П Р О Г Р А М М А

курса лекций «Численные методы анализа и линейной алгебры»
3 семестр обучения ММФ НГУ, II поток, лектор С.П. Шарый
2012–2013 учебный год

1. Задачи интерполирования и приближения функций. Алгебраическая интерполяция. Существование и единственность решения задачи алгебраической интерполяции. Интерполяционный полином Лагранжа.
2. Разделённые разности и их свойства. Интерполяционный полином Ньютона.
3. Оценка погрешности алгебраической интерполяции с простыми узлами.
4. Полиномы Чебышёва, их свойства и применение в интерполировании.
5. Задача алгебраической интерполяции с кратными узлами, существование и единственность её решения. Оценка погрешности алгебраической интерполяции с кратными узлами.
6. Численное дифференцирование, различные подходы к получению формул численного дифференцирования. Примеры разностных формул для первых и вторых производных.
7. Примеры разностных формул для первых и вторых производных. Оценка погрешности формул численного дифференцирования и поведение полной погрешности.
8. Теорема Вейерштрасса. Понятие интерполяционного процесса и его сходимости. Пример Рунге. Теорема Фабера. Теорема Марцинкевича.
9. Понятие о сплайне. Степень сплайна, его дефект. Интерполяционный кубический сплайн и его построение.
10. Задача приближения функций. Наилучшее приближение в евклидовом пространстве. Метод наименьших квадратов. Выбор базисных функций в методе наименьших квадратов.
11. Полиномы Лежандра, их свойства и применение в задачах приближения.
12. Численное интегрирование, квадратурная формула и её остаточный член. Интерполяционные квадратурные формулы, формулы Ньютона-Котеса. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций. Оценка их погрешности.

13. Квадратурная формула Симпсона, оценка её погрешности. Составные квадратурные формулы, их погрешность.
14. Алгебраическая степень точности квадратурных формул. Квадратурные формулы Гаусса, их простейшие представители.
15. Выбор узлов для квадратурных формул Гаусса в общем случае. Примеры квадратурных формул Гаусса. Погрешность квадратур Гаусса.
16. Сингулярные числа и сингулярные векторы матрицы. Спектральный радиус и его свойства.
17. Нормы в пространствах векторов и матриц. Эквивалентность норм. Согласованные и подчинённые нормы, примеры согласования и подчинения. Матричный ряд Неймана.
18. Понятие об обусловленности математической задачи. Число обусловленности матрицы и оценка погрешности решения системы линейных алгебраических уравнений через погрешности входных данных. Примеры хорошо и плохо обусловленных матриц.
19. Метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений, его матричная интерпретация. Выбор ведущего элемента. Вычисление обратной матрицы и определителя матрицы.
20. Разложение Холесского, его существование. Метод Холесского (квадратного корня) для решения систем линейных уравнений.
21. Поведение числа обусловленности при матричных преобразованиях, мотивация применения ортогональных матриц. QR-разложение матриц, его существование. Ортогональные матрицы вращений.
22. Ортогональные матрицы отражения и их свойства. Метод Хаусхолдера (отражений) для решения систем линейных уравнений.
23. Метод прогонки решения линейных систем с трёхдиагональными матрицами. Достаточные условия выполнимости метода прогонки.
24. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Необходимое условие сходимости стационарных одношаговых итерационных методов.
25. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Достаточное условие сходимости стационарных одношаговых итерационных методов.
26. Способы подготовки системы линейных алгебраических уравнений к итерационному решению. Предобуславливание. Оптимизация простейшего скалярного предобуславливателя. Расщепление матрицы системы.

27. Итерационный метод Якоби, условия его сходимости. Сходимость метода Якоби для линейных систем, матрицы которых имеют диагональное преобладание.
28. Итерационный метод Гаусса-Зейделя, условия его сходимости. Сходимость метода Гаусса-Зейделя для линейных систем, матрицы которых имеют диагональное преобладание.
29. Оценка погрешности стационарного одношагового итерационного метода. Критерий остановки итераций.
30. Методы релаксации для решения линейных систем уравнений, необходимое условие их сходимости.
31. Нестационарные итерационные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений, различные подходы к их построению. Функционал энергии, взаимоотношение задачи его минимизации и решения линейной системы.
32. Метод наискорейшего спуска для решения систем линейных алгебраических уравнений, оценка его скорости сходимости.
33. Сходимость метода релаксации для линейных систем с симметричными положительно определёнными матрицами.
34. Признак Адамара неособенности матриц. Теорема Гершгорина. Круги Гершгорина.
35. Обусловленность задачи нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы. Коэффициенты перекоса матрицы и их содержательный смысл.
36. Степенной метод для нахождения доминирующих собственного значения и собственного вектора матрицы. Обратные степенные итерации. Сдвиги спектра.
37. Ортогональные матрицы вращений. Метод Якоби решения симметричной проблемы собственных значений.
38. Обоснование сходимости метода Якоби для решения симметричной проблемы собственных значений.
39. QR-алгоритм для решения проблемы собственных значений. Характер его сходимости. Хессенбергова форма матрицы, её применение в QR-алгоритме.

Основная литература

[1] Барахнин В.Б., Шапеев В.П. *Введение в численный анализ.* – Санкт-Петербург–Москва– Краснодар: Лань, 2005.

[2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы.* – Москва: Бином, 2003, а также другие издания этой книги.

[3] Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений. Т. 1–2.* – Москва: Наука, 1966.

[4] Воеводин В.В. *Вычислительные основы линейной алгебры.* – Москва: Наука, 1977.

[5] Даугавет И.К. *Введение в теорию приближения функций.* – Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1977.

[6] Демидович Б.П., Марон А.А. *Основы вычислительной математики.* – Москва: Наука, 1970.

[7] Деммель Дж. *Вычислительная линейная алгебра.* – Москва: Мир, 2001.

[8] Коновалов А.Н. *Введение в вычислительные методы линейной алгебры.* – Новосибирск: Наука, 1993.

[9] Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы.* – Москва: Наука, 1989.

[10] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. *Сплайны в вычислительной математике.* – Москва: Наука, 1976.

[11] Тыртышников Е.Е. *Методы численного анализа.* – Москва: Академия, 2007.

[12] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. *Вычислительные методы линейной алгебры.* – Москва–Ленинград: Физматлит, 1963.

[13] Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* – Москва: Мир, 1989.

[14] Шарый С.П. *Курс вычислительных методов.* – Новосибирск: НГУ, 2011. – Электронный учебник, доступный на `http://www.ict.nsc.ru/matmod/index.php?file=u_posobiya`