МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Национальный исследовательский университет**
**Новосибирский государственный университет**
**Механико-математический факультет**

УТВЕРЖДАЮ

__________________________
______________________ 2012 г.

Курс лекций

# Курс теории функций комплексного переменного

Направление подготовки
**Механика и математическое моделирование**

Квалификация (степень) выпускника
**Бакалавр**

Форма обучения
**Очная**

Новосибирск 2012

# Аннотация

Настоящая разработка представляет собой материал курса лекций дисциплины "Теория функций комплексного переменного читаемых студентам 2–3 курсов механико-математического факультета Новосибирского государственного университета по специальности "механика и математическое моделирование" и призвана способствовать решению задачи развития образовательного процесса в рамках Мероприятий по реализации Программы развития НИУ НГУ (ПНР-1, III, п.Б.3.9).

Материал разработки находится в полном соотвтствии с содержанием лекций, читаемых по инновационной программе третьего поколения ФГОС ВПО и отличается от имеющихся учебных пособий по теории функций комплексного переменного как по усовершенствованной методике изложения, так и по содержанию, ибо в них не всегда имеется необходимый материал или имеется не в том виде, в котором он читается. Например, материал разделов о свойствах интеграла типа Коши в замкнутых областях, краевых задачах теории функций и сингулярных интегральных уравнениях можно найти в основном в монографиях.

Изложение материала учитывает уровень подготовки студентов в начале четвертого семестра, когда начинается чтение курса Теории функций крмплексного переменного.

Методы теории функций комплексного переменного широко применяются во многих областях, например, в теории дифференциальных упавнений, теории чисел, теории врочтностей, а также при моделировании и анализе результатов фундаментальных физических экспериментов в области аэродинимики, гидродинамики, электродинамики и др.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящий курс лекций внесены изменения в ряд доказательств, некоторые доказательства иллюстрируются рисунками.

25 сентябряя 2012 г. *П. А. Билута*
г. Новосибирск

# ВВЕДЕНИЕ

## 0.1. Комплексные числа

Напомним некоторые известные понятия и факты из теории комплексных чисел.

Комплексное число $\alpha$ определим как упорядоченную пару $(a, b)$ действительных чисел $a$, $b$. Первая компонента $a$ этой пары называется действительной частью, а вторая компонента $b$ — мнимой частью комплексного числа $\alpha$, и для них приняты обозначения: $a = \Re e\alpha$, $b = \Im m\alpha$. Потребуем, чтобы $(a, 0) = a$. Число вида $(0, b)$ называется мнимым. Числа $(0, 0) = 0$, $(1, 0) = 1$ и $(0, 1) = i$ называются нулем, единицей и мнимой единицей соответственно.

Два комплексных числа равны, если соответственно равны их действительные и мнимые части. Введя надлежащим образом операции сложения и умножения, получим обычное представление комплексного числа: $\alpha = (a,\ b) = a + ib$.

Обозначим через $E_2$ евклидову плоскость с декартовыми ортогональными координатами $x$, $y$. Так как комплексное число $z = x + iy$ является парой $(x,\ y)$ действительных чисел, а множество всевозможных таких пар находится во взаимно однозначном соответствии с точками $E_2$, то каждую точку $E_2$ с координатами $x$, $y$ можно принять за изображение комплексного числа $z = x + iy$. В таком истолковании $E_2$ естественно называть комплексной плоскостью, которую будем обозначать через $\mathbb{C}$, а $z$ — точкой комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Множество $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ называется проколотой (в нуле) комплексной плоскостью.

Так как оси $x$, $y$ описываются уравнениями $\Im m z = 0$, $\Re e z = 0$ соответственно, то их называют действительной и мнимой осями.

Число $x - iy$ называется комплексно сопряженным с числом $z = x + iy$ и обозначается через $\bar{z}$.

Число $\sqrt{z\bar{z}}$, $z \in \mathbb{C}$, называется модулем, а угол $\varphi$ между радиус-вектором точки $z \in \mathbb{C}^*$ и положительным направлением оси $x$ — аргументом комплексного числа $z$, и для них приняты обозначения: $\sqrt{z\bar{z}} = |\,z\,|$, $\quad \varphi = \arg z$.

Отметим, что разные комплексные числа можно сравнивать только по модулю.

Положение точки $z$ на комплексной плоскости однозначно определяется как декартовыми координатами $x$, $y$, так и полярными $r = |\,z\,|$, $\varphi = \arg z$. Обратно, по заданной точке $z$ ее декартовы координаты и модуль определяются единственным образом, а аргумент — с точностью до слагаемого $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Так, например, аргументом комплексного числа $z$ служит как положительный угол $\varphi$ (см. Рис. 1), так и отрицательный угол $\psi = \varphi - 2\pi$.

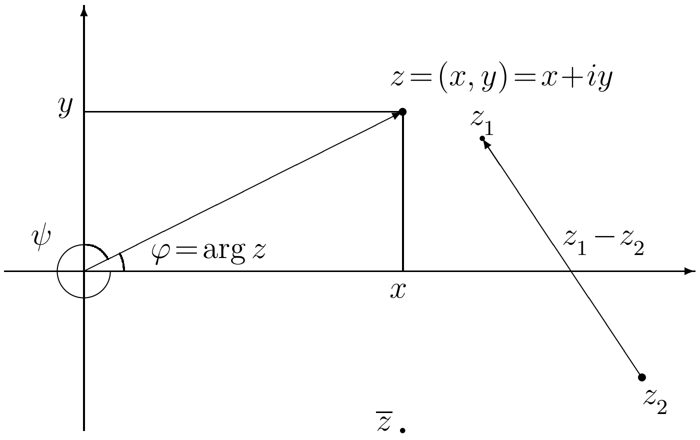

Рис. 1

Значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg z \leq \pi$, называется главным.

Заметим, что аналогично тому, как комплексное число $z$ можно изображать на комплексной плоскости радиус-вектором точки $z$, комплексное число вида $z_1 - z_2$ часто удобно изображать вектором с началом в точке $z_2$ и концом в точке $z_1$, причем $|\,z_1 - z_2\,|$ геометрически представляет собой расстояние между этими точками.

Для двух комплексных чисел $z_1$ и $z_2$ имеют место неравенства треугольника

$$|\,z_1 + z_2\,| \leq |\,z_1\,| + |\,z_2\,|, \quad |\,z_1 - z_2\,| \geq \big|\,|\,z_1\,| - |\,z_2\,|\,\big|.$$

Поскольку $z_1 + z_2 = z_1 - (-z_2)$, $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, а $|-z_2\,| = |\,z_2\,|$, то отсюда получим следующее двойное неравенство

$$\big|\,|\,z_1\,| - |\,z_2\,|\,\big| \leq |\,z_1 \pm z_2\,| \leq |\,z_1\,| + |\,z_2\,|.$$

При этом легко увидеть, что верхняя граница для модуля суммы и нижняя для модуля разности достигаются, когда радиус-векторы точек $z_1$ и $z_2$ одинаково направлены, а нижняя граница для модуля суммы и верхняя для модуля разности, — когда они противоположно направлены.

В евклидовом пространстве $E_3$ с декартовыми ортогональными координатами $\xi$, $\eta$, $\zeta$ рассмотрим сферу $S$ радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(0,\, 0,\, \frac{1}{2}\right)$:

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\zeta=0. \tag{0.1}$$

Плоскость $\zeta=0$ совместим с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, действительная ось $x$ которой совпадает с осью $\xi$, а мнимая ось $y$ — с осью $\eta$.

Соединим точку $z=x+iy$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с точкой $P(0,0,1)$ отрезком прямой. Он пересечет сферу $S$ в отличной от $P$ точке $M(\xi,\eta,\zeta)$, которая называется стереографической проекцией точки $z$ на сферу $S$ с полюсом $P$ (см. Рис. 2).

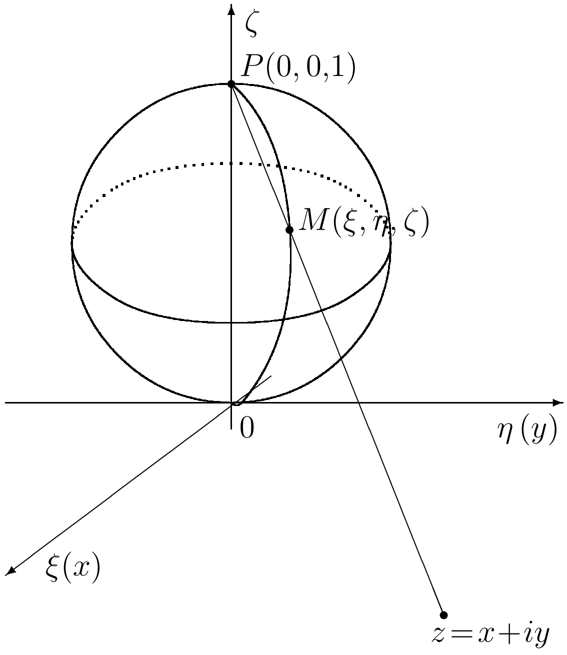

Рис. 2

Стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками сферы $S$ с выколотым полюсом $P$ и точками комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Из коллинеарности точек $P(0,\,0,\,1)$, $M(\xi,\,\eta,\,\zeta)$ и $z$ следует, что

$$\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y}=\frac{\zeta-1}{-1}$$

или

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta}\,,\quad y=\frac{\eta}{1-\zeta}\,,\quad z=\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}. \tag{0.2}$$

В силу последнего из равенств (0.2) с учетом (0.1) имеем

$$|\,z\,|^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2}=\frac{\zeta}{1-\zeta}\,,$$

откуда

$$\zeta = \frac{|\,z\,|^2}{1+|\,z\,|^2}. \tag{0.3}$$

Подставив значение $\zeta$ из (0.3) в (0.2), получим

$$\xi = \frac{x}{1+|\,z\,|^2}\,, \quad \eta = \frac{y}{1+|\,z\,|^2}. \tag{0.4}$$

Равенства (0.3) и (0.4) называются формулами стереографической проекции.

Отметим без доказательства два свойства стереографической проекции:

1) она сопоставляет окружности (и прямой) на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ окружность на сфере $S$ и обратно;

2) она сохраняет углы.

Введем теперь в рассмотрение "идеальное" комплексное число $z = \infty$ и "пополним"комплексную плоскость присоединением к ней единственной бесконечно удаленной точки, соответствующей числу $z = \infty$. Комплексная плоскость вместе с бесконечно удаленной точкой называется расширенной комплексной плоскостью и обозначается через $\overline{\mathbb{C}}$.

Дополняя соответствие, установленное стереографической проекцией, сопоставлением бесконечно удаленной точки полюсу $P$ сферы $S$, получим взаимно однозначное соответствие между расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$ и сферой $S$.

Эта интерпретация комплексных чисел была предложена Риманом, поэтому $S$ называют сферой Римана.

## 0.2. Множества на расширенной комплексной плоскости

Будем называть:

– окрестностью ($\delta$-окрестностью) точки $z_0 \in \mathbb{C}$ множество точек $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих неравенству $|\,z – z_0\,| < \delta$, $\delta > 0$, и обозначать ее через $C(\delta, z_0)$;

– проколотой окрестностью точки $z_0$ множество $C^*(\delta, z_0) = C(\delta, z_0) \setminus \{z_0\}$;

– окрестностью бесконечно удаленной точки множество точек $z \in \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих неравенству $|z| > \delta$;

– точку $z$ изолированной точкой множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если существует такое число $\delta > 0$, что пересечение $E \cap C(\delta, z)$ состоит из единственной точки $z : E \cap C(\delta, z) = \{z\}$;

– точку $z$ предельной точкой множества $E$, если в любой окрестности точки $z$ имеется бесконечное множество точек этого множества;

– точку $z$ внутренней точкой множества $E$, если существует такое число $\delta > 0$, что $C(\delta, z) \subset E$;

– точку $z$ внешней точкой множества $E$, если существует такое число $\delta > 0$, что $E \cap C(\delta, z) = \emptyset$;

– точку $z$ граничной точкой множества $E$, если в любой ее окрестности имеются как точки множества $E$, так и точки, не принадлежащие этому множеству. Заметим, что если граничная точка множества $E$ не принадлежит $E$, то она является его предельной точкой;

– совокупность всех граничных точек множества $E$ границей этого множества и обозначать через $\partial E$;

– множество $E$ ограниченным, если все его точки лежат в некотором круге $|z| < R$, $0 < R < \infty$;

– множество $E$ замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. В частности, оно может не иметь предельных точек;

– замыканием множества $E$ множество $\overline{E} = E \cup \partial E$;

– диаметром множества $E$ число $d(E) = \sup\limits_{z, \zeta \in E} |z - \zeta|$;

– расстоянием между множествами $E$ и $G$ число $\rho(E, G) = \inf\limits_{z \in E, \zeta \in G} |z - \zeta|$;

– множество открытым, если каждая точка этого множества является его внутренней точкой;

– множество связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся множеств, каждое из которых не содержит предельных точек другого;

– областью открытое связное множество;

– замкнутой областью множество, состоящее из области и ее границы;

– компонентой множества $E$ любое его максимальное связное подмножество, т.е. такое его связное подмножество $K$, что не существует другого связного подмножества $K_1$, содержащего $K$;

– область, отличную от $\overline{\mathbb{C}}$ , $n$-связной, если ее граница состоит из $n$ компонент.

Расширенная комплексная плоскость называется односвязной областью. Заметим, что расширенная комплексная плоскость является одновременно открытым и замкнутым множеством.

Легко видеть, что *граница любого множества является замкнутым множеством.* В самом деле, пусть $z_0$ есть предельная точка граничных точек некоторого множества $E$. Поскольку в любой окрестности точки $z_0$ имеется бесконечное множество граничных точек множества $E$, в любой окрестности каждой из которых имеются как точки из $E$, так и точки, не принадлежащие $E$, то в любой окрестности точки $z_0$ тоже имеются как точки из $E$, так и точки, не принадлежащие $E$, т. е. $z_0$ тоже является граничной точкой множества $E$.

Приведем без доказательства несколько утверждений.

