МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Лекторы: проф. Б. И. Квасов, проф. Г. С. Хакимзянов

5 – 6 семестры

1. Математические модели и вычислительный эксперимент. Классификация уравнений математической физики. Примеры корректных постановок задач для различных типов уравнений. Математические модели, численные методы и вычислительный эксперимент.

2. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Метод степенных рядов. Метод Эйлера. Глобальная погрешность метода Эйлера. Модифицированный метод Эйлера. Одношаговые методы. Методы Рунге – Кутты. Многошаговые методы. Явные методы Адамса. Достоинства и недостатки явных методов Адамса в сравнении с методами Рунге – Кутты. Неявные методы Адамса. Реализация неявного метода Адамса 4-го порядка с помощью итерационного метода прогноза – коррекции, сходимость итераций. Конечно-разностные методы. Сетки и сеточные функции. Различные способы приближения первой производной. Оператор проектирования. Локальная аппроксимация дифференциального оператора разностным оператором. Метод неопределенных коэффициентов. Аппроксимация дифференциальной задачи разностной схемой. Порядок аппроксимации. Устойчивость разностной схемы. Сходимость и точность разностной схемы. Теорема Лакса. Каноническая форма разностной схемы. Достаточный признак устойчивости линейной разностной схемы. Необходимый признак устойчивости линейной разностной схемы. Теорема о необходимом спектральном признаке ограниченности норм степеней оператора перехода. Представление решений разностных задач для однородных разностных уравнений первого и второго порядков. Необходимый признак устойчивости разностной схемы с постоянными коэффициентами, основанный на исследовании корней характеристического уравнения. Оценки постоянной, входящей в условие устойчивости. Исследование устойчивости нелинейных разностных схем. Численное решение жестких систем дифференциальных уравнений. Выбор шага интегрирования.

3. Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Метод стрельбы. Пример вычислительной неустойчивости метода стрельбы. Конечно-разностные методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. Теорема об устойчивости линейной разностной схемы с разностным уравнением второго порядка. Принцип максимума. Лемма о мажоранте для решения разностной задачи. Теорема о сходимости разностной схемы, аппроксимирующей краевую задачу для ОДУ второго порядка. Разностный метод решения нелинейных краевых задач. Теорема о достаточном условии сходимости нелинейной разностной схемы. Метод последовательных приближений для решения нелинейных разностных задач. Метод адаптивных сеток.

4. Математический аппарат теории разностных схем. Скалярные произведения и нормы пространств сеточных функций. Формулы разностного дифференцирования и суммирования по частям. Первая и вторая разностные формулы Грина. Неравенство Коши – Буняковского и ε - неравенство. Сеточные теоремы вложения. Нижняя и верхняя оценки нормы $\|y_x\|$. Разностная задача на собственные значения. Собственные значения и собственные функции оператора второй разностной производной. Оценки собственных значений. Ортонормированность системы собственных функций. Разложение сеточной функции в конечный ряд Фурье. Сеточный аналог равенства Парсеваля. Самосопряженность и положительная определенность оператора второй разностной производной. Свойства оператора второй разностной производной с переменным коэффициентом. Метод энергетических неравенств и метод операторных неравенств получения априорных оценок решений разностных схем. Использование оценок для доказательства сходимости схем в среднеквадратичной и равномерной нормах. Сходимость в среднем и равномерная сходимость разностной схемы для стационарного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.

5. Проекционные методы (на примере краевых задач для ОДУ). Метод Галеркина. Метод Ритца. Метод наименьших квадратов. Метод коллокации. Метод конечных элементов.

