y_1' = x(1-x)y_1 + (x^3 - x^2 + x + 1)y_2,$$
$$y_2' = (1-x)y_1 + (x^2 - x + 1)y_2,$$

найдя вначале частное решение $(y_{1ч}(x), y_{2ч}(x))$ такое, что $y_{1ч}(x)$, $y_{2ч}(x)$ есть многочлены.

57. Пусть действительные части всех собственных чисел постоянной матрицы A отрицательны, $f(x)$ — непрерывная и ограниченная при $x \in \mathbb{R}$ вектор-функция. Найти ограниченное при $x \in \mathbb{R}$ решение системы $y' = Ay + f(x)$.

58. Составить линейную однородную систему дифференциальных уравнений первого порядка, имеющую следующую фундаментальную систему решений

$$\begin{pmatrix} e^x \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} e^x \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix}.$$

59. Пусть вектор-столбец $Y = Y(x)$ есть решение системы

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y + F(x),$$

вектор-столбец $Z = Z(x)$ есть решение системы

$$\frac{dZ}{dx} = -A^*(x)Z + G(x)$$

($A(x)$ — вещественная $n \times n$ матрица, $A^*(x)$ — транспонированная к ней). Доказать, что выполняется тождество

$$\int\limits_{x_0}^{x} [(F(t), Z(t)) - (Y(t), G(t))]\, dt = (Y(x), Z(x)) - (Y(x_0), Z(x_0))$$

$((\quad,\quad)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$).

60. Пусть $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Доказать, что
$e^{tA} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$.

61. Пусть квадратная матрица второго порядка A имеет собственные значения λ_1, λ_2 и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Доказать, что тогда

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} \cdot E + \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1 E),$$

где E — единичная матрица второго порядка.

62. Пусть квадратная порядка n матрица A имеет собственное значение λ_0 кратности n. Доказать, что тогда

$$e^{tA} = e^{\lambda_0 t} \left[E + \frac{t}{1!}(A - \lambda_0 E) + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda_0 E)^2 + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(A - \lambda_0 E)^{n-1} \right],$$

где E — единичная матрица порядка n.

63. Пусть λ — собственное значение квадратной матрицы A, и пусть h — соответствующий ему собственный вектор A. Доказать, что тогда e^{λ} — собственное значение матрицы e^A, а e^h — соответствующий ему собственный вектор e^A.

64. Пусть $A = (a_{ij})$ — числовая $n \times n$ матрица, $\|A\|$ и $\|A\|_E$ здесь и далее определяются следующим образом

$$\|A\| = \left(\sup_{\|y\|=1} (Ay, Ay) \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Доказать, что выполняются неравенства

$$\|A\| \leq \|A\|_E, \qquad |a_{ij}| \leq \|A\|.$$

65. Доказать неравенство
$$\|e^A\| \le e^{\|A\|}.$$

66. Доказать, что если числовые $n\times n$ матрицы A и B перестановочны, то
$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B.$$

67. Пусть A есть числовая $n\times n$ матрица, $P_1(A)$ и $P_2(A)$ — многочлены от A,
$$P_1(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k, \quad P_2(A) = \sum_{k=0}^{m} b_k A^k.$$
Доказать, что выполняется равенство
$$e^{t(P_1+P_2)} = e^{tP_1} \cdot e^{tP_2}.$$

68. Привести пример матриц A и B таких, что
$$e^{A+B} \ne e^A \cdot e^B.$$

69. Доказать, что для решений $Y(x)$ и $Z(x)$ матричных задач Коши
$$Y' = A(x)Y, \quad Y(0) = E,$$
$$Z' = -ZA(x), \quad Z(0) = E$$
выполняется равенство $Y(x) = Z^{-1}(x)$.

70. При каких действительных параметрах α, β, γ все решения системы
$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -16 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \alpha \sin^2(4x) + \gamma \\ \beta \sin(5x)\cos(3x) \end{pmatrix}$$
ограничены на всей числовой оси?

71. Является ли матрица
$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
фундаментальной для системы
$$y_1' = y_2, \quad y_2' = 0 \quad ?$$

72. Если $W(x)$ есть фундаментальная матрица для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, то для каких числовых матриц A матрица $W(x)\cdot A$ также будет фундаментальной для той же системы?