Принцип Больцано – Вейерштрасса. *Любое бесконечное множество точек расширенной комплексной плоскости* $\overline{\mathbb{C}}$ *имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Лемма Гейне – Бореля. *Из бесконечного открытого покрытия замкнутого множества точек расширенной комплексной плоскости* $\overline{\mathbb{C}}$ *можно выделить конечное открытое покрытие.*

Лемма о вложенных прямоугольниках. Пусть дана последовательность $\{r_n\}$ замкнутых прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, каждый из которых содержит следующий, т. е. $r_n \supset r_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, и пусть длина $d\,(r_n)$ диагонали прямоугольника $r_n$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Тогда *существует единственная точка, принадлежащая всем прямоугольникам.*

Заметим, что утверждение останется в силе, если рассмотреть последовательность $\{\Delta_n\}$ вложенных замкнутых треугольников, длина $d\,(\Delta_n)$ наибольшей из сторон которых стремится к нулю при $n \to \infty$.

## 0.3. Предел. Ряды комплексных чисел

Последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}$, будем называть сходящейся к пределу $\alpha = a + ib$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что $|z_n - \alpha| < \varepsilon$ при $n > N$, и писать: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$. Отсюда, в частности, следует, что соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$ эквивалентны.

Так как при $n > N$ выполняются неравенства $|x_n - a| \le |z_n - \alpha| < \varepsilon$, $|y_n - b| \le |z_n - \alpha| < \varepsilon$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, т. е. из сходимости последовательности $\{z_n\}$ следует сходимость последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Обратно, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $n > N$, а тогда $|z_n - \alpha| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$.

Таким образом, соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = a + ib$ эквивалентно двум соотношениям: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Это замечание позволяет перенести всю теорию пределов последовательностей действительных чисел на последовательности комплексных чисел, например, критерий Коши: *для сходимости последовательности $\{z_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что неравенство $|z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$ выполняется для любого натурального числа $m$ и для любого $n > N$.*

Геометрически сходимость последовательности $\{z_n\}$ к точке $\alpha$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ все точки этой последовательности, начиная с некоторого номера, принадлежат $\varepsilon$-окрестности точки $\alpha$.

Последовательность $\{z_n\}$ называется сходящейся к бесконечности ($\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$), если для любого $R > 0$ существует такое натуральное число $N = N(R)$, что $|z_n| > R$ при $n > N$. Следовательно, соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$ эквивалентны. Если $z_n \ne 0$, то эквивалентны также соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n} = 0$.

Говорят, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k,\ \alpha_k \in \mathbb{C}, \tag{0.5}$$

сходится (расходится), если сходится (расходится) последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$.

Предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, если он существует, называется суммой ряда (0.5).

Из равенства $S_n - S_{n-1} = \alpha_n$ получаем необходимое условие сходимости ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Далее, так как $S_{n+m} - S_n = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{n+k}$, то критерий Коши сходимости последовательности $\{S_n\}$ для ряда (0.5) перефразируется следующим образом: *для сходимости ряда* (0.5) *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* $N = N(\varepsilon)$*, что* $|\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{n+k}| < \varepsilon$ *для любого натурального числа* $m$ *и любого* $n > N$.

Ряд (0.5) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$.

В силу неравенства $|\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{n+k}| \le \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_{n+k}|$ и критерия Коши из абсолютной сходимости ряда (0.5) следует его сходимость. Если ряд сходится, но не абсолютно, то он называется условно сходящимся.

Пусть $\alpha_k = a_k + ib_k$. Из неравенств $|a_k| \le |\alpha_k|$, $|b_k| \le |\alpha_k|$ и $|\alpha_k| \le \le |a_k| + |b_k|$ вытекает, что абсолютная сходимость ряда (0.5) эквивалентна абсолютной сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. Следовательно, на ряды комплексных чисел переносится теорема о том, что можно произвольно переставлять члены абсолютно сходящегося ряда, не меняя его суммы.

Аналогично случаю рядов с действительными членами можно доказать, что если ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = S' \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = S''$$

сходятся абсолютно, то абсолютно сходится и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_1\beta_k+\alpha_2\beta_{k-1}+\ldots+\alpha_k\beta_1)$$

с общим членом в форме Коши, который называется произведением этих рядов, причем его сумма $S=S'S''$.

Положим по определению

$$e^{\alpha}=1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\quad(0!=1)\,, \tag{0.6}$$

$$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{2k}}{(2k)!}\,, \tag{0.7}$$

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}\,. \tag{0.8}$$

Эти ряды абсолютно сходятся (например, по признаку Даламбера) для любого комплексного числа $\alpha\in\mathbb{C}$. Для действительных значений $\alpha=a$ суммы рядов (0.6) – (0.8) совпадают с известными величинами $e^a$, $\cos a$, $\sin a$ соответственно.

Меняя в (0.6) число $\alpha$ на $i\alpha$ и учитывая, что $i^{2k}=(-1)^k$, получим формулу Эйлера:

$$e^{i\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}=\cos\alpha+i\sin\alpha\,. \tag{0.9}$$

Из записи комплексного числа $\alpha$ в тригонометрической форме $\alpha=|\,\alpha\,|(\cos\arg\alpha+i\sin\arg\alpha)$ и формулы (0.9) следует, что комплексное число $\alpha$ можно записать также в показательной форме $\alpha=|\,\alpha\,|\,e^{i\arg\alpha}$.

Нетрудно проверить справедливость равенства

$$e^{\alpha}e^{t}=e^{\alpha+t}\,, \tag{0.10}$$

в силу которого

$$e^{\alpha}=e^{a+ib}=e^{a}e^{ib}=e^{a}(\cos b+i\sin b),$$

т. е.

$$|\,e^{\alpha}\,| = e^{a} \neq 0,\ |\,\alpha\,| < \infty; \quad \arg e^{\alpha} = b + 2k\pi,\ k=0,\ \pm 1,\ \ldots \tag{0.11}$$

Как обычно, логарифмом комплексного числа $\beta, \beta \neq 0$, будем называть такое комплексное число $\alpha$, для которого

$$\beta = e^{\alpha},$$

и будем писать

$$\log \beta = \alpha. \tag{0.12}$$

Отсюда в силу (0.11) следует, что $a = \log|\,\beta\,|$, $b = \arg\beta + 2k\pi$, поэтому из (0.12) получим

$$\log \beta = \log|\,\beta\,| + i\arg\beta + 2k\pi i,\ k=0,\ \pm 1, \ldots \tag{0.13}$$

## 0.4. Функции комплексного переменного

Пусть $E$ — множество точек расширенной комплексной плоскости. Если каждому $z \in E$ по некоторому закону $f$ поставлено в соответствие комплексное число $w$, то говорят, что на множестве $E$ определена (однозначная) функция комплексного переменного $z$, и пишут $w = f(z)$. Полагая $z = x + iy$, $w = u + iv$, получим

$$w = f(z) = u(x,\, y) + iv(x,\, y)\,,$$

т. е. задание комплекснозначной функции комплексного переменного $z$ равносильно заданию двух действительнозначных функций $u$ и $v$ двух действительных переменных $x$ и $y$.

Откладывая значения $z$ и $w$ на двух различных комплексных плоскостях, получим, что функция $w = f(z)$ осуществляет отображение множества $E$ плоскости $z$ на некоторое множество $E_1$ ,плоскости $w$. Тогда $w \in E_1$ называется образом точки $z \in E$, а точка $z$ — прообразом точки $w$.

Функция $f(z)$ называется однолистной на множестве $E$, если для всех $z_1, z_2$ из $E$, $z_1 \neq z_2$, имеем $f(z_1) \neq f(z_2)$. Она осуществляет взаимно однозначное отображение, поэтому тогда можно говорить об обратной функции $z = f^{-1}(w)$.

Пусть $w = f(z)$ — функция, определенная на множестве $E$ плоскости $z$, и пусть $z_0$ — предельная точка множества $E$. Если для фиксированного числа $w_0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$|\,f(z)-w_0\,|<\varepsilon$ для всех $z\in E\cap C^*(\delta,z_0)$, то говорят, что $w_0$ является пределом функции $f(z)$ в точке $z_0$ и пишут: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$.

Из определения предела функции в точке следует, что $w_0\neq\infty$. В частности, если предельная точка $z_0$ множества $E$ принадлежит $E$ и $w_0=f(z_0)$, то функция $f(z)$ называется непрерывной в точке $z_0$.

Предположим, что каждая точка множества $E$ является его предельной точкой. Функция $f(z)$ называется непрерывной на множестве $E$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Функция $f(z)$ называется равномерно непрерывной на множестве $E$ комплексной плоскости, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любых двух точек $z'$, $z''$ из $E$, удовлетворяющих условию $|\,z'-z''\,|<\delta$, выполняется неравенство $|\,f(z')-f(z'')\,|<\varepsilon$.

Непрерывность функции $f(z)=u+iv$ эквивалентна непрерывности ее действительной и мнимой частей $u$ и $v$, поэтому все свойства действительных непрерывных функций двух действительных переменных переносятся на функции комплексного переменного. В частности, если функция $f(z)$ непрерывна в области $D$ и $f(z_0)\neq 0$, $z_0\in D$, то существует такое число $\delta>0$, что $f(z)\neq 0$ для всех $z\in C(\delta,z_0)$.

Кроме того, если функция $f(z)$ непрерывна на замкнутом множестве $F$, то она:

1) ограничена на этом множестве, т. е. для всех $z\in F$ имеем:

$$|\,f(z)\,|\le M=\text{const}<\infty;$$

2) достигает своих наибольшего и наименьшего по модулю значений, т. е. существуют такие точки $z_1$, $z_2$ из $F$, что

$$|\,f(z_1)\,|=\sup_{z\in F}|\,f(z)\,|,\quad |\,f(z_2)\,|=\inf_{z\in F}|\,f(z)\,|;$$

3) равномерно непрерывна на $F$ (теорема Кантора).

## 0.5. Кривая Жордана

Пусть $x(t)$, $y(t)$ — действительные непрерывные функции переменного $t$, изменяющегося на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$. Уравнения

$$x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \leq t \leq \beta, \tag{0.14}$$

дают параметрическое представление непрерывной кривой.

Непрерывная кривая называется кривой Жордана, если двум различным значениям параметра $t$ (за исключением, быть может, значений $t = \alpha$ и $t = \beta$) соответствуют две различные точки кривой.

Уравнения (0.14) в комплексной записи имеют вид

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Кривая Жордана называется замкнутой, если $z(\alpha) = z(\beta)$.

Жорданом (C. Jordan) было доказано, что *замкнутая кривая Жордана делит расширенную комплексную плоскость на две области: внутреннюю* (не содержащую точки $z = \infty$) *и внешнюю* (содержащую точку $z = \infty$), являясь их общей границей.

Положительным направлением на замкнутой кривой Жордана будем считать направление, оставляющее ограниченную ею внутреннюю область слева, а на незамкнутой (разомкнутой) — направление, соответствующее возрастанию параметра $t$.

Кривая Жордана называется гладкой, если функции $x(t)$, $y(t)$ имеют в интервале $(\alpha, \beta)$ непрерывные производные, причем $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$, и существуют отличные от нуля пределы $\lim\limits_{t \to \alpha + 0} z'(t)$ и $\lim\limits_{t \to \beta - 0} z'(t)$, равные между собой в случае замкнутой кривой.

Заметим, что если кривая, заданная уравнениями (0.14), имеет в точке $z = z(t)$ касательную, образующую с действительной осью угол $\varphi$, то

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

и

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \arg z'(t). \tag{0.15}$$

Следовательно, условие $z'(t) \neq 0$ и непрерывность $z'(t)$ для гладкой кривой Жордана, заданной уравнением $z = z(t)$, означают соответственно существование касательной и непрерывность угла наклона этой касательной, равного $\arg z'(t)$.

Кривая Жордана называется кусочно-гладкой, если ее можно разбить на конечное число гладких кривых или, в случае замкнутой кривой, у нее имеется одна угловая точка (например, если для замкнутой кривой выполняются все условия гладкости, кроме последнего, т. е. если $\lim\limits_{t \to \alpha+0} z'(t) \neq \lim\limits_{t \to \beta-0} z'(t)$).

Так как гладкая кривая Жордана $\Gamma$ является спрямляемой, в качестве параметра $t$ в ее представлении $z = z(t)$ можно принять длину $s$ дуги $\Gamma$, отсчитываемую в положительном направлении, причем из формулы $ds = |\, z'(t) \,|\, dt$ следует, что в этом случае

$$\left| \frac{dz}{ds} \right| = 1 \,. \tag{0.16}$$

Пусть $L$ — длина гладкой замкнутой кривой Жордана $\Gamma$, а $z_1$ и $z_2$ — произвольные точки на $\Gamma$. Часть $\Gamma$ между $z_1$ и $z_2$, длина которой $\sigma(z_1, z_2) \leq \dfrac{L}{2}$, обозначим через $\overset{\frown}{z_1 z_2}$, а длину хорды $[\,z_1, z_2\,]$, стягивающей дугу $\overset{\frown}{z_1 z_2}$, — через $r(z_1, z_2)$.

В силу гладкости кривой $\Gamma$ угол наклона ее касательной является равномерно непрерывной функцией $s$, поэтому для любого числа $\theta_0$, $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$, существует такое положительное число $\sigma_0 < \dfrac{L}{2}$, что острый угол $\alpha$ между касательными в любых двух точках $z_1$ и $z_2$ кривой $\Gamma$, удовлетворяющих условию $\sigma(z_1, z_2) < \sigma_0$, меньше $\dfrac{\theta_0}{2}$. Отсюда на основании теоремы Лагранжа (о существовании точки $\tau \in \overset{\frown}{z_1 z_2}$, в которой касательная параллельна хорде $[z_1, z_2]$) заключаем, что если $\sigma(z_1, z_2) < \sigma_0$, то острый угол между хордой $[\,z_1, z_2\,]$ и касательной в каждой из точек $z_1$, $z_2$ меньше $\dfrac{\theta_0}{2}$.