6. Разностные схемы для уравнений параболического типа. Уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами. Двухслойная схема с весом. Порядок аппроксимации при различных значениях весового параметра. Устойчивость двухслойных схем по начальным данным и по правой части. Принцип максимума. Теорема об устойчивости в равномерной норме линейной разностной схемы, удовлетворяющей принципу максимума. Примеры условно и абсолютно устойчивых схем. Спектральный признак устойчивости разностных схем. Принцип замороженных коэффициентов. Метод разделения переменных с представлением решения в виде конечного ряда Фурье. Применение метода Фурье при исследовании устойчивости разностных схем для одномерного уравнения теплопроводности. Метод энергетических неравенств. Теорема о сходимости схемы с весами в равномерной норме. Каноническая форма двухслойных схем. Метод операторных неравенств. Теорема о необходимом и достаточном условии устойчивости по начальным данным в пространстве H_A. Необходимое и достаточное условие устойчивости схемы с весами. Консервативная схема для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. Интегро - интерполяционный метод получения разностных уравнений. Теорема об устойчивости консервативной схемы. Дивергентные схемы. Лемма о неконсервативности недивергентной схемы. Трехслойные схемы для уравнения теплопроводности. Понятие условной аппроксимации. Способы задания дополнительного начального условия для трехслойных схем. Схемы для параболических уравнений с несколькими пространственными переменными. Свойства двумерного разностного оператора Лапласа Λ. Самосопряженность и положительная определенность оператора $A = -\Lambda$. Устойчивость в среднеквадратичной норме схем для многомерного уравнения теплопроводности. Необходимое и достаточное условие устойчивости в H_A схемы с весами для двумерного уравнения теплопроводности. Экономичные разностные схемы. Схема приближенной факторизации (СПФ). Устойчивость и порядок аппроксимации СПФ. Реализация СПФ для двумерной задачи методом дробных шагов. Граничные условия для вспомогательных функций. Экономичность СПФ. Выполнение для СПФ свойства полной аппроксимации. Обобщение на трехмерный случай. Схема переменных направлений (СПН). Экономичность СПН. Погрешность аппроксимации и устойчивость СПН. Граничные значения промежуточного решения. Обобщение СПН на трехмерный случай.

7. Численные методы решения задач для уравнений эллиптического типа. Конечно-разностные схемы на равномерной сетке для уравнения Пуассона. Аппроксимация. Принцип максимума. Устойчивость. Сходимость. Итерационные методы решения систем разностных уравнений. Понятие о методе установления для решения стационарных задач. Сходимость явного метода простой итерации и итерационного метода переменных направлений. Оптимальное значение итерационного параметра. Оценка минимального количества шагов итерационного метода для получения заданной относительной погрешности. Попеременно-треугольный итерационный метод. Конечно-разностные схемы на неравномерной сетке для многомерного уравнения Пуассона. Уравнения для координат узлов неравномерной сетки. Метод конечных элементов. Симплициальное разбиение области. Определение конечного элемента. Построение сеточных уравнений.

8. Разностные схемы для уравнений гиперболического типа. Определения гиперболической системы уравнений и ее характеристик. Задача Коши и начально-краевая задача для гиперболической системы уравнений. Инварианты Римана. Начально-краевая задача для волнового уравнения. Явная противопоточная схема, схема Лакса и схема Лакса – Вендроффа для уравнения переноса. Схема "крест" и трехслойная неявная схема с весами для волнового уравнения. Дифференциальное представление разностной схемы. П-форма дифференциального представления. Первое дифференциальное приближение разностной схемы. Аппроксимационная вязкость, численная диссипация и численная дисперсия разностной схемы. Разностные схемы, сохраняющие монотонность. Необходимое и достаточное условие сохранения монотонности. Нелинейное уравнение переноса. Механизм возникновения разрывов. Расчет разрывных решений. Консервативная разностная схема. Схема С.К. Годунова. TVD-схемы. Схема предиктор-корректор на подвижной сетке. Разностные схемы для гиперболической системы уравнений. Разностные схемы для двумерного уравнения переноса.

Темы семинарских занятий

1. Метод степенных рядов и метод Эйлера для ОДУ.

2. Локальная и глобальная погрешность численных методов для ОДУ.

3. Методы Рунге – Кутта и Адамса. Правило Рунге контроля локальной погрешности одношаговых методов.

4. Конечно-разностные методы. Равномерные и неравномерные сетки. Метод неопределенных коэффициентов. Погрешность аппроксимации дифференциального оператора и дифференциального уравнения.

5. Конечно-разностная аппроксимация дифференциальной задачи.

6. Каноническая форма разностной схемы. Достаточные условия устойчивости и сходимость разностной схемы.

7. Необходимые условия устойчивости разностной схемы. Оценки снизу и сверху постоянной, входящей в условие устойчивости.