73. Найти решение задачи Коши
$$xy'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

74. Найти два линейно независимых решения уравнения $y'' + 4xy = 0$.

75. Найти решение уравнения $xy'' - y' - 4x^3 y = 0$, удовлетворяющее условиям $y(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

76. Найти решение уравнения $xy'' - 2y' + 9x^5 y = 0$, удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y'''(0) = 6$.

77. Пусть $p(x)$ и $q(x)$ — заданные при $x \in (a, b)$ функции, $p(x)$ есть непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция такая, что $p(a) = 0$, причем $p(x) = (x - a)\varphi(x)$, $\varphi(x) \neq 0$ при $x > a$. Доказать, что если $y_1(x)$ есть ограниченное при $x \to a+0$ решение уравнения
$$(p(x)y')' + q(x)y = 0,$$
то второе решение $y_2(x)$ этого же уравнения, линейно независимое на (a, b) с $y_1(x)$, будет неограниченным при $x \to a + 0$.

78. Всегда ли функции Бесселя порядков ν и $-\nu$ линейно независимы ($\nu \geq 0$)?

79. Можно ли преобразовать уравнение Лежандра к гипергеометрическому уравнению?

80. Найти два линейно независимых решения гипергеометрического уравнения в окрестности точки $x = 1$, если число $\alpha + \beta + 1 - \gamma$ не является целым положительным числом.

81. Доказать тождества
    а) $F(1, \beta, \beta, x) = \frac{1}{1-x}$;
    б) $xF(1, 1, 2, -x) = \ln(1 + x)$;
    в) $F(\alpha, \beta, \alpha, x) = (1 - x)^{-\beta}$.

82. Найти решение уравнения Лежандра
$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0,$$
удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

83. Доказать, что любое решение уравнения

$$y'' + \left(1 - \frac{\lambda}{x^2}\right) y = 0$$

ограничено при $x \to +\infty$ (λ — действительное число).

84. Доказать, что для функций Бесселя $J_\nu(x)$ имеют место равенства

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \quad \frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

85. Как найти второе линейно независимое решение уравнения Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

в случае $\nu = n$, $n \in \mathbb{N}$?

86. Как определяются классические ортогональные многочлены?

87. Являются ли многочлены Лежандра классическими ортогональными многочленами?

88. Пусть $p(x)$ и $q(x)$ — заданные на отрезке $[a, b]$ функции такие, что $p(x) \in C^1([a, b])$, $q(x) \in C([a, b])$, $p(x) \geq p_0 > 0$ при $x \in [a, b]$. При каких условиях на функцию $q(x)$, числа α_1, α_2, β_1, β_2 краевая задача

$$-\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = 0, \tag{i}$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \tag{ii}$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \tag{iii}$$

имеет только тождественно нулевое решение?

89. Что представляет собой и что дает функция Грина краевой задачи (i)—(iii)?

90. При каких λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) краевая задача

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (0 < x < 1)$$

не имеет решений?

91. При каких действительных α краевая задача

а) $y'' + y' - 6y = 2e^{-t^2}, \quad 2y(0) + \alpha y'(0) = 0, \quad \sup\limits_{t>0} |y(t)| < +\infty;$

б) $y'' - 3y' - 4y = e^{-3t^2}, \quad \alpha y(0) - 3y'(0) = 0, \quad \sup\limits_{t>0} |y(t)| < +\infty$

однозначно разрешима на полуоси $(0, +\infty)$?

92. Сколько существует решений краевой задачи

а) $y''-6y'+10y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(T)-3y(T) = 0 \quad (t \in [0,T])$;

б) $y''-4y'+5y = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(T)-2y(T) = 0 \quad (t \in [0,T])$?