Рассмотрим теперь множество $\gamma$ всех точек $z$ кривой $\Gamma : z = z(s) = = x(s) + iy(s)$, $0 \leq s \leq L$, удовлетворяющих условию $\sigma(z_0, z) < \sigma_0$, где $z_0 = z(s_0)$ — произвольная фиксированная точка на $\Gamma$. Без ограничения общности можно считать, что $z_0$ не является начальной точкой отсчета длины $s$ дуги $\Gamma$ и $\sigma_0 < s_0 < L - \sigma_0$ Точка $z_0$ делит дугу $\gamma$ на две части, на одной из которых $s<s_0$, а на другой $s>s_0$.

Поскольку

$$r=r(z_0,\, z(s))=\sqrt{[\,x(s)-x(s_0)\,]^2+[\,y(s)-y(s_0)\,]^2},$$

то

$$\frac{dr}{ds}=\frac{1}{r}\,\{[\,x(s)-x(s_0)\,]\,x'(s)+[\,y(s)-y(s_0)\,]\,y'(s)\}=$$
$$=\frac{1}{r}\,(\vec{r},\vec{s})=\frac{1}{r}\,r\left|\frac{dz}{ds}\right|\cos(\widehat{\vec{r},\vec{s}})=\cos(\widehat{\vec{r},\vec{s}})\,,$$

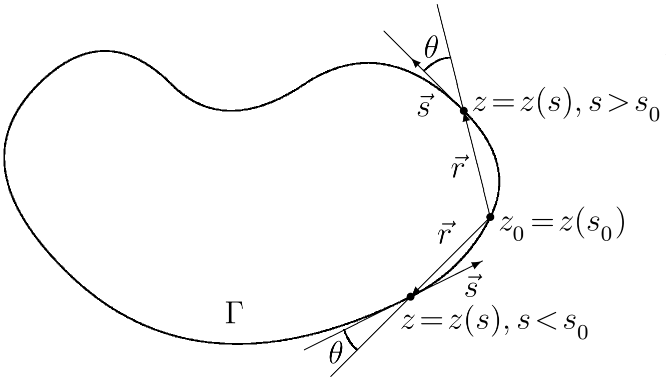

Рис. 3

где $\vec{r}$ — вектор с координатами $x(s)-x(s_0)$, $y(s)-y(s_0)$, а $\vec{s}$ — вектор с координатами $x'(s)$, $y'(s)$, который в силу (0.15) и (0.16) является единичным вектором касательной к Г в точке $z=z(s)$, направленным в сторону возрастания параметра $s$, и, следовательно,

$$\frac{dr(z_0,\, z(s))}{ds}=\begin{cases}\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta, & s<s_0,\\ \cos\theta, & s>s_0,\end{cases}\tag{0.17}$$

где $\theta$ — острый угол между хордой $[\,z_0,\, z\,]$ и касательной к $\gamma$ в точке $z$ (см. Рис. 3). Из (0.17) следует, что функция $r(z_0,\, z(s))$ строго монотонно убывает при $s<s_0$ и строго монотонно возрастает при $s>s_0$.

Поскольку $z=z(s)\in\gamma$, то

$$0\le\theta<\frac{\theta_0}{2}.\tag{0.18}$$

Интегрируя равенство (0.17) в пределах от $s_0$ до $s_0+\sigma_0$ на $\gamma$, по теореме о среднем получим

$$r(z_0, z(s_0+\sigma_0)) = \int\limits_{s_0}^{s_0+\sigma_0} \cos\theta(s)ds = \sigma_0 \cos\theta^*_, \text{ где } \theta^* = \theta(s^*), \text{ а } s^* \in (s_0, s_0+\sigma_0),$$

и аналогично

$$r(z_0, z(s_0-\sigma_0)) = -\int\limits_{s_0}^{s_0-\sigma_0} \cos\theta(s)ds = \sigma_0 \cos\theta_*, \text{ где } \theta_* = \theta(s_*), \text{ а } s_* \in (s_0-\sigma_0, s_0),$$

откуда в силу (0.18) следует неравенство

$$r(z_0,\, z(s_0 \pm \sigma_0)) > \sigma_0 \cos\frac{\theta_0}{2}. \tag{0.19}$$

Для любого числа $\sigma_0 \in \left(0,\, \frac{L}{2}\right)$ и любого $\zeta \in \Gamma$ множество $\Gamma_\zeta(\sigma_0)$ всех точек $z \in \Gamma$, для которых $\sigma(z,\, \zeta) \geq \sigma_0$, замкнуто, поэтому в силу непрерывности функции $r(z,\, \zeta)$ и того, что кривая $\Gamma$ не имеет точек самопересечения, $\zeta \cap \Gamma_\zeta(\sigma_0) = \emptyset$ и

$$\mu(\sigma_0) = \min_{\zeta\in\Gamma} \min_{z\in\Gamma_\zeta(\sigma_0)} r(z,\, \zeta) > 0. \tag{0.20}$$

Положим

$$\delta_0 = \min\Big(\mu(\sigma_0),\, \sigma_0 \cos\frac{\theta_0}{2}\Big). \tag{0.21}$$

Число $\delta_0$ будем называть стандартным радиусом кривой $\Gamma$, соответствующим числу $\theta_0$, а дугу, вырезаемую из $\Gamma$ кругом стандартного радиуса, — стандартной дугой.

Все точки $z \in \Gamma$, удовлетворяющие условию $\sigma(z_0,\, z) \geq \sigma_0$, в силу (0.19)–(0.21) лежат вне круга $|\,z - z_0\,| \leq \delta < \delta_0 \leq \mu(\sigma_0)$. В силу (0.17) при возрастании $s$ от $s_0$ до $s_0+\sigma_0$ функция $r(z_0,\, z(s))$ строго возрастает от нуля до $r(z_0,\, z(s_0+\sigma_0)) > \sigma_0 \cos\dfrac{\theta_0}{2} \geq \delta_0 > \delta$ и поэтому ровно один раз принимает значение $\delta$ при $s \in (s_0,\, s_0+\sigma_0)$, а значит, точка $z(s)$ ровно один раз пересечет окружность $|\,z - z_0\,| = \delta$. Точно так же убеждаемся, что при убывании $s$ от $s_0$ до $s_0-\sigma_0$ точка $z(s)$ тоже ровно один раз пересечет эту окружность.

Из выбора числа $\sigma_0$ и приведенных выше рассуждений ясно, что если $z_0$ — произвольная фиксированная, а $z$ — переменная точка дуги $\gamma \subset \Gamma$

длины $2\sigma_0$, то острый угол $\theta$ между хордой $[\,z_0,\, z\,]$ и касательной к $\gamma$ в точке $z$ удовлетворяет соотношению

$$0 \le \theta \le \theta_0\,. \tag{0.22}$$

Из имеющей место и в этом случае формулы (0.17) следует неравенство

$$|\,ds\,| \le k^0\,|\,dr\,|, \tag{0.23}$$

где $r = r(z_0,\, z(s)), z\in\gamma$, а $k^0 = \dfrac{1}{\cos\theta_0}$ не зависит от положения точки $z_0$ на $\gamma$.

В частности, соотношения (0.22), (0.23) будут справедливыми, если в качестве $\gamma$ взять стандартную дугу кривой $\Gamma$, поскольку из (0.19) – (0.21) следует, что ее длина меньше $2\sigma_0$.

По этой же причине для любых двух точек $z_1$, $z_2$ открытой стандартной дуги $\gamma$ и любой точки $\tau \in \overset{\frown}{z_1 z_2} \subset \gamma$ угол между хордами $[\,\tau,\, z_1\,]$ и $[\,\tau,\, z_2\,]$ больше $\pi - \theta_0$, а если $|\,z_1 - z_2\,| < \delta_0$, то угол между указанными хордами больше $\pi - \dfrac{\theta_0}{2}$.

Таким образом, доказано следующее важное свойство замкнутых гладких кривых Жордана.

*Для замкнутой гладкой кривой* $\Gamma$ *и любого числа* $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ *существует такое число* $\delta_0 > 0$, *что:*

*1) окружность с центром в любой точке* $z_0 \in \Gamma$ *радиуса* $\delta < \delta_0$ *пересекает кривую* $\Gamma$ *ровно два раза;*

*2) изменение угла наклона касательной на стандартной дуге* $\gamma \subset \Gamma$ *не превышает* $\theta_0$*;*

*3) если* $z_0$ *— произвольная фиксированная, а* $z$ *— переменная точка стандартной дуги* $\gamma \subset \Gamma$, *то имеют место соотношения* (0.22) *и* (0.23).

Для любой пары точек $z_1 = z(s_1)$, $z_2 = z(s_2)$, лежащих на одной из частей дуги $\gamma$, на которые ее делит точка $z_0$ (она может быть и одним из концов дуги $\gamma$), интегрируя (0.17) в пределах от $s_1$ до $s_2$, в силу теоремы о среднем и (0.22) получим

$$|\,s_1 - s_2\,|\,\cos\theta_0 \le |\,r_1 - r_2\,| \le |\,s_1 - s_2\,|, \tag{0.24}$$

где $r_k = r(z_0, z(s_k))$, $k = 1, 2$. В частности, положив $z_1 = z_0$, для любых двух точек $z_1$, $z_2$ кривой $\gamma$ будем иметь

$$r(z_1,\, z_2) = |\,z_1 - z_2\,| \ge |\,s_1 - s_2\,|\,\cos\theta_0\,. \tag{0.25}$$

Если же точки $z_1, z_2$ замкнутой гладкой кривой $\Gamma$ удовлетворяют условию $\sigma(z_1, z_2) \,! \geq 2\sigma_0$, то в силу (0.20) имеем

$$\frac{r(z_1, z_2)}{\sigma(z_1, z_2)} = \frac{|\, z_1 - z_2 \,|}{|\, s_1 - s_2 \,|} \geq \frac{\mu(2\sigma_0)}{L} \,. \tag{0.26}$$

Полагая теперь $k_0 = \min\left(\cos\theta_0, \dfrac{\mu(2\sigma_0)}{L}\right)$, для любых точек $z_1, z_2$ замкнутой гладкой кривой $\Gamma$ в силу (0.25) и (0.26) получим двойное неравенство

$$k_0 \,|\, s_1 - s_2 \,| \leq |\, z_1 - z_2 \,| \leq |\, s_1 - s_2 \,| \,. \tag{0.27}$$

В заключение заметим, что, очевидно, и в случае разомкнутой гладкой кривой Жордана $\Gamma$ для любого числа $\theta_0$, $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$, существует такое число $\delta_0 > 0$, что окружность с центром в любой точке $z_0 \in \Gamma$ радиуса $\delta < \delta_0$ либо два раза, либо один раз пересекает $\Gamma$, а изменение угла наклона касательной на стандартной дуге не превышает $\theta_0$.

## 0.6. Функциональные ряды

Будем говорить, что функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \,, \tag{0.28}$$

членами которого являются заданные на некотором множестве $E$ комплексной плоскости $z$ функции $f_k(z)$, сходится на множестве $E$, если он сходится в каждой точке $z \in E$. Пусть сумма этого ряда равна $S(z)$, а $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$. Говорят, что ряд (0.28) сходится равномерно на множестве $E$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon) > 0$, что $|\, S(z) - S_n(z) \,| < \varepsilon$ для всех $n > N$ и $z \in E$.

Признак равномерной сходимости (Вейерштрасса). *Если для всех $z \in E$ каждый член $f_k(z)$ ряда* (0.28), *начиная с некоторого номера $n_0$, удовлетворяет нeравеству*

$$|\, f_k(z) \,| \leq \alpha_k, \quad k = n_0, n_0 + 1, \ldots, \tag{0.29}$$

*и числовой ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \alpha_k$ сходится, то ряд* (0.44) *сходится равномерно (и абсолютно) на множестве $E$.*

**Доказательство**. Действительно, в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}\alpha_k$ для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $N=N(\varepsilon)>0$, что $\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_{n+k}<\varepsilon$ для любого натурального числа $m$ и любого $n>N$. Далее, в силу (0.45) имеем

$$\Bigl|\sum_{k=1}^{m} f_{n+k}(z)\Bigr| \le \sum_{k=1}^{m} |\, f_{n+k}(z)\,| \le \sum_{k=1}^{m}\alpha_{n+k} < \varepsilon\,,$$

откуда на основании критерия Коши убеждаемся в равномерной и абсолютной сходимости ряда (0.28) на множестве $E$.

Отметим следующее важное свойство суммы равномерно сходящегося функционального ряда.

Теорема. *Сумма* $S(z)$ *равномерно сходящегося на множестве* $E$ *ряда* (0.28) *непрерывных на этом множестве функций* $f_k(z)$ *непрерывна на множестве* $E$.

**Доказательство**. В самом деле, пусть $z_0$ — произвольная фиксированная точка множества $E$. Тогда для $z\in E$ имеем

$$|S(z)-S(z_0)| \le |S(z)-S_N(z)| + |S_N(z)-S_N(z_0)| + |S_N(z_0)-S(z_0)|.$$

По заданному $\varepsilon>0$ в силу равномерной сходимости ряда (0.28) найдется такое натуральное число $N=N(\varepsilon)$, что первое и третье слагаемые правой части этого неравенства будут меньше $\dfrac{\varepsilon}{3}$, а затем, при фиксированном $N$, в силу непрерывности $S_N(z)$ как суммы конечного числа непрерывных функций $f_k(z)$ найдется такое число $\delta=\delta(\varepsilon,z_0)>0$, что при $|\,z{-}z_0\,|<\delta$ и второе слагаемое будет меньше $\dfrac{\varepsilon}{3}$. В итоге получим, что $|\,S(z)-S(z_0)\,|<\varepsilon$, как только $|\,z-z_0\,|<\delta$, что означает непрерывность $S(z)$ в точке $z_0$, а значит, в силу произвольности точки $z_0\in E$, и на множестве $E$.

При изучении степенных рядов, не ограничивая общности, можно ограничиться рассмотрением рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \tag{0.30}$$

где $c_k$ — заданные комплексные числа, так как общий случай степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ приводится к ряду вида (0.30) простой заменой переменного.

Теорема Коши – Адамара. *Пусть* $l = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\,c_k\,|}$. *Тогда при* $l = 0$ *ряд* (0.30) *абсолютно сходится на всей комплексной плоскости, при* $l = \infty$ *он сходится только в точке* $z = 0$, *а в случае, когда* $0 < l < \infty$, *ряд* (0.30) *абсолютно сходится в круге* $|\,z\,| < \frac{1}{l}$ *и расходится при* $|\,z\,| > \frac{1}{l}$.