8. Представление решений разностных задач Коши для однородных разностных уравнений первого и второго порядков с постоянными коэффициентами. Оценка точности численного решения.

9. Исследование устойчивости нелинейных разностных схем, аппроксимирующих задачу Коши для ОДУ.

10. Численное решение задачи Коши для жесткой системы ОДУ.

11. Собственные значения и собственные функции операторов разностных краевых задач для ОДУ.

12. Метод Фурье для решения разностных краевых задач для ОДУ.

13. Метод операторных неравенств получения априорных оценок решений разностных схем. Использование априорных оценок для доказательства сходимости схем в среднеквадратичной и равномерной нормах.

14. Метод адаптивных сеток для решения краевых задач для ОДУ.

15. Метод конечных элементов для решения краевых задач для ОДУ.

16. Порядок аппроксимации одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами.

17. Конечно-разностная аппроксимация начально-краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности.

18. Конечно-разностная аппроксимация начально-краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Интегро-интерполяционный метод.

19. Консервативные схемы.

20. Спектральный метод Неймана исследования устойчивости разностных схем для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами.

21. Принцип максимума для исследования устойчивости разностных задач для уравнения теплопроводности.

22. Исследование устойчивости разностных схем методом операторных неравенств.

23. Решение разностных задач методом Фурье.

24. Экономичные разностные схемы для параболических уравнений с несколькими пространственными переменными. Аппроксимация, устойчивость, сходимость, реализация.

25. Конечно-разностные схемы численного решения краевых задач для уравнения Пуассона.

26. Свойство полной аппроксимации. Метод установления. Итерационные методы решения разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

27. Порядок аппроксимации разностных схем для уравнения переноса.

28. Исследование устойчивости разностных схем для уравнений гиперболического типа. Принцип максимума, спектральный метод Неймана.

29. Первое дифференциальное приближение разностных схем для уравнения переноса с постоянным коэффициентом.

30. Схемы для расчета разрывных решений. Консервативная разностная схема для нелинейного уравнения переноса. Схема С.К. Годунова.

31. Схемы, сохраняющие монотонность. TVD-схемы.

32. Разностные схемы для гиперболической системы уравнений.

Темы практических занятий на ЭВМ

1. Одношаговые и многошаговые методы решения задачи Коши для ОДУ и систем ОДУ.

2. Метод стрельбы и конечно-разностные методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка.

3. Метод адаптивных сеток и метод конечных элементов решения краевых задач для ОДУ второго порядка.

4. Разностные схемы решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной.

5. Итерационные методы решения разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

6. Конечно-разностные схемы для уравнений гиперболического типа и гиперболических систем уравнений первого порядка.

Литература

1. Ахмеров Р. Р. *Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений* /Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1994.
2. Бахвалов Н. С. *Численные методы.* М.: Наука, 1975.
3. Годунов С. К., Рябенький В. С. *Разностные схемы.* М.: Наука, 1973.
4. Дробышевич В. И., Дымников В. П., Ривин Г. С. *Задачи по вычислительной математике.* М.: Наука, 1980.
5. Зенкевич О., Морган К. *Конечные элементы и аппроксимация.* М.: Мир, 1986.
6. Коробицына Ж. Л., Хакимзянов Г. С. *Практикум на ЭВМ по курсу "Методы вычислений"* /Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1995. Ч. 1.
7. Лаевский Ю. М. *Метод конечных элементов (основы теории, задачи)* /Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1999.
8. Лебедев А. С., Черный С. Г. *Практикум по численному решению уравнений в частных производных* /Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2000.
9. Марчук Г. И. *Методы вычислительной математики.* М.: Наука, 1980.
10. Марчук Г. И., Агошков В. И. *Введение в проекционно-сеточные методы*. М.: Наука, 1981.
11. Михайлов А. П. *Задания вычислительного практикума на ЭВМ* /Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1998.
12. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1977.
13. Самарский А. А. *Введение в численные методы*. М.: Наука, 1982.
14. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем*. М.: Наука, 1973.
15. Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей*. М.: Мир, 1991.
16. Шокин Ю. И., Хакимзянов Г. С. *Введение в метод дифференциального приближения* /Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1997.