93. Решить краевую задачу

$$(4it - i + 2)y'' + 2(1 - 4t)y' + 8y = (4t + 3 - 2i)e^{-t}, \quad t > 0,$$

$$y(0) = 3, \quad \sup_{t>0} |y(t)| < +\infty.$$

94. Найти все решения задачи

$$3x^2y'' + xy' = 39x^{-\frac{3}{2}}, \quad x > 0,$$

$$3y(1) - y'(1) = -3, \quad y(x) \quad \textit{ограничено при} \quad x \to +\infty.$$

95. Какие оценки решений можно получить с помощью принципа максимума?

96. При каких условиях решения краевой задачи

$$y'' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = A, \quad y(b) = B \quad (x \in [a,b])$$

будут

а) положительны на $[a,b]$?

б) отрицательны на $[a,b]$?

97. Пусть решение $y(x)$ уравнения $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) положительно при малых положительных x и $y(+0) = 0$. Доказать, что точка первого положительного максимума этого решения находится от нуля на расстоянии, которое не меньше n.

98. Пусть $c(x)$ есть непрерывная при $x \geq 0$ функция. Доказать, что если уравнение $y'' + c(x)y = 0$ имеет решение $y(x)$ такое, что $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = +\infty$, то оно имеет также нетривиальное решение, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$.

99. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения

$$y'' + \frac{1}{1+\sqrt{x}}y = 0$$

имеет на интервале $(0, +\infty)$ бесконечное множество нулей.

100. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $y'' - (x-3)^2 y' + (x+1)y = 0$ на интервале $(-\infty, \infty)$ имеет не более шести нулей.

101. Доказать, что решение $J_0(x)$ уравнения Бесселя $xy'' + y' + xy = 0$ при $(0.1, 10)$ имеет не менее трех нулей.

102. Доказать, что решение $J_1(x)$ уравнения Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$ имеет один из нулей на интервале (3,7).

103. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $x^2y'' + 2x^2y' + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right) y = 0$ на интервале $(0, +\infty)$ имеет не более одного нуля.

104. Найти собственные значения и собственные функции задачи

а) $y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1);$

б) $x^2y'' - xy' + y = \lambda y, \quad y(1) = y(2) = 0 \quad (1 < x < 2);$

в) $x^2y'' + 3xy' + y = \lambda y, \quad y(1) = 0, \quad y(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$ $(1 < x < +\infty);$

г) $y'' = \lambda y, \quad y(x) = O(1)$ *при* $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty.$

105. Доказать, что любое действительное число λ является собственным значением задачи

$$y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(1), \quad y'(0) = -y'(1).$$

106. Пусть $q(x)$ есть заданная непрерывная неотрицательная при $x \in [0, 1]$ функция, α и β — заданные числа. Доказать, что для краевой задачи

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < 1,$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = y(1)\cos\beta + y'(1)\sin\beta = 0$$

а) собственные значения действительны;

б) собственные функции, отвечающие различным собственным числам λ_1 и λ_2, ортогональны в $L_2(0, 1)$:

$$\int\limits_0^1 y(x, \lambda_1) \cdot y(x, \lambda_2)\, dx = 0.$$

107. Пусть $q(x)$ и $f(x)$ — заданные непрерывные на $[0,1]$ функции, $q(x) \geq 0$, α, β — заданные действительные числа. Доказать, что краевая задача

$$-y'' + q(x)y = \lambda y + f(x), \quad 0 < x < 1,$$
$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = y(1)\cos\beta + y'(1)\sin\beta = 0$$

а) если λ не является ее собственным значением, она разрешима, причем решение существует ровно одно;

б) если λ является ее собственным значением, $y(x,\lambda)$ есть соответствующая собственная функция, то она разрешима если и только если выполняется условие

$$\int\limits_0^1 f(x)y(x,\lambda)\,dx = 0.$$

108. Доказать, что для собственных функций задачи

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0 \quad (0 < x < \pi)$$

имеют место свойства

а) n–я собственная функция имеет на отрезке $[0,\pi]$ ровно n нулей;

б) между нулями n–й собственной функции имеется нуль $(n+1)$–й собственной функции.

109. Пусть $q(x)$ есть заданная непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция такая, что

$$\max_{a \leq x \leq b} q(x) = q^* > 0.$$

Доказать, что краевая задача

$$y'' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = A, \quad y(b) = B \quad (a \leq x \leq b)$$

имеет единственное решение для любой непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$, если выполняется условие $\sqrt{q^*}(b-a) < \pi$.

110. Пусть на множестве $Q = \{0 \leq x \leq 1, \quad |y| < +\infty\}$ функции $f(x,y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны, причем на Q выполняется неравенство $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \geq 0$. Доказать, что граничная задача

$$y'' = f(x,y), \quad y(0) = y(1) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

не может иметь более одного решения.

111. Пусть $y(x)$ есть решение уравнения

$$y'' = f(x, y, y') \quad \textit{npu} \quad x \in (0, 1)$$

такое, что $y(x) \in C^2((0,1)) \cap C([0,1])$, и пусть функция $f(x, \xi, \eta)$ имеет ограниченные на любом множестве $\{(x, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^3 : \quad |\xi| \leq K_1, \quad |\eta| \leq K_2\}$ производные. Доказать, что при выполнении условия

$$\operatorname{sign} \xi \cdot f(x, \xi, 0) \leq 0 \quad \textit{npu} \quad |\xi| > M$$

для функции $y(x)$ выполняется оценка

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |y(x)| \leq \max\{M, |y(0)|, |y(1)|\}.$$

112. Пусть $q(x)$ — заданная непрерывная положительная на отрезке $[0, 1]$ функция, $h_1(\xi)$ и $h_2(\xi)$ — заданные функции такие, что $\xi h_1(\xi) \geq 0$, $\xi h_2(\xi) \leq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}$. Доказать, что краевая задача

$$-y'' + q(x)y = 0, \quad x \in (0, 1),$$
$$y'(0) = h_1(y(0)), \quad y'(1) = h_2(y(1))$$

не может иметь более одного решения.

113. Найти решение уравнения $\varepsilon y'' + y = 1$, имеющее предел при $\varepsilon \to +\infty$.

114. Найти решение уравнения

$$y' = y(\alpha(x))$$

в случаях

а) $\alpha(x) = A - x, \quad A = const$;

б) $\alpha(x) = \frac{k}{x}, \quad k = const.$

115. Пусть функция $p(x)$ определена и непрерывна при $x \geq 0$, и пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения уравнения $y'' + p(x)y = 0$, причем $\lim\limits_{x \to +\infty} y_i(x) = 0$, производные $y_i'(x)$ ограничены при $x \geq 0$, $i = 1, 2$. Доказать, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы при $x \geq 0$.

116. Имеет ли уравнение $y'' + y = \cos 2x$ периодическое решение?

117. Найти периодическое решение уравнения

а) $y'' - y = |\sin x|$;

б) $y'' + 9y = \sin^2 x$.

118. Если в уравнении

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье, то в каком случае это уравнение не имеет периодических решений?

119. Доказать, что уравнение $y' = ky + f(x)$, $k = const \neq 0$, $f(x)$ — непрерывная и периодическая функция, имеет только одно периодическое решение.

120. Как можно ввести понятия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости

а) для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)});$$

б) для системы уравнений

$$Y^{(n)} = A(t)Y + F(t) \quad ?$$

121. Существуют ли понятия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости "назад" (т.е. при $t \to -\infty$)? Приведите примеры уравнений, у которых решения устойчивы, асимптотически устойчивы и соответственно неустойчивы при $t \to -\infty$.

122. Существуют ли уравнения, у которых решения одновременно устойчивы как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$?

123. Может ли неограниченное на полуоси $[0, +\infty)$ решение дифференциального уравнения первого порядка быть устойчивым?

124. Как определяются траектории системы

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = xy \quad ?$$

125. Доказать, что все решения линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t)$$

устойчивы или неустойчивы одновременно.

126. Доказать, что если выполняются условия $f(0) = 0$, $\xi f(\xi) > 0$ при $\xi \neq 0$, то нулевое решение уравнения $y'' + f(y) = 0$ будет устойчивым.

127. Доказать, что для устойчивости решений уравнения $x' = a(t)x$, где $a(t)$ — непрерывная на полуоси $[0, +\infty)$ функция, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau < +\infty.$$

128. Доказать, что если нулевое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

устойчиво, то устойчивым будет и нулевое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = (A + B(t))x$$

при условии, что $\int\limits_0^\infty \|B(t)\|\, dt < +\infty$.

129. Доказать, что при выполнении условий $\alpha < 0$, $2\alpha < \beta < -\alpha$ нулевое решение системы

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= \alpha x - \cos y + e^{\beta z}; \\ \tfrac{dy}{dt} &= \beta \sin x + \ln(1 + \alpha y) - xz^2; \\ \tfrac{dz}{dt} &= x^2 \cos z + \beta y + \sin \alpha z \end{aligned}$$

асимптотически устойчиво.

130. Исследовать на устойчивость положения равновесия маятника, движение которого описывается уравнением $x'' + k \sin x = 0$.

131. Определить тип положений равновесия системы

а) $\frac{dx}{dt} = x(x + y - 2)$, $\quad \frac{dy}{dt} = y(1 - x)$;

б) $\frac{dx}{dt} = 2xy$, $\quad \frac{dy}{dt} = 1 + y - x^2 + y^2$;

в) $\frac{dx}{dt} = \sin x$, $\quad \frac{dy}{dt} = \sin y$;

г) $\frac{dx}{dt} = \sin y$, $\quad \frac{dy}{dt} = -\sin x$.

132. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

а) $\frac{dx}{dt} = -xy^4, \quad \frac{dy}{dt} = x^4 y;$

б) $\frac{dx}{dt} = y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y^3;$

в) $\frac{dx}{dt} = y + x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x + y^3.$

133. Доказать, что если функция Ляпунова $V(x)$ системы $\frac{dx}{dt} = f(x)$ $(x = (x_1, \ldots, x_n),\ f = (f_1, \ldots, f_n),\ f(0) = 0)$ определяет асимптотическую устойчивость нулевого решения, то она же определяет неустойчивость нулевого решения системы $\frac{dx}{dt} = -f(x)$.

134. Какие типы траекторий возможны у автономной системы?

135. Как определяются

– предельные точки траекторий автономных систем?

– предельные множества траекторий автономных систем?

– предельные циклы автономных систем?

136. Является ли предельное множество автономной системы замкнутым?

137. Состоит ли предельное множество автономной системы из целых траекторий?

138. В каком случае предельное множество автономной системы состоит из одной точки?

139. Проверить, что функции $u_1(x,y,z) = \frac{1}{x}(x^2+y^2+z^2)$, $u_2(x,y,z) = \frac{y}{x}$ являются независимыми первыми интегралами системы

$$\frac{dx}{dt} = 2xz, \quad \frac{dy}{dt} = 2yz, \quad \frac{dz}{dt} = z^2 - x^2 - y^2 \quad \textit{при} \quad x > 0, \quad y > 0.$$

140. В указанной области найти общее решение системы

а) $\frac{dx}{dt} = -x^2, \quad \frac{dy}{dt} = xy - 2z^2, \quad \frac{dz}{dt} = xz, \quad x > 0, \quad z > 0;$

б) $\frac{dx}{dt} = x^2 + y^2, \quad \frac{dy}{dt} = y(z - x), \quad \frac{dz}{dt} = 2xz, \quad x > z > 0, \quad y > 0.$

141. В каком случае функции $g_1(x), \ldots, g_m(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, образуют функционально зависимую систему на множестве Ω? функционально независимую систему на множестве Ω?

142. Может ли система

$$y' = f(x,y) \quad (y = (y_1, \ldots, y_n), \quad f = (f_1, \ldots, f_n))$$

иметь более n независимых первых интегралов?

143. Как определяются характеристики линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка?

144. Можно ли задачу Коши для дифференциального уравнения с частными производными первого порядка с условием на произвольной поверхности свести к задаче Коши с условием на плоскости?

145. Какие поверхности называются нехарактеристическими (по отношению к дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка)?

146. Как определяется общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка?

147. Как определяется общее решение квазилинейного неоднородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка?

148. Найти общее решение уравнения и решение задачи Коши

а) $xy^3\frac{\partial u}{\partial x} + x^2y^2\frac{\partial u}{\partial y} + y^3z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = y^4 \quad$ при $\quad xz^3 = 1;$

б) $x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + (x^2y + z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = x^3 \quad$ при $\quad z = x;$

в) $(z - y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x - z)\frac{\partial z}{\partial y} = y - x, \quad z = y \quad$ при $\quad x = 1;$

г) $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} + x^2 + y^2 = 0, \quad z = y \quad$ при $\quad x = 1;$

д) $2x^3\frac{\partial z}{\partial x} + y(2x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial y} = 1 + z^2, \quad$ если $y = \operatorname{arctg} z \quad$ при $\quad x = 1.$

149. Определить функцию $z = z(x, y)$, удовлетворяющую одновременно двум уравнениям

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y^2}{x^2 + y^2}.$$

150. Определить функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую одновременно двум уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3 = 2(x - y)^3.$$

151. Найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$x + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

такое, что $u = x$ при $y = 0$.

152. Найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

для которого выполняется $u = x$ при $y = 1$.

153. Найти решение уравнения

$$\left(1 + \sqrt{z - x - y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

такое, что $z = x$ при $y = 0$. Почему эта задача имеет два различных решения (какие?)?

154. Какие задачи называются нелокальными?

155. При каких действительных числах α, β, γ нелокальная задача
$y'' + a(x)y = 0, \quad 0 < x < 1,$
$y(0) = \alpha y(x_0), \quad 0 < x_0 \leq 1,$
$y'(0) = \beta y'(x_1) + \gamma y(x_2), \quad 0 < x_1 \leq 1, \quad 0 < x_2 \leq 1,$
имеет только нулевое решение?

156. Зная фундаментальную систему для уравнения $y'' + a(x)y = 0$ $(x \in (0, 1))$, построить решение нелокальной задачи
$y'' + a(x)y = f(x),$
$y(0) = \alpha y(x_0), \quad y'(0) = \beta y'(x_1)$
$(0 < x_0 \leq 1, \quad 0 < x_1 \leq 1).$
Всегда ли разрешима эта задача?

157. При каких действительных числах α и β нелокальная задача
$y'' - \mu^2 y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad \mu = const > 0,$
$y(0) = \alpha y(1), \quad y'(1) = \beta y'(0)$
имеет только нулевое решение?

158. Построить решение нелокальной задачи
$y'' - \mu^2 y = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad \mu = const > 0,$
$y(0) = \alpha y(1), \quad y'(1) = \beta y'(0).$
Всегда ли разрешима эта задача?

159. Какие задачи называются обратными?

160. Зная фундаментальную систему решений для уравнения $y'' + a(x)y = 0 \quad (x \in (0,1))$, найти решение $(y(x), \lambda)$ обратной задачи
$y'' + a(x)y = f(x) + \lambda g(x),$
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
($f(x)$ и $g(x)$ — заданные дифференцируемые на $[0,1]$ функции, $g(1) \neq 0$).

161. Что представляют собой операторно-дифференциальные уравнения?

162. Как ставятся простейшие задачи вариационного исчисления в пространствах функций от одной переменной?

163. Как связаны простейшие задачи вариационного исчисления в пространствах функций от одной переменной и обыкновенные дифференциальные уравнения?

Контрольные вопросы соответствуют теоретической части учебного курса. Каждый вопрос предполагает развернутый обоснованный точными формулировками и доказательствами ответ.

3. Учебно-методическое обеспечение дисциплины. Основная литература.

1. Конспекты лекций.

2. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1963.

5. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000.

6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука.

7. Романко В.К. и др. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2006.

8. Годунов С.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Краевые задачи. Новосибирск: НГУ, 1994.

Дополнительная литература.

1. Хартман А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

3. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит, 2005.

4. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: URSS, 2007.

5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Высшая школа, 1978.

6. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.

7. Аносов Д.В. Дифференциальные уравнения. То решаем, то рисуем. М.: МЦ НМО, 2008.

Изучение дисциплины не предусматривает использование нормативно–правовых актов.

Программу составил
доктор физико-математических наук
профессор А.И. Кожанов