**Доказательство**. Сначала заметим, что для $z = 0$ утверждение теоремы верно при любых коэффициентах $c_k$, а следовательно, при любом $l$. Рассмотрим теперь отдельно каждый из указанных трех случаев для $z \neq 0$.

$1^0$. $l = 0$. Это означает, что

$$l = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\,c_k\,|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\,c_k\,|} = 0$$

и, следовательно, для любого конечного $z$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\,c_k z^k\,|} = |\,z\,| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\,c_k\,|} = 0.$$

В силу признака Коши сходимости рядов с положительными членами ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\,c_k z^k\,|$ сходится при любом конечном $z$, т. е. ряд (0.30) абсолютно сходится на всей комплексной плоскости.

$2^0$. $l = \infty$. Если бы ряд (0.30) сходился при некотором $z \neq 0$, то в силу необходимого условия его сходимости можно было бы указать такое число $M > 1$, что $|\,c_k z^k\,| < M$ или $\sqrt[k]{|\,c_k\,|} < \frac{M}{|z|}$, $k = 1, 2, \ldots$, что невозможно, ибо условие $l = \infty$ означает, что последовательность $\left\{\sqrt[k]{|\,c_k\,|}\right\}$ не ограничена.

$3^0$. $0 < l < \infty$. Пусть $0 < |\,z\,| < \frac{1}{l}$. По определению верхнего предела для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N$, что $\sqrt[k]{|\,c_k\,|} < l + \varepsilon$ при $k > N$. Положив $\varepsilon = \frac{1 - l\,|\,z\,|}{2|\,z\,|}$, получим

$$\sqrt[k]{|\,c_k\,|} < l + \frac{1 - l|\,z\,|}{2\,|\,z\,|} = \frac{1 + l|\,z\,|}{2\,|\,z\,|}$$

или

$$|\,z\,| \sqrt[k]{|\,c_k\,|} < \frac{1 + l|\,z\,|}{2} = q < 1.$$

Получающиеся отсюда неравенства $|\,c_k z^k\,| < q^k,\ k > N,$ дают абсолютную сходимость ряда (0.30) при $|\,z\,| < \frac{1}{l}$.

Пусть теперь $|\,z\,| > \frac{1}{l}$. По определению верхнего предела для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечное множество индексов $k_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ для которых $\sqrt[k_n]{|\,c_{k_n}\,|} > l - \varepsilon$. Положив теперь $\varepsilon = \frac{l\,|\,z\,|-1}{|\,z\,|}$, будем иметь $|\,z\,|\sqrt[k_n]{|\,c_{k_n}\,|} > 1$ и, следовательно, $|\,c_{k_n} z^{k_n}\,| > 1$. Отсюда заключаем,
что при $|\,z\,| > \frac{1}{l}$ не выполняется необходимое условие сходимости ряда (0.30), т. е. он расходится.

Первая теорема Абеля. *Если ряд* (0.30) *сходится в точке* $z_0 \neq 0$, *то он абсолютно сходится в круге* $|\,z\,| < |\,z_0\,|$.

**Доказательство**. В самом деле, из условия теоремы и теоремы Коши–Адамара следует, что $|\,z_0\,| \le \frac{1}{l}$, и по теореме Коши–Адамара ряд (0.30) абсолютно сходится при $|\,z\,| < |\,z_0\,| \le \frac{1}{l}$.

Круг $|\,z\,| < \frac{1}{l}$, внутри которого степенной ряд (0.30) абсолютно сходится, а вне его замыкания — расходится, называется кругом сходимости, а число

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|\,c_k\,|}} \tag{0.31}$$

— радиусом сходимости этого ряда. Равенство (0.31) называется формулой Коши–Адамара.

Степенной ряд, вообще говоря, не сходится равномерно в своем круге сходимости $|\,z\,| < R$, что показывает пример ряда

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

с единичным кругом сходимости. Поскольку для этого ряда

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}\,,$$

то при любом $n$ имеем

$$S(z) - S_n(z) = \frac{z^{n+1}}{1-z} \quad \text{и} \quad \sup_{|\,z\,|<1} |\,S(z) - S_n(z)\,| = \sup_{|\,z\,|<1} \frac{|\,z\,|^{n+1}}{|1-z\,|} = \infty\,.$$

Однако *степенной ряд* (0.30) *равномерно сходится в любом замкнутом круге* $|z| \le r < R$, так как мажорируется в нем сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$. Отсюда следует, что *сумма степенного ряда непрерывна в его круге сходимости.*

В случае, когда $0 < R < \infty$, на окружности $|z| = R$ — границе круга сходимости — степенной ряд (0.30) может:

а) расходиться во всех ее точках;

б) в одних ее точках сходиться, а в других — расходиться;

в) сходиться (и даже абсолютно и равномерно) на всей границе круга сходимости, — что соответственно показывают следующие примеры:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}\,.$$

Вторая теорема Абеля. *Если степенной ряд* (0.30) *с радиусом сходимости* $R$, $0 < R < \infty$, *сходится в точке* $z_0$ *окружности* $|z| = R$, *то его сумма* $S(z) \to S(z_0)$, *когда* $z \to z_0$ *по некасательному пути, т. е. так, что нетупой угол между отрезком* $[z, z_0]$ *и касательной к окружности* $|z| = R$ *в точке* $z_0$ *больше некоторого числа* $\theta_0$, $0 < < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что $R = 1$, $z_0 = 1$ и $S(1) = 0$. В самом деле, замена $z = z_0 \zeta$ переводит ряд (0.30) в ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k {z_0}^k \zeta^k\,,$$

причем круг $|z| = |z_0| \cdot |\zeta| < R$ переходит в круг $|\zeta| < 1$, а точка $z = z_0$ — в точку $\zeta = 1$. Кроме того, если $S(1) \ne 0$, то рассматривая ряд

$$S^*(z) = c_0 - S(1) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k\,,$$

будем иметь $S^*(1) = 0$.

Итак, нам следует показать, что $S(z) \to 0$ при $z \to 1$, причем

$$|z| < 1, \quad \frac{\pi}{2} + \theta_0 < \arg(z-1) < \frac{3\pi}{2} - \theta_0. \tag{0.32}$$

Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k\,, \tag{0.33}$$

радиус сходимости которого равен единице. В силу абсолютной сходимости рядов (0.30) и (0.33) при $|z|<1$ имеет смысл произведение

$$S(z)\,\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}z^k=\sum_{n=0}^{\infty}S_n z^n, \tag{0.34}$$

где $S_n$ представляет собой частичную сумму ряда (0.30) при $z=1$ : $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}c_k$. Очевидно, радиус сходимости ряда (0.34) не меньше единицы. Но он не может быть и больше нее, так как в противном случае радиус сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k=S(z)=(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}S_n z^n \tag{0.35}$$

тоже был бы больше единицы, что противоречит предположению.

Перепишем второе из равенств (0.35) в виде

$$S(z)=(1-z)\sum_{n=0}^{N}S_n z^n+(1-z)\sum_{n=N+1}^{\infty}S_n z^n. \tag{0.36}$$

В силу того, что $S(1)=0$, для любого $\varepsilon>0$ натуральное число $N$ можно выбрать настолько большим, чтобы

$$|S_n|<\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\quad\text{при}\quad n>N,$$

вследствие чего из (0.36) получим

$$\begin{aligned}|S(z)|&\le|1-z|\sum_{n=0}^{N}|S_n|\cdot|z|^n+|1-z|\sum_{n=N+1}^{\infty}|S_n|\cdot|z|^n<\\&<|1-z|\sum_{n=0}^{N}|S_n|+\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\,\frac{|1-z|\cdot|z|^{N+1}}{1-|z|}<\\&<|1-z|\,M+\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\,\frac{|1-z|}{1-|z|},\end{aligned} \tag{0.37}$$

где $M=\sum\limits_{n=0}^{N}|S_n|$.

Возьмем теперь $z$, удовлетворяющее условиям (0.32) и

$$|\arg z| < \theta_0 \,. \tag{0.38}$$

Последнее условие по существу не является ограничением, поскольку для любого $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ оно выполняется для $z$, достаточно близких к единице, например, для $z$ из круга $|z-1| < \sin\theta_0$.

Когда $z=x$, $x\in(0,1)$, то $|1-z|=1-|z|$, поэтому при $z$, настолько близких к единице, чтобы

$$|1-z| < \frac{\varepsilon}{2M}\,, \tag{0.39}$$

из (0.37) в силу (0.39) получаем $|S(z)|<\varepsilon$.

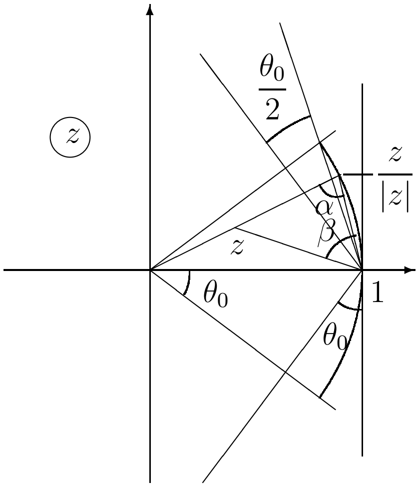

Рис. 4

Если же $z\notin(0,1)$, то рассмотрим треугольник с вершинами в точках $\frac{z}{|z|}$, 1, $z$ и углами при вершинах $\frac{z}{|z|}$, 1, равными $\alpha$, $\beta$ соответственно (см. Рис. 4).

Заметим, что в силу (0.32) и (0.38) угол при вершине в точке $z=1$, т.е. угол между сторонами $[z,1]$ и $[\frac{z}{|z|},1]$ содержит один из углов $\frac{\pi+\theta_0}{2} < |\arg(z-1)| < \frac{\pi}{2}+\theta_0$ раствора $\frac{\theta_0}{2}$, поэтому $\beta > \frac{\theta_0}{2}$, и следовательно, по теореме синусов получим

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{1}{\sin\beta} < \frac{1}{\sin\dfrac{\theta_0}{2}}\,. \tag{0.40}$$

Выбрав еще $z$, удовлетворяющее условию (0.39), из (0.37) в силу (0.40) получаем $|S(z)|<\varepsilon$, что завершает доказательство теоремы.

Поскольку согласно (0.6) – (0.8) имеем

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,,\ \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,,\ \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \quad (0.41)$$

а стоящие здесь степенные ряды равномерно сходятся в любом круге $|\,z\,| < R < \infty$, то определенные этими рядами функции непрерывны на всей комплексной плоскости $z$.

Из (0.10) при $\alpha = z$, $t = 2k\pi i$ получим

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z,$$

т.е. функция $e^z$ является периодической с основным периодом $2\pi i$.

Из формулы Эйлера (0.9) при $\alpha = \pm\, z$ легко получаются формулы

$$\cos z = \frac{1}{2}\,(e^{iz} + e^{-iz})\,, \quad \sin z = \frac{1}{2i}\,(e^{iz} - e^{-iz})\,. \qquad (0.42)$$

Можно убедиться в справедливости для функций $\cos z, \sin z$ всех формул тригонометрии. Так, равенство $\sin z = 0$ в силу (0.42) дает $e^{iz} - e^{-iz} = 0$ или $e^{2iz} = 1 = e^{2k\pi i}$, т. е. нули функции $\sin z$ имеют вид $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ Аналогично получим, что $\cos z = 0$ при $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Однако $\cos z$ и $\sin z$ не ограничены на комплексной плоскости $z$. Например,

$$|\,2\cos z\,|^2 = \big(e^{iz} + e^{-iz}\big)\big(e^{-i\overline{z}} + e^{i\overline{z}}\big) = e^{-2y} + e^{2y} + 2\cos 2x \to \infty$$

при $z \to \infty$ так, что $|\,y\,| = |\,\Im m z\,| \to \infty$.

Введем еще гиперболические функции

$$\mathrm{ch} z = \frac{1}{2}\,\big(e^z + e^{-z}\big), \quad \mathrm{sh} z = \frac{1}{2}\,\big(e^z - e^{-z}\big).$$

В силу (0.42) они связаны с тригонометрическими функциями соотношениями

$$\cos iz = \mathrm{ch}\, z, \quad \sin iz = i\, \mathrm{sh}\, z.$$

# Глава 1

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

## 1.1. Дифференцирование функции комплексного переменного. Аналитичность

Пусть $w=f(z)=u(x,\, y)+iv(x,\, y)$ — функция, определенная в области $D$ комплексной плоскости $z$.

Говорят, что функция $f(z)$ дифференцируема (моногенна) в точке $z\in D$, если существует предел

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},\ z+\Delta z\in D.$$

Этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке $z$ и обозначается через $f'(z)$.

Поскольку в случае моногенности функции $f(z)$ предел $f'(z)$ не зависит от способа стремления $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ к нулю, то, положив сначала $\Delta z=\Delta x$ $(\Delta y=0)$, а потом $\Delta z=i\Delta y$ $(\Delta x=0)$, получим

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\Big[\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\,\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\Big]=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}=$$
$$=\lim_{\Delta y\to 0}\Big[\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}\Big]=\frac{\partial v}{\partial y}-i\,\frac{\partial u}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.1}$$

Равенства (1.1) называются условиями Коши–Римана.

Таким образом, если функция $f(z)$ моногенна в точке $z$, то существуют частные производные $u_x$, $u_y$, $v_x$, $v_y$, которые связаны между собой условиями (1.1).

Одного выполнения условий Коши–Римана недостаточно для моногенности $f(z)$, что показывает пример функции

$$f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases} \tag{1.2}$$

Заметим сначала, что если для функции $f(z)$ имеем $f(0)=0$, то ее производную $f'(0)$ можно вычислять как $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)}{z}$, поэтому для функции (1.2) в точке $z=0$, полагая $z=x$, а затем $z=iy$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\,e^{-\frac{1}{x^4}}=u_x+iv_x=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(iy)}{iy}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{iy}\,e^{-\frac{1}{y^4}}=v_y-iu_y=0,$$

т. е. $u_x=u_y=v_x=v_y=0$ в точке $z=0$, и условия (1.1) выполнены, но $f(z)$ не моногенна, даже не непрерывна в точке $z=0$, так как $f[(1+i)x]=$ $=e^{\frac{1}{4x^4}}\to\infty$ при $x\to 0$.

Покажем, что при дополнительном требовании дифференцируемости функций $u(x,\, y)$, $v(x,\, y)$ в точке $z$ выполнение условий Коши–Римана является и достаточным для моногенности функции $f(z)=$ $=u+iv$ в точке $z$.

Действительно, в силу дифференцируемости функций $u(x,y)$, $v(x,y)$ в точке $z$ имеем

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\Delta y+o(|\Delta z|),\ \Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\,\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\,\Delta y+o(|\Delta z|),\quad (1.3)$$

где $|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. Введя обозначения

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\Big),\quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\Big)\qquad (1.4)$$

и учитывая, что

$$\Delta x=\frac{1}{2}(\Delta z+\Delta\overline{z}),\quad \Delta y=\frac{1}{2i}(\Delta z-\Delta\overline{z}),$$

равенства (1.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Delta f=\Delta u+i\Delta v=\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Delta x+\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\Delta y+o(\Delta z)=\\ =\frac{\partial f}{\partial z}\,\Delta z+\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\,\Delta\overline{z}+o(\Delta z),\end{aligned}\qquad (1.5)$$

где $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ выражаются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big)(u+iv) = \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\Big(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big], \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)(u+iv) = \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big] \end{aligned} \tag{1.6}$$

и называются формальными производными функции $f(z)$ по $z$ и $\overline{z}$ соответственно.

Из (1.6) видно, что условия Коши – Римана в комплексной записи принимают вид $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$, поэтому из (1.5) получим существование предела

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \lim_{\Delta z\to 0}\frac{o(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)\,,$$

что и требовалось доказать.

Из равенства $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$ следует, что $\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) + \eta$, где $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\eta = 0$, поэтому для приращения $\Delta f$ функции $w = f(z)$ в точке $z$ имеем

$$\Delta w = \Delta f = f'(z)\Delta z + \eta\,\Delta z.$$

Выражение $f'(z)\Delta z$ — главная линейная (относительно $\Delta z$) часть приращения $\Delta f$ — называется дифференциалом функции $f(z)$ в точке $z$ и обозначается через $dw=d\,f(z)=f'(z)\Delta z$. В частности, если $f(z)=z$, то $d\,f=dz=\Delta z$, поэтому можно написать

$$d\,f(z) = f'(z)\,dz \quad \text{или} \quad f'(z) = \frac{d\,f(z)}{dz}\,.$$

Заметим, что все правила дифференцирования действительных функций действительного переменного переносятся на функции комплексного переменного.

Функция $f(z)$ называется аналитической в области $D$, если она моногенна в каждой точке $z\in D$.

Если мы будем говорить, что функция $f(z)$ аналитична в точке $z$, то под этим будем подразумевать, что она аналитична в некоторой окрестности этой точки.

## 1.2. Аналитичность суммы степенного ряда

Заметим сначала, что если $R > 0$ — радиус сходимости ряда

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \tag{1.7}$$

то радиус сходимости ряда

$$S_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}, \tag{1.8}$$

полученного из предыдущего почленным дифференцированием, тоже равен $R$. Это следует из того, что $S_0(0) = c_1$, $S_0(z) = \frac{1}{z} \sum\limits_{k=1}^{\infty} k c_k z^k$ при $z \neq 0$,

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|\,c_k\,|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\ \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\,c_k\,|},$$

и из формулы Коши – Адамара.

Пусть теперь $z$ — произвольная точка круга $|\,z\,| < R$ и $\Delta z$ такое, что $|\,z+\Delta z| < R$. Очевидно, что

$$\begin{gathered}\Bigl|\frac{S(z+\Delta z) - S(z)}{\Delta z} - S_0(z)\Bigr| \le \\ \le \Bigl|\sum_{k=1}^{N} c_k \bigl[(z+\Delta z)^{k-1} + z(z+\Delta z)^{k-2} + \ldots + z^{k-1} - k z^{k-1}\bigr]\Bigr| + \\ + \Bigl|\sum_{k=N+1}^{\infty} c_k \bigl[(z+\Delta z)^{k-1} + z(z+\Delta z)^{k-2} + \ldots + z^{k-1}\bigr]\Bigr| + \Bigl|\sum_{k=N+1}^{\infty} k c_k z^{k-1}\Bigr|,\end{gathered} \tag{1.9}$$

где $N$ — некоторое натуральное число. Возьмем число $r$, $0 < r < R$, такое, что $|\,z\,| < r$ и $|\,z+\Delta z| < r$.

Из абсолютной сходимости ряда (1.8) при $|\,z\,| < R$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(r, \varepsilon)$, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k\,|\,c_k\,|\,r^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.10}$$

При данном $N$, учитывая неравенство (1.10) и выбранное $r$, получим, что второе и третье слагаемые правой части (1.9) меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, а в силу непрерывности степенных функций $z^m$, $m \in \mathbb{N}$, число $\Delta z$ можно выбрать

настолько близким к нулю, чтобы и первое слагаемое было меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, поэтому в итоге получим

$$\left| \frac{S(z+\Delta z) - S(z)}{\Delta z} - S_0(z) \right| < \varepsilon.$$

Тем самым доказана аналитичность $S(z)$ при $|\,z\,| < R$ и справедливость равенства $S'(z) = S_0(z)$, т. е. степенной ряд можно почленно дифференцировать в его круге сходимости, причем сумма почленно продифференцированного ряда равна производной суммы исходного ряда.

Точно так же можно доказать, что сумма $S'(z)$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kc_k z^{k-1}$ является аналитической в круге $|\,z\,| < R$ функцией, причем

$$S''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, c_k z^{k-2},$$

и вообще, сумма степенного ряда (1.7) имеет в круге $|\,z\,| < R$ производную любого порядка, для которой справедливо равенство

$$S^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)\, c_k z^{k-n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

из которого при $z=0$ получаем формулы

$$c_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

## 1.3. Конформное отображение

Пусть $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — аналитическая в области $D$ функция, причем для некоторой точки $z_0 \in D$ имеем

$$f'(z_0) \neq 0\,. \tag{1.11}$$

Поскольку в силу (1.1)

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |\,f'(z)\,|^2\,,$$

то условие (1.11) равносильно тому, что

$$\frac{D(u,\,v)}{D(x,\,y)}\Big|_{z=z_0} \neq 0\,,$$

и по теореме о неявных функциях система уравнений $u=u(x,\,y)$, $v=v(x,\,y)$ в некоторой окрестности точки $w_0=f(z_0)$ определяет однозначные непрерывные функции $x=x(u,\,v)$, $y=y(u,\,v)$ со значениями в окрестности точки $z_0$. Нетрудно показать, что при непрерывном отображении открытого множества прообраз любого открытого множества открыт и связность множества сохраняется, поэтому *достаточно малая окрестность точки* $z_0$ взаимно однозначно *отображается функцией* $w=f(z)$ *на некоторую область, содержащую точку* $w_0$. Обратная функция $z=f^{-1}(w)$ будет непрерывной в некоторой окрестности точки $w_0$ и дифференцируемой в самой точке $w_0$, причем

$$f^{-1\,\prime}(w_0)=\lim_{\Delta w\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta w}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta w}{\Delta z}}=\frac{1}{f'(z_0)}\,.$$

Если $f'(z)\neq 0$ в каждой точке области $D$, то будем говорить, что функция $f(z)$ локально однолистна в $D$. Заметим, что из локальной однолистности не следует однолистность, что показывает пример функции $w=z^2$ в области $0<|z|<1$, $0<\arg z<\dfrac{5\pi}{4}$.

Выясним теперь геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции. Пусть в области $D$ задана аналитическая функция $w=f(z)$, удовлетворяющая условию (1.11), и пусть $\gamma$ — проходящая через точку $z_0$ гладкая кривая Жордана с уравнением $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $\alpha\le t\le\beta$. Если $z_0=z(t_0)$, $t_0\in(\alpha,\,\beta)$, то

$$z'(t_0)\neq 0. \tag{1.12}$$

Функция $w=f(z)$ отображает кривую $\gamma$ на некоторую кривую $\Gamma=f(\gamma)$, проходящую через точку $w_0=f(z_0)$. Уравнение кривой $\Gamma$ имеет вид $w=w(t)=f[\,z(t)\,]=u(t)+iv(t)$, причем в силу (1.11) и (1.12) имеем:

$$w'(t_0)=f'(z_0)z'(t_0)\neq 0. \tag{1.13}$$

Поскольку

$$dz=z'(t)dt=[\,x'(t)+iy'(t)\,]\,dt,\quad ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=|\,z'(t)\,|\,dt,$$

$$dw=w'(t)\,dt=[\,u'(t)+iv'(t)\,]\,dt,\; d\sigma=\sqrt{[u'(t)]^2+[v'(t)]^2}dt=|\,w'(t)\,|\,dt,$$

где $ds$ и $d\sigma$ — элементы длины дуги кривых $\gamma$ и $\Gamma$ в точках $z = z(t)$ и $w = w(t)$ соответственно, а в силу (1.13) имеем

$$\frac{dw}{dz}\bigg|_{t=t_0} = \frac{w'(t_0)}{z'(t_0)} = f'(z_0),$$

то мы получаем равенство

$$|\,f'(z_0)\,| = \frac{d\sigma_0}{ds_0}\,,$$

где $ds_0$ и $d\sigma_0$ — элементы длины дуги кривых $\gamma$ и $\Gamma$ в точках $z_0 = z(t_0)$ и $w_0 = w(t_0) = f(z_0)$ соответственно.

Таким образом, модуль отличной от нуля производной аналитической функции $f(z)$ равен коэффициенту искажения элемента длины дуги в точке $z_0$ при отображении с помощью функции $w = f(z)$ и не зависит от направления дуги в этой точке, поэтому мы будем говорить, что при указанном отображении в точке $z_0$ имеет место постоянство искажения.

В силу (1.13) можно написать также, что (с точностью до $2k\pi$)

$$\arg f'(z_0) = \arg w'(t_0) - \arg z'(t_0), \tag{1.14}$$

и поскольку $\arg z'(t_0)$ и $\arg w'(t_0)$ дают углы наклона касательных к кривым $\gamma$ и $\Gamma$ в точках $z_0$ и $w_0$ соответственно (см. Рис. 5), то

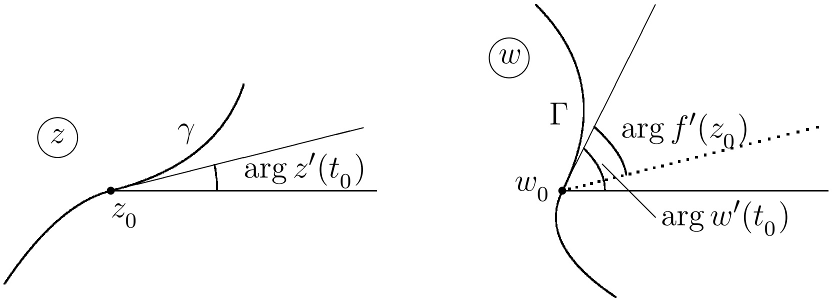

Рис. 5

аргумент производной аналитической функции $f(z)$ равен углу поворота кривой $\gamma$ в точке $z_0$ при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

Пусть теперь $\gamma_1$ — отличная от $\gamma$ гладкая кривая Жордана, проходящая через точку $z_0$, а $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$ — ее образ. Очевидно, что кривая $\gamma_1$ в точке $z_0$ поворачивается при отображении $w = f(z)$ на тот же угол (равный $\arg f'(z_0)$), что и кривая $\gamma$, поэтому угол между кривыми $\gamma$ и $\gamma_1$ в точке $z_0$ равен углу между их образами $\Gamma$ и $\Gamma_1$ в точке $w_0 = f(z_0)$. Другими словами, в каждой точке $z \in D$, в которой $f'(z) \neq 0$, при отображении с помощью функции $w = f(z)$ имеет место консерватизм углов.

Конформным отображением области $D$ называется топологическое, т. е. взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение этой области, при котором в каждой точке $z \in D$ имеет место консерватизм углов и постоянство искажения.

Из геометрического смысла модуля и аргумента производной непосредственно следует справедливость утверждения: *если функция* $w = f(z)$ *осуществляет отображение, обладающее в каждой точке* $z$ *области* $D$ *консерватизмом углов и постоянством искажения, то она аналитична в* $D$*, причем* $f'(z) \neq 0$.

В силу последнего утверждения *конформное отображение осуществляется однолистной аналитической функцией* $w = f(z)$ *с производной* $f'(z) \neq 0$.

Позже будет доказано, что *у однолистной аналитической в области* $D$ *функции* $f(z)$ *производная* $f'(z) \neq 0$ *всюду в* $D$. Тогда обратная функция $z = f^{-1}(w)$ обладает на множестве $f(D)$ отличной от нуля производной, а следовательно, является и непрерывной функцией. Отсюда, ввиду сказанного при обсуждении вопроса об обращении функции комплексного переменного, следует утверждение: *однолистная аналитическая функция* $w = f(z)$ *конформно отображает область своего задания* $D$ *на некоторую область* $D_1$ плоскости $w$, причем обратная функция $f^{-1}(w)$ однолистна и аналитична в $D_1$.

Рассмотрим теперь отображение с помощью функции $w = \overline{f(z)}$, где $f(z)$ осуществляет конформное отображение области $D$. Очевидно, что при этом отображении в каждой точке $z \in D$ имеет место постоянство искажения, а углы сохраняются по абсолютной величине, но меняют знак. Такое отображение называется конформным второго рода или антиконформным, а осуществляющая его функция — антианалитической. В терминах формальных производных это означает, что $w_z = 0$ в области $D$.

Главная линейная часть приращения аналитической в области $D$ функции $w=f(z)$

$$\omega - w_0 = f'(z_0)(z - z_0) \tag{1.15}$$

обладает тем свойством, что при $f'(z_0) \neq 0$ она переводит окружность $|\,z-z_0\,|=r$ в окружность $|\,\omega - w_0\,|=\rho=|\,f'(z_0)\,|\,r$ с сохранением направления обхода. Это следует из того, что в силу (1.15)

$$|\,\omega - w_0\,| = |\,f'(z_0)\,|\cdot|\,z - z_0\,|, \quad \arg(\omega - w_0) = \arg f'(z_0) + \arg(z - z_0).$$

Обратно, если частные производные $u_x, u_y, v_x, v_y$ непрерывны и главная линейная часть приращения функции $f(z)$

$$\omega - w_0 = f_{z_0}(z - z_0) + f_{\overline{z}_0}(\overline{z} - \overline{z}_0), \tag{1.16}$$

где

$$f_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z=z_0}, \quad f_{\overline{z}_0} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big|_{z=z_0},$$

переводит окружность с центром в каждой точке $z_0 \in D$ в окружность с центром в точке $w_0=f(z_0)$, то функция $f(z)$ аналитична либо антианалитична в $D$.

В самом деле, в силу (1.16) имеем

$$|\,\omega - w_0\,|^2 = \big(|f_{z_0}|^2 + |f_{\overline{z}_0}|^2\big)|z - z_0|^2 + 2\Re e\big[f_{z_0}\overline{f_{\overline{z}_0}}(z - z_0)^2\big]. \tag{1.17}$$

Так как по условию окружность $|\,z-z_0\,|=r$ переходит в окружность $|\,\omega-w_0\,|=\rho$, то в равенстве (1.17) мы должны иметь $f_{z_0}\overline{f_{\overline{z}_0}}=0$; при этом либо $f_{\overline{z}_0}=0$, $f_{z_0}\neq 0$, либо $f_{z_0}=0$, $f_{\overline{z}_0}\neq 0$, ибо одновременное выполнение равенств $f_{z_0}=0$, $f_{\overline{z}_0}=0$ означает, что окружность $|\,z-z_0\,|=$ $=r$ переводится главной линейной частью приращения функции $f(z)$ в точку $w=w_0$.

Пусть в некоторой точке $z_0 \in D$ имеем первый случай: $f_{\overline{z}_0}=0$, $f_{z_0}\neq 0$. Докажем, что тогда функция $f(z)$ аналитична в области $D$.

Действительно, пусть $E=\{z\in D : f_{\overline{z}}=0\}=\{z\in D : f_z\neq 0\}$, $E_1=$ $=\{z\in D : f_z=0\}=\{z\in D : f_{\overline{z}}\neq 0\}$. Ясно, что $E\cup E_1=D$, $E\cap E_1=\emptyset$.

Далее, в силу непрерывности частных производных $u_x$, $u_y$, $v_x$, $v_y$ формальные производные $f_z$, $f_{\overline{z}}$ тоже непрерывны в области $D$. Нам надо доказать, что $E=D$. Поскольку $E\neq\emptyset$, то для этого достаточно показать, что $\partial E\cap D=\emptyset$. Предположим, от противного, что $\partial E\cap D\neq\emptyset$ и $z_*\in\partial E\cap D$. Тогда, если $z_*\in E$, т. е. $f_{\overline{z}_*}=0$, то по определению граничной точки $z_*$ является предельной точкой множества $E_1$, а в силу непрерывности $f_z$ отсюда следует, что и $f_{z_*}=0$, что невозможно; если же $z_*\in E_1$, т. е. $f_{z_*}=0$, то $z_*$ будет предельной точкой множества $E$, а значит, и $f_{\overline{z}_*}=0$, что тоже невозможно. Таким образом, в рассмотренном случае $f(z)$ будет аналитической в области $D$ функцией.

Во втором случае, когда $E_1\cap D\neq\emptyset$, таким же образом доказывается антианалитичность функции $f(z)$ в области $D$.

## 1.4. Обращение некоторых элементарных функций. Понятия римановой поверхности и точки ветвления

Когда речь идет об обращении аналитической функции, следует выяснить, в каких областях она однолистна.

Областью однолистности аналитической в области $D$ функции $f(z)$ называется любая максимальная подобласть $\Delta\subset D$, в которой $f(z)$ однолистна, т.е. такая подобласть $\Delta$, что не существует другой подобласти $\Delta_1\supset\Delta$, в которой эта функция однолистна.

Для того чтобы найти область однолистности степенной функции

$$w=z^n, \tag{1.18}$$

где $n$ — натуральное число, $n>1$, рассмотрим значения $z_1=|z_1|e^{i\varphi_1}$ и $z_2=|z_1|e^{i\varphi_2}$, $\varphi_2\neq\varphi_1+2m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$, переменного $z$ (поскольку при $|z_2|\neq|z_1|$ получим $|z_1|^n\neq|z_2|^n$ и следовательно, $z_1^n\neq z_2^n$). Так как для разности соответствующих значений $w_1$ и $w_2$ имеем $w_1-w_2=$ $=|z_1|\bigl(e^{in\varphi_1}-e^{in\varphi_2}\bigr)$, то $w_1=w_2$ при $\varphi_2\neq\varphi_1+2m\pi$ только тогда, когда $\varphi_2=\varphi_1+\dfrac{2k\pi}{n}$ $(k\neq mn)$. Следовательно, всякий угол раствора $\dfrac{2\pi}{n}$ с вершиной в точке $z=0$ будет областью однолистности функции (1.18).

Разделим комплексную плоскость $z$ на $n$ областей

$$D_k:\ \frac{2k\pi}{n}<\arg z<\frac{2(k+1)\pi}{n},\ k=0,1,\ldots,n-1.$$

Каждый луч $\arg z = c$ функция (1.18) переводит в луч $\arg w = nc$, а значит, область $D_k$ — в область $\Delta$, представляющую собой плоскость $w$ без луча $w \geq 0$ или, как еще принято говорить, плоскость $w$ с разрезом вдоль луча $w \geq 0$. При этом граничные лучи $\arg z = \frac{2k\pi}{n}$ и $\arg z = \frac{2(k+1)\pi}{n}$ области $D_k$ переходят соответственно в верхний и нижний края разреза области $\Delta$.

Так как $w' = nz^{n-1} \neq 0$ при $z \in D_k$, то каждая из областей $D_k$, как область однолистности функции (1.18), конформно отображается ею на область $\Delta$. Обратную функцию, определенную в $\Delta$, значения которой лежат в $D_k$, обозначим через $z_k = \left(w^{\frac{1}{n}}\right)_k$. Очевидно, что

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg w + 2k\pi}{n}}, \ 0 < \arg w < 2\pi.$$

Рассматривать каждую из функций $z_k$ как отдельную функцию нецелесообразно, потому что, например, область $D : |\arg z| < \frac{\pi}{n}$, также являющаяся областью однолистности функции (1.18), отображается этой функцией на плоскость $w$ с разрезом вдоль луча $w \leq 0$, а обратная функция

$$z = w^{\frac{1}{n}} = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg w}{n}}, \ |\arg w| < \pi,$$

при $0 < \arg w < \pi$ совпадает с $z_0$, а при $-\pi < \arg w < 0$ — с $z_{n-1}$. Поэтому функции $z_k$ называют ветвями многозначной функции $z = w^{\frac{1}{n}}$. Каждая функция $z_k$ аналитична в $\Delta$, причем

$$\frac{dz_k}{dw} = \frac{1}{nz_k^{n-1}} = \frac{1}{n}\left[\left(w^{\frac{1}{n}}\right)_k\right]^{1-n} = \frac{1}{nw}\left(w^{\frac{1}{n}}\right)_k.$$

При отображении (1.18) во взаимно однозначном соответствии находятся лишь точки $z = 0, w = 0$ и $z = \infty, w = \infty$, каждой же точке $w \neq 0, \infty$ ставится в соответствие $n$ точек $z_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Будем говорить, что осуществляемое функцией (1.18) отображение при $n>1$ является многолистным ($n$-листным). Чтобы раскрыть сущность такого названия и наглядно представить это отображение, рассмотрим наложенные друг на друга $n$ листов области $\Delta : \Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$, где область $\Delta_k$ поставлена в соответствие области $D_k$. Отождествим или, как еще говорят, склеим нижний край разреза области $\Delta_0$ с верхним краем разреза области $\Delta_1$, свободный нижний край разреза области $\Delta_1$ с верхним краем разреза области $\Delta_2$ и т. д., свободный нижний край разреза области $\Delta_{n-1}$ со свободным верхним краем разреза области $\Delta_0$. Полученная $n$-листная область называется римановой поверхностью многозначной функции $z = w^{\frac{1}{n}}$. Соотношение (1.18) осуществляет взаимно однозначное соответствие между расширенной комплексной плоскостью $z$ и римановой поверхностью $n$-значной функции $z=w^{\frac{1}{n}}$, которое является конформным всюду, кроме точек $z=0$ и $z=\infty$. Точки $w=0$ и $w=\infty$ — образы точек $z=0$ и $z=\infty$ — обладают следующим свойством: если, выйдя из фиксированной точки $w\in\mathbb{C}^*$, обойти, например, вокруг точки $w=0$ против часовой стрелки $m$ раз, то при возвращении в эту точку происходит переход от значения ветви $z_k$ в точке $w$ к значению ветви $z_{k+m}$ в этой же точке. Аналогично дело обстоит и с точкой $w=\infty$.

Точка, обход вокруг которой в достаточно малой ее окрестности приводит к другому значению функции при непрерывном ее изменении, называется точкой ветвления этой многозначной функции.

Заметим, что при $m=n$ получим $z_{k+n}=z_k$, а точки $w=0$ и $w=\infty$ называются алгебраическими точками ветвления порядка $n-1$ многозначной функции $z=w^{\frac{1}{n}}$.

В заключение отметим, что ветви $z_k$ $n$-значной функции $z = w^{\frac{1}{n}}$ можно также определить соотношениями

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg w}{n}},\ 2k\pi < \arg w < 2(k+1)\pi,$$

и тогда листы $\Delta_k$, из которых строится риманова поверхность многозначной функции $z=w^{\frac{1}{n}}$, определятся как

$$\Delta_k :\quad 2k\pi < \arg w < 2(k+1)\pi,\ k = 0,\ 1, \ldots,\ n-1.$$

Такое определение листов $\Delta_k$ более наглядно объясняет принцип склеивания, соответствующий теперь непрерывному изменению $\arg w$ при переходе с листа $\Delta_k$ на лист $\Delta_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $\Delta_n = \Delta_0$.

Так как для экспоненциальной функции

$$w = e^z \tag{1.19}$$

из равенства $e^{z_1} = e^{z_2}$ следует, что $z_2 = z_1 + 2k\pi i$, то областью ее однолистности является, например, любая полоса ширины $2\pi$, параллельная действительной оси.

Разделим плоскость $z$ на совокупность полос

$$G_k : \quad 2k\pi < \Im m z < 2(k+1)\pi, \ k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$

При отображени с помощью функции (1.19) прямая $\Im m z = c$ переходит в луч $\arg w = c$. Ввиду того, что $\left(e^z\right)' = e^z \neq 0$, функция (1.19) осуществляет конформное отображение области $G_k$ на рассмотренную выше область $\Delta$, причем прямые $\Im m z = 2k\pi$ и $\Im m z = 2(k+1)\pi$, составляющие границу области $G_k$, переходят соответственно в верхний и нижний края разреза области $\Delta$.

Соотношение (1.19) равносильно равенствам $|\,w\,| = e^{\Re e z}$ и $\arg w = \Im m z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, для обратной функции $z_k = (\log w)_k$ в $\Delta$, значения которой лежат в области $G_k$, в рассматриваемом случае имеем

$$z_k = (\log w)_k = \log|w| + i \arg w + 2k\pi i, \ 0 < \arg w < 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Многозначная функция, обратная экспоненциальной, называется логарифмической функцией, и для нее мы будем пользоваться обозначением $z = \operatorname{Log} w$. Так как все ветви $z_k$, $k \in \mathbb{Z}$, различны, функция $z = \operatorname{Log} w$ бесконечнозначна или, как еще говорят, функция $w = e^z$ бесконечнолистна.

Взяв бесконечное можество листов $\Delta$ : $\ldots, \Delta_{-1}, \Delta_0, \Delta_1, \ldots$, наложенных друг на друга, склеив нижние края разрезов областей $\Delta_k$, соответствующих областям $G_k$, с верхними краями разрезов областей $\Delta_{k+1}$ и исключив точку $w = 0$, получим риманову поверхность многозначной функции $z = \operatorname{Log} w$. Экспоненциальная функция (1.19) конформно отображает плоскость $z$ на полученную риманову поверхность.

Так как при обходе вокруг точки $w = 0$ любое число раз все время происходит переход к новым ветвям многозначной функции $z = \operatorname{Log} w$, то $w=0$ является точкой ветвления — она называется трансцендентной точкой ветвления. Очевидно, что таковой является также точка $w=\infty$.

Для любого комплексного числа $\alpha$ степенную функцию с показателем $\alpha$ и показательную функцию с основанием $\alpha$ определим соответственно соотношениями

$$z^{\alpha}=e^{\alpha \operatorname{Log} z} \quad \text{и} \quad \alpha^{z}=e^{z \operatorname{Log} \alpha}.$$

## 1.5. Дробно-линейное отображение

Условие однолистности дробно-линейной функции

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \tag{1.20}$$

заключается в том, чтобы

$$ad-bc\neq 0. \tag{1.21}$$

В самом деле, при различных значениях $z_1$ и $z_2$ переменного $z$ для разности соответствующих значений $w_1$ и $w_2$ функции (1.20) имеем

$$w_1-w_2=\frac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}, \tag{1.22}$$

что при условии (1.21) дает однолистность осуществляемого функцией (1.20) отображения на расширенной комплексной плоскости $z$.

При рассмотрении дробно-линейной функции (1.20) случай одновременного обращения в нуль постоянных $c$ и $d$, очевидно, исключается, во всех же остальных случаях нарушение условия (1.21) означает, что эта функция постоянна. В дальнейшем отображение (1.20), удовлетворяющее условию (1.21), будем называть невырожденным дробно-линейным отображением.

**1. Приведение невырожденного дробно-линейного отображения к более простым**. Очевидно, что невырожденное линейное отображение

$$w=az+b,\ a\neq 0, \tag{1.23}$$

можно представить в виде суперпозиции трех простейших отображений:

$$\zeta=|\,a\,|\,z, \tag{1.24}$$

$$\omega = e^{i \arg a} \zeta, \tag{1.25}$$

$$w = \omega + b. \tag{1.26}$$

Здесь (1.24) — отображение подобия с центром в точке $z = 0$ и коэффициентом подобия $|a|$, (1.25) — вращение вокруг точки $z=0$ с углом поворота $\arg a$, а (1.26) — параллельный перенос в направлении радиус-вектора точки $b$ на расстояние $|b|$.

Заметим, что отображение (1.23) при $a=1$ является параллельным переносом, а при $a \neq 1$ сводится к повороту на угол $\arg a$ вокруг неподвижной точки $z_0 = \frac{b}{1-a}$ и подобию: $w - z_0 = a(z - z_0)$.

Функция (1.23) осуществляет конформное отображение комплексной плоскости $z$ на комплексную плоскость $w$. Что касается отображения, осуществляемого этой функцией в окрестности бесконечно удаленной точки, то оно будет конформным, если конформность в окрестности точки $z = \infty$ понимать в смысле метрики на сфере Римана, т. е. если под длиной дуги, выходящей из точки $z = \infty$, понимать длину ее образа на сфере Римана, а под углом между двумя кривыми, выходящими из точки $z=\infty$, — угол между их образами на этой сфере.

Очевидно, что функция

$$w = \frac{1}{z} \tag{1.27}$$

конформно отображает расширенную комплексную плоскость $z$ на расширенную комплексную плоскость $w$. Покажем, что функция (1.27) переводит окружность в окружность (прямые тоже будем считать окружностями). В самом деле, если дана окружность

$$A(x^2 + y^2) + bx + b_1 y + C = 0,$$

то ее уравнение в комплексной записи имеет вид

$$Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0,$$

где $B = \dfrac{b + ib_1}{2}$. В результате отображения (1.27) мы получим

$$A + \overline{B}\,\overline{w} + Bw + Cw\overline{w} = 0,$$

т. е. уравнение окружности.

Невырожденное дробно-линейное отображение (1.20) либо является линейным отображением (при $c=0$), либо может быть представлено в виде суперпозиции следующих трех отображений:

$$\zeta = \frac{c^2}{bc-ad}\,z + \frac{cd}{bc-ad}\,, \quad \omega = \frac{1}{\zeta}\,, \quad w = \omega + \frac{a}{c}\,,$$

что следует из тождества

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c(cz+d)} + \frac{a}{c}\,.$$

Отсюда заключаем, что *невырожденное дробно-линейное отображение* (1.20) *окружность* (прямая тоже считается окружностью) *переводит в окружность*, поскольку этим (*круговым*) свойством обладают отображения (1.24) – (1.27).

**2. Симметрия относительно прямой и окружности**. Точки $z$ и $z^*$ называются симметричными относительно окружности с центром в точке $z_0$ радиуса $R$, если они лежат на одном луче, выходящем из точки $z_0$, и произведение их расстояний до этой точки равно $R^2$.

Очевидно, что функции $w=\overline{z}$ (сопряжение) и $w=\frac{R^2}{\overline{z}}$ (инверсия) осуществляют отображение симметрии относительно действительной оси $\Im m z = 0$ и относительно окружности $|\,z\,| = R$ соответственно. Отсюда заключаем, что отображение симметрии относительно прямой

$$z=z_0+te^{i\theta},\ -\infty<t<\infty,$$

имеет вид

$$w = z_0 + e^{2i\theta}(\overline{z} - \overline{z}_0), \tag{1.28}$$

а относительно окружности $|\,z-z_0\,|=R$ —

$$w = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z}_0}. \tag{1.29}$$

Из формулы (1.28) следует, что вращение $w = e^{i\alpha}z$, $\alpha \in \mathbb{R}$, можно представить в виде суперпозиции двух отображений симметрии $\zeta=\overline{z}$ и $w=e^{i\alpha}\overline{\zeta}$ относительно прямых $\Im m z = 0$ и $\zeta = te^{i\frac{\alpha}{2}}$, $-\infty < t < \infty$, а параллельный перенос $w=z+b$ — в виде суперпозиции отображений симметрии $\zeta=e^{2i\theta}\overline{z}$ и $w=\dfrac{b}{2}+e^{2i\theta}\Big(\overline{\zeta}-\dfrac{\overline{b}}{2}\Big)$, где $\theta=\dfrac{\pi}{2}+\arg b$, относительно ортогональных радиус-вектору точки $b$ прямых, проходящих соответственно через точки $z=0$ и $\zeta=\dfrac{b}{2}$.

Очевидно также, что отображение подобия $w=kz$, $k>0$, есть результат суперпозиции двух отображений симметрии $\zeta=\frac{1}{\overline{z}}$ и $w=\frac{k}{\overline{\zeta}}$ относительно окружностей $|\,z\,|=1$ и $|\,\zeta\,|=\sqrt{k}$, а отображение $w=\frac{1}{z}$ — суперпозиции отображений симметрии $\zeta=\frac{1}{\overline{z}}$ и $w=\overline{\zeta}$ относительно единичной окружности и действительной оси.

Отсюда, поскольку, как показано выше, невырожденное дробно-линейное отображение можно представить в виде суперпозиции отображений (1.24)–(1.27), каждое из которых в свою очередь представимо в виде суперпозиции двух отображений симметрии, получаем следующее утверждение: *любое невырожденное дробно-линейное отображение можно представить в виде суперпозиции четного числа отображений симметрии.*

Заметим, что если

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\qquad \omega=\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}=\frac{Az+B}{Cz+D}\,,$$

то, как легко проверить, $AD-BC=(ad-bc)(\alpha\delta-\beta\gamma)$, откуда заключаем, что суперпозиция невырожденных дробно-линейных отображений тоже является невырожденным дробно-линейным отображением. Из (1.28) и (1.29) следует, что суперпозиция двух отображений симметрии является невырожденным дробно-линейным отображением, следовательно, и *суперпозиция любого четного числа отображений симметрии является невырожденным дробно-линейным отображением.*

**3. Основные свойства невырожденного дробно-линейного отображения**. Невырожденное дробно-линейное отображение (1.20) содержит три комплексных параметра, представляющих собой отношение трех из коэффициентов $a$, $b$, $c$, $d$ к четвертому (отличному от нуля). Эти параметры однозначно определяются, например, из требования, чтобы три заданные точки $z_1$, $z_2$, $z_3$ плоскости $z$ перешли соответственно в три заданные точки $w_1$, $w_2$, $w_3$ плоскости $w$.

В самом деле, как видно из (1.22), для разностей $w-w_1$, $w-w_2$, $w_3-w_1$ и $w_3-w_2$, где

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \quad w_k=\frac{az_k+b}{cz_k+d},\ k=1,\ 2,\ 3,$$

в силу (1.22) получим соотношение

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}, \tag{1.30}$$

выражающее инвариантность выражения, стоящего в правой части (1.30) и называемого ангармоническим отношением четырех точек $z_1$, $z_2$, $z$, $z_3$ при невырожденном дробно-линейном отображении. При этом, если одна из точек $z_k$ или $w_k$ является бесконечно удаленной точкой, то разности, содержащие эти точки, в равенстве (1.30) отсутствуют, в чем легко убедиться предельным переходом при $z_k\to\infty$ ($w_k\to\infty$). Разрешая (1.30) относительно $w$, получим искомое дробно-линейное отображение. Оно переводит точки $z_1$, $z_2$, $z_3$ и проходящую через них окружность $C_z$ соответственно в точки $w_1$, $w_2$, $w_3$ и проходящую через них окружность $C_w$, причем из однолистности этого отображения следует, что когда точка $z$ пробегает окружность $C_z$ в определенном направлении, соответствующая ей точка $w$ пробегает окружность $C_w$ тоже в определенном направлении.

Тройки точек $z_1$, $z_2$, $z_3$ и $w_1$, $w_2$, $w_3$ определяют направления обхода на окружностях $C_z$ и $C_w$, причем области, остающиеся при этих обходах слева (справа), при отображении (1.30) соответствуют друг другу. Это следует из конформности этого отображения: углы между касательной, направленной в сторону обхода, и внутренней нормалью в соответствующих точках окружностей $C_z$ и $C_w$ равны.

Заметим, что в случае действительных $a$, $b$, $c$, $d$ действительная ось $\Im m\, z=0$ переходит в действительную ось $\Im m w=0$, а поскольку для дробно-линейной функции (1.20), как видно из (1.22), имеем

$$w'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2},$$

то на оси $\Im m\, z=0$ знак производной $w'(x)$ совпадает со знаком величины $ad-bc$. Поэтому верхняя полуплоскость $\Im m\, z>0$ переходит в верхнюю полуплоскость $\Im m\, w>0$, если $ad-bc>0$, и в нижнюю полуплоскость $\Im m\, w<0$, если $ad-bc<0$.

С помощью теоремы о секущей и касательной к окружности, проведенных через данную точку, убеждаемся, что симметричные относительно окружности (прямой) $C_z$ точки $z$ и $z^*$ являются центрами пучка ортогональных к $C_z$ окружностей. Следовательно, *симметричные относительно окружности (прямой) точки переходят при дробно-линейных отображениях* (в силу их кругового свойства и конформности) *в точки, симметричные относительно образа этой окружности (прямой).*

Точки $w=0$ и $w=\infty$ симметричны относительно любой окружности $|w|=R, R>0$, в частности, относительно единичной окружности $|w|=1$, и так как при отображении (1.20) они соответствуют точкам $z=-\dfrac{b}{a}$ и $z=-\dfrac{d}{c}$, то при требовании, чтобы действительная ось $\Im m\, z=0$ переходила в окружность $|\,w\,|=1$, мы должны иметь: а)$-\dfrac{b}{a}=z_0$, $-\dfrac{d}{c}=\overline{z}_0$ — из-за симметричности точек $-\dfrac{b}{a}$ и $-\dfrac{d}{c}$ относительно прямой $\Im m\, z=0$ и б) $\dfrac{a}{c}=e^{i\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, — в силу имеющих место при $\Im m\, z=0$ равенств

$$|\,w\,| = \left|\,\frac{a}{c}\,\right| \cdot \left|\,\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}\,\right| = \left|\,\frac{a}{c}\,\right| = 1.$$

Следовательно, функция

$$w = e^{i\alpha}\,\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0} \tag{1.31}$$

при $\Im m\, z_0>0$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\Im m\, z>0$ на единичный круг $|\,w\,|<1$. Если же $\Im m\, z_0<0$, то эта функция отображает нижнюю полуплоскость $\Im m\, z<0$ на круг $|\,w\,|<1$.

Рассуждая аналогично и требуя, чтобы при отображении (1.20) единичная окружность $|\,z\,|=1$ перешла в единичную окружность $|\,w\,|=1$, в силу симметричности прообразов точек $w=0$ и $w=\infty$ относительно единичной окружности $|\,z\,|=1$ получим: $-\dfrac{b}{a}=z_0$, $-\dfrac{d}{c}=\dfrac{1}{\overline{z}_0}$, а в силу того, что при $|\,z\,|=1$ имеют место равенства

$$|\,w\,| = \left|\,\frac{a}{c}\cdot\frac{z-z_0}{z-\dfrac{1}{\overline{z}_0}}\,\right| = \left|\,\frac{a\overline{z}_0}{cz}\,\right| \cdot \left|\,\frac{z-z_0}{\overline{z}_0-\dfrac{1}{z}}\,\right| = \left|\,\frac{a\overline{z}_0}{cz}\,\right| \cdot \left|\,\frac{z-z_0}{\overline{z}_0-\overline{z}}\,\right| = \left|\,\frac{a\overline{z}_0}{c}\,\right| = 1,$$

будем иметь: $-\dfrac{a\overline{z}_0}{c}=e^{i\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Тогда функция

$$w = e^{i\alpha}\,\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z} \tag{1.32}$$

при $|\,z_0\,|<1$ конформно отображает круг $|\,z\,|<1$ на круг $|\,w\,|<1$ или, как еще говорят, единичный круг на себя, а при $|\,z_0\,|>1$ — область $|\,z\,|>1$ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на круг $|\,w\,|<1$.

Легко видеть, что для функции (1.32) имеем

$$w'(z) = e^{i\alpha}\frac{1-|\,z_0\,|^2}{(1-\overline{z}_0 z)^2},$$

откуда

$$w'(z_0) = e^{i\alpha}\,\frac{1}{1-|\,z_0\,|^2}, \quad w'(0) = e^{i\alpha}(1-|\,z_0\,|^2), \tag{1.33}$$

так что

$$\arg w'(z_0) = \arg w'(0) = \alpha. \tag{1.34}$$

Дробно-линейная функция, конформно отобржающая верхнюю полуплоскость на себя, как и функции (1.31), (1.32), тоже содержит три действительных параметра, которые определяются единственным образом, например, из требования, чтобы три заданные граничные точки $z_1$, $z_2$, $z_3$ плоскости $z$ перешли соответственно в три заданные граничные точки $w_1$, $w_2$, $w_3$ плоскости $w$ с сохранением направления обхода.

## Глава 2

# ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛА КОШИ

## 2.1. Комплексное интегрирование

На плоскости комплексного переменного $z$ рассмотрим гладкую кривую Жордана $\Gamma$ с началом в точке $a$ и концом в точке $b$ и заданную на ней непрерывную функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Обозначим через $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, следующие друг за другом в положительном направлении фиксированные точки на кривой $\Gamma$, отличные от ее концов, и составим сумму

$$S = \sum_{k=0}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\,, \tag{2.1}$$

где $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ — некоторая точка дуги $\overset{\frown}{z_k z_{k+1}}$ кривой $\Gamma$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $z_0 = a$, $z_{n+1} = b$.

Представляя сумму (2.1) в виде

$$S = S_1 + iS_2 = \sum_{k=0}^{n} [\,u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\,] + \\ + i\sum_{k=0}^{n} [\,v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\,]$$

и устремляя $n$ к $\infty$ при условии, что $\max\limits_{0\le k\le n} |\Delta z_k| \to 0$ при $n \to \infty$, в пределе получим криволинейные интегралы второго рода

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = \int_{\Gamma} u\,dx - v\,dy, \qquad \lim_{n\to\infty} S_2 = \int_{\Gamma} v\,dx + u\,dy,$$

существование которых в принятых предположениях относительно $\Gamma$ и $f(z)$ доказывается в курсе математического анализа. Следовательно, в принятых предположениях существует предел суммы (2.1), который называется *интегралом от функции* $f(z)$ *по кривой* $\Gamma$:

$$\lim_{n\to\infty} S = \int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma} u\,dx - v\,dy + i\int_{\Gamma} v\,dx + u\,dy. \tag{2.2}$$

Напомним, что упомянутый предел не зависит от выбора точек $z_k$ и $\zeta_k$.

Заметим, что если кривая $\Gamma$ задана уравнением $z=z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, то под $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ можно также понимать интеграл

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\,z(t)\,]\,z'(t)\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Re e\{f[\,z(t)\,]\,z'(t)\}\,dt + i\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Im m\{f[\,z(t)\,]\,z'(t)\}\,dt.$$

Из (2.1) очевидно, что наряду с (2.2) существует и предел суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k+1})$, который обозначают символом $\int\limits_{\Gamma^-} f(z)\,dz$, где знак «$-$» при $\Gamma$ означает, что интегрирование по $\Gamma$ происходит в отрицательном направлении. Ясно также, что

$$\int\limits_{\Gamma^-} f(z)\,dz = -\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz. \tag{2.3}$$

Из определения интеграла (2.2) непосредственно вытекают следующие его свойства:

1. Если $f_k(z)$, $k=1,\,2,\,\ldots,\,m$, — определенные на $\Gamma$ непрерывные функции и $c_k$ — комплексные постоянные, то

$$\int\limits_{\Gamma}\Big[\sum_{k=1}^{m} c_k f_k(z)\Big]\,dz = \sum_{k=1}^{m} c_k \int\limits_{\Gamma} f_k(z)\,dz. \tag{2.4}$$

2. Если гладкая кривая $\Gamma$ состоит из $m$ кусков $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$, т. е. $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Gamma_k$, то

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_k} f(z)\,dz, \tag{2.5}$$

причем предполагается, что интегрирование по каждой дуге $\Gamma_k$ происходит в направлении, порожденном направлением интегрирования на $\Gamma$.

Если кусочно-гладкая кривая $\Gamma$ состоит из $m$ гладких кривых $\Gamma_k$, то интеграл по кусочно-гладкой кривой и определяется равенством (2.5).

Заметим, что если граница многосвязной области $D$ состоит из замкнутых кривых Жордана, то положительным направлением на границе $\partial D = \Gamma$ этой области считается направление, оставляющее область слева. Поэтому в случае, когда совокупность $\Gamma$ попарно не пересекающихся замкнутых кусочно-гладких кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ является границей $(m{+}1)$- связной области, причем $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ лежат внутри $\Gamma_0$, можно написать $\partial D = \Gamma = \Gamma_0 \cup \bigl\{ \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Gamma_k^- \bigr\}$, и следовательно, для непрерывной на $\Gamma$ функции $f(z)$ в силу (2.3) получим

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_0} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_k} f(z)\,dz. \tag{2.6}$$

3. Наряду с непрерывной функцией $f(z)$ интегрируема и функция $|\,f(z)\,|$, причем в силу неравенства треугольника и определения длины кривой имеет место неравенство

$$\Bigl|\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz\Bigr| \le \int\limits_{\Gamma} |\,f(z)\,|\cdot|\,dz\,| \le \max_{z\in\Gamma} |\,f(z)\,|\,L, \tag{2.7}$$

где $L$ — длина кривой $\Gamma$.

4. Если заданная на $\Gamma$ последовательность $\{f_n(z)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывных функций равномерно сходится на $\Gamma$ к $f(z)$, то функция $f(z)$ интегрируема (ибо непрерывна) и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Gamma} f_n(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz. \tag{2.8}$$

В самом деле, в силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n(z)\}$ на $\Gamma$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon) > 0$, что $|\,f_n(z) - f(z)\,| < \frac{\varepsilon}{L}$ для всех $z \in \Gamma$ и $n > N$. Поэтому на основании (2.4) и (2.7) имеем

$$\Bigl|\int\limits_{\Gamma} f_n(z)\,dz - \int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz\Bigr| = \Bigl|\int\limits_{\Gamma} [\,f_n(z) - f(z)\,]\,dz\Bigr| \le$$

$$\le \int\limits_{\Gamma} |\,f_n(z) - f(z)\,|\cdot|\,dz\,| < \varepsilon \quad \text{при } n > N,$$

что и доказывает справедливость равенства (2.8).

В частности, если функциональный ряд $f(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ непрерывных на $\Gamma$ функций $f_k(z)$ равномерно сходится на $\Gamma$, то это означает, что последовательность его частичных сумм $S_n(z)$ равномерно сходится на $\Gamma$. Следовательно, в силу (2.8) и (2.4) имеем

$$\int\limits_{\Gamma} [\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)]\,dz = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Gamma} [\sum_{k=1}^{n} f_k(z)]\,dz =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Gamma} f_k(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Gamma} f_k(z)\,dz,$$

т. е. получаем возможность почленного интегрирования равномерно сходящегося на $\Gamma$ ряда непрерывных на этой кривой функций $f_k(z)$.

## 2.2. Теорема Коши

ЛЕММА ГУРСА. *Если функция $f(z)$ непрерывна в области $D$ и $\gamma$ — лежащая в $D$ кусочно-гладкая кривая Жордана, то для любого $\varepsilon>0$ можно указать лежащую в $D$ ломаную $\gamma_P$ с вершинами на $\gamma$ такую, что*

$$\Big|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz - \int\limits_{\gamma_P} f(z)\,dz\Big| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

**Доказательство.** Пусть $G, \overline{G}\subset D$, — область, содержащая кривую $\gamma$, а $l$ — длина $\gamma$. Тогда $\rho=\rho\,(\gamma,\partial G)=\inf\limits_{z\in\gamma,\,\zeta\in\partial G}|z-\zeta\,|>0$, поскольку $\gamma\cap\partial G=\emptyset$. Из равномерной непрерывности $f(z)$ в $\overline{G}$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любых точек $z'$, $z''$ из $\overline{G}$ таких, что $|\,z'-z''\,|<\delta$, выполняется неравенство

$$|\,f(z')-f(z'')\,| < \frac{\varepsilon}{2l}\,. \tag{2.10}$$

Разобьем кривую $\gamma$ точками $z_1, z_2, \ldots, z_n$, следующими друг за другом в положительном направлении и отличными от ее начала $a$ и конца $b$, на дуги $\gamma_k = \overset{\frown}{z_k z_{k+1}}$, $k=0,1,\ldots,n$, $z_0=a$, $z_{n+1}=b$, длина каждой из которых $\sigma(z_k, z_{k+1}) < \min(\delta, \rho)$, и обозначим через $\gamma_P$ ломаную с вершинами в точках $z_k$ (см. Рис. 6). Очевидно, ломаная $\gamma_P$ лежит в области $G$.

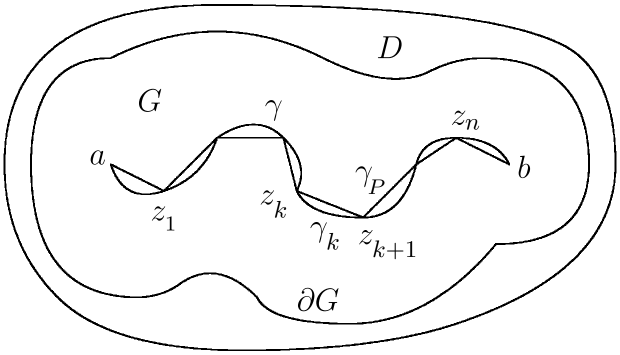

Рис. 6

Заметим, что для интеграла $\int\limits_\Gamma dz$ вдоль кривой $\Gamma$ с началом в точке $a$ и концом в точке $b$ непосредственно из определения получим

$$\int\limits_\Gamma dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \Delta z_k = \lim_{n\to\infty} (z_{n+1} - z_0) = b - a. \tag{2.11}$$

Учитывая свойства 1–3 интеграла и то, что в силу выбора точек $z_k$ для любого $z \in \gamma_k$ $k = 0,1, \ldots, n$, имеем $|z - z_k| < \delta$, из (2.11) и (2.10) заключаем, что имеет место неравенство

$$\Bigl|\int\limits_\gamma f(z)\,dz - \sum_{k=0}^{n} f(z_k)\Delta z_k\Bigr| = \Bigl|\sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\gamma_k} [\,f(z) - f(z_k)\,]\,dz\Bigr| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично убеждаемся также, что

$$\Bigl|\int\limits_{\gamma_P} f(z)\,dz - \sum_{k=0}^{n} f(z_k)\Delta z_k\Bigr| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда следует (2.9).

Теорема Коши. *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D$ и $\gamma$ — любая замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана, лежащая в $D$, то*

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = 0. \tag{2.12}$$

**Доказательство**. Поскольку для кривой $\Gamma$ с началом в точке $a$ и концом в точке $b$ имеем

$$\int\limits_{\Gamma} z\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z_k\Delta z_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z_{k+1}\Delta z_k,$$

то

$$\int\limits_{\Gamma} z\,dz = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(z_k + z_{k+1})\Delta z_k =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\bigl(z_{k+1}^2 - z_k^2\bigr) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\bigl(z_{n+1}^2 - z_0^2\bigr) = \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2). \tag{2.13}$$

В силу (2.11) и (2.13) для функций $f(z)=1$ и $f(z)=z$ теорема Коши верна, т. е.

$$\int\limits_{\gamma} dz = \int\limits_{\gamma} z\,dz = 0. \tag{2.14}$$

Для произвольной функции $f(z)$ сначала рассмотрим случай, когда $\gamma$ является границей $\gamma_{\Delta}$ треугольника $\Delta\subset D$.

Пусть $\Bigl|\int\limits_{\gamma_\Delta} f(z)\,dz\Bigr| = M$. Соединив середины сторон треугольника $\Delta$ прямолинейными отрезками, разобьем его на четыре конгруэнтных треугольника $\Delta^{(k)}$, $k=1, 2, 3, 4$ (см. Рис. 7), и поскольку в силу (2.3) и (2.7) имеем

$$M = \Bigl|\int\limits_{\gamma_\Delta} f(z)\,dz\Bigr| = \Bigl|\sum_{k=1}^{4}\int\limits_{\gamma_{\Delta^{(k)}}} f(z)\,dz\Bigr| \le \sum_{k=1}^{4}\Bigl|\int\limits_{\gamma_{\Delta^{(k)}}} f(z)\,dz\Bigr|,$$

то среди треугольников $\Delta^{(k)}$ существует по крайней мере один, обозначим его через $\Delta_1$, для которого

$$\Bigl|\int\limits_{\gamma_{\Delta_1}} f(z)\,dz\Bigr| \ge \frac{M}{4}.$$

Указанным выше способом разобьем треугольник $\Delta_1$ на четыре и обозначим через $\Delta_2$ любой из них, для которого

$$\Big| \int\limits_{\gamma_{\Delta_2}} f(z)\,dz \Big| \geq \frac{M}{4^2}.$$

Продолжая этот процесс бесконечно, получим последовательность треугольников $\Delta_k$, $k=1,2,\ldots$, со следующими свойствами:

1) $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$;

2) периметр треугольника $\Delta_k$ равен $\dfrac{l}{2^k}$, где $l$ — периметр треугольника $\Delta$;

3) для каждого $\Delta_k$ имеет место неравенство

$$\Big| \int\limits_{\gamma_{\Delta_k}} f(z)\,dz \Big| \geq \frac{M}{4^k}. \tag{2.15}$$

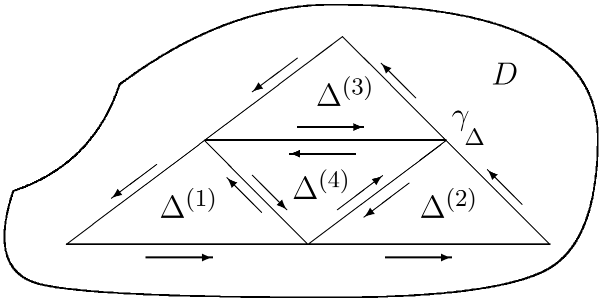

Рис. 7

Пересечение всех треугольников последовательности $\{\Delta_k\}$ состоит из единственной точки $z_0 \in D$. В силу аналитичности функции $f(z)$ в точке $z_0$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $C(\delta, z_0) \subset D$ и

$$\Big| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) \Big| < \frac{\varepsilon}{l^2}, \quad z \in C(\delta, z_0). \tag{2.16}$$

Начиная с некоторого номера $k_0$, все треугольники $\Delta_k$ лежат в круге $C(\delta, z_0)$ и, следовательно, в силу (2.4), (2.14) и (2.16) можно написать

$$\begin{gathered} \Big| \int\limits_{\gamma_{\Delta_k}} f(z)\,dz \Big| = \Big| \int\limits_{\gamma_{\Delta_k}} [\,f(z) - f(z_0) - (z-z_0)f'(z_0)\,]\,dz \Big| < \\ < \frac{\varepsilon}{l^2} \int\limits_{\gamma_{\Delta_k}} |\,z - z_0\,| \cdot |\,d\,z| < \frac{\varepsilon}{l^2}\,\frac{l^2}{4^k} = \frac{\varepsilon}{4^k}\,. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Сравнивая (2.15) и (2.17), получим неравенство $M<\varepsilon$, откуда в силу произвольности $\varepsilon$ имеем $M=0$, т. е.

$$\int\limits_{\gamma_\Delta} f(z)\,dz = 0. \tag{2.18}$$

Обозначим теперь через $\gamma_P$ границу произвольного многоугольника $P\subset D$ и разобьем $P$ на конечное число треугольников $\Delta^{(k)}$. Из очевидного равенства

$$\int\limits_{\gamma_P} f(z)\,dz = \sum_k \int\limits_{\gamma_{\Delta^{(k)}}} f(z)\,dz$$

в силу (2.18) заключаем, что

$$\int\limits_{\gamma_P} f(z)\,dz = 0. \tag{2.19}$$

В случае, когда $\gamma$ — любая замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана, на основании леммы Гурса в силу (2.9) и (2.19) получим неравенство $