ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лектор: профессор С.И. Фадеев

3 - 4 семестры

1. Однородные линейные системы уравнений с постоянными коэффициентами. Векторная и матричная запись. Спектральная норма матрицы и некоторые неравенства, связанные с определением нормы. Краткие сведения о функциональных рядах, признак равномерной сходимости Вейерштрасса. Задача Коши. Представление решения в виде ряда Тейлора. Существование, единственность решения и непрерывная зависимость от параметров задачи. Определение матричной экспоненты в виде ряда Тейлора.

2. Однородные линейные системы уравнений с переменными коэффициентами. Задача Коши. Теорема существования и единственности. Задача Коши для однородного линейного уравнения высокого порядка с переменными коэффициентами. Сведение к однородной системе уравнений.

3. Пространство решений однородной линейной системы уравнений. Теорема о базисе решений. Фундаментальная система решений (Ф.С.Р.) и фундаментальная матрица решений (Ф.М.Р.). Определитель Вронского. Теорема Остроградского-Лиувилля. Ф.С.Р. и Ф.М.Р. однородного линейного уравнения высокого порядка. Ф.С.Р. и Ф.М.Р. в случае постоянных коэффициентов. Вычисление матричной экспоненты с помощью приведения матриц к жордановой форме. Пример, иллюстрирующий отсутствие непрерывной зависимости жордановой формы от компонент исходной матрицы.

4. Ф.С.Р. однородного линейного уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами, непрерывно зависящие от параметров. Свойства функций, образующих Ф.С.Р. специального вида, используемых в полиномиальном представлении матричной экспоненты. Описание Ф.С.Р. общего вида для линейного уравнения высокого порядка. Представление матричной экспоненты в виде матричного полинома. Свойства матричной экспоненты и оценки ее нормы. Лемма Гельфанда-Шилова.

5. Неоднородные линейные системы уравнений с переменными коэффициентами. Вывод формулы Коши с помощью метода Лагранжа. Существование и единственность решения задачи Коши. Априорная оценка нормы решения. Непрерывная зависимость решения от параметров задачи. Задача Коши для неоднородного линейного уравнения высокого порядка с переменными коэффициентами. Формула Коши. Представление решения задачи Коши в случае постоянных коэффициентов.

6. Краевая задача на числовой прямой для линейных систем уравнений с постоянными коэффициентами. Существование и единственность ограниченного решения. Матричная функция Грина и ее свойства. Краевая задача для линейных уравнений высокого порядка. Функция Грина и ее свойства. Краевые задачи на полупрямой для линейных систем уравнений и уравнений высокого порядка с постоянными коэффициентами. Условие Лопатинского.

7. Линейные краевые задачи на интервале для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Условия однозначной разрешимости. Матричная функция Грина и ее свойства. Линейные краевые задачи для уравнений высокого порядка. Функция Грина и ее свойства. Функция Грина краевой задачи в случае уравнения 2-го порядка. Собственные значения и собственные функции краевой задачи для системы уравнений. Задача Штурма-Лиувилля, свойства собственных значений и собственных функции. Непрерывная зависимость решения краевой задачи от параметров. Различные типы краевых условий. Периодические решения краевой задачи с периодическими коэффициентами. Построение решения краевой задачи методом стрельбы и проблема сплющивания базисных решений. Метод ортогональных прогонок С.К. Годунова.

8. Задача Коши для систем нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Лемма Адамара. Локальная теорема существования и единственности Пикара. Теорема существования Пеано, пример, иллюстрирующий неединственность решения задачи Коши. Критерий Ляпунова существования решения в целом для автономных систем. Непрерывная зависимость решений задачи Коши для систем нелинейных дифференциальных уравнений от параметров и начальных значений. Дифференцируемость решений, уравнения в вариациях Пуанкаре. Примеры. Случай векторного параметра. Дифференцируемость по комплексному параметру.

9. Устойчивость по Ляпунову решений дифференциальных уравнений. Определения устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости. Критерий устойчивости нулевого решения линейной однородной системы уравнений с постоянной матрицей по спектру матрицы. Устойчивость решений систем однородных уравнений с периодическими коэффициентами, теория Флоке-Ляпунова. Матрицант, и его свойства. Матрица монодромии. Теорема о приводимости системы к системе с постоянной матрицей, характеристические показатели. Примеры исследования на устойчивость простейших систем с периодическими коэффициентами. Качели. Параметрический резонанс. Матричное уравнение Ляпунова, разрешимость, свойства решения. Интегральное представление решения. Критерий асимптотической устойчивости по Годунову-Булгакову. Функции Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости положения равновесия автономных систем. Теорема Ляпунова и Четаева о неустойчивости. Теоремы об устойчивости и неустойчивости по первому приближению. Примеры.

10. Первые интегралы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнения в частных производных первого порядка. Независимые первые интегралы. Линейные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристики. Однозначная разрешимость задачи Коши. Примеры. Вывод формулы Даламбера. Квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка. Однозначная разрешимость задачи Коши. Система квазилинейных уравнений первого порядка. Уравнение Гамильтона-Якоби. Уравнение эйконала.

Литература

1. Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1974.
2. Аткинсон.Ф. *Дискретные и непрерывные граничные задачи*. М.: Мир, 1968.
3. Бибиков Ю.Н. *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Высшая школа, 1991.
4. Годунов С.К. *Конспект лекций по курсу "Обыкновенные дифференциальные уравнения", для студентов НГУ*.
5. Годунов С.К. *Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами*. Т. 1: Краевые задачи. Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 1994.
6. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.
7. Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1982.

Программа практических занятий

1. Решение однородных систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами ([1], пар. 14; [2], пар. 1, 4).
2. Матричная экспонента ([1], пар. 14; [2], пар. 1).
3. Решение уравнений высокого порядка с постоянными коэффициентами ([1], пар. 11; [2], пар. 1).
4. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных ([1], пар. 11, 14; [2], пар. 1).
5. Линейные уравнения с переменными коэффициентами ([1], пар. 5, 12).
6. Краевые задачи для дифференциальных уравнений. Задача Штурма-Лиувилля ([1], пар. 13; [2], пар. 2).
7. Уравнения Бесселя и Лежандра. Свойства решений ([1], пар. 12).
8. Нелинейные дифференциальные уравнения. Некоторые приемы интегрирования ([1], пар. 2, 4, 6).
9. Зависимость решений от параметров ([1], пар. 18).
10. Классификация особых точек автономных систем двух дифференциальных уравнений ([1], пар. 16, 17).
11. Устойчивость решений по Ляпунову ([1], пар. 15; [2], пар. 3).
12. Уравнения в частных производных первого порядка ([1], пар. 19, 20).

Литература

1. Филиппов А.Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*. М.: Наука, 1992.
2. Годунов С.К. и др. *Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. НГУ, 1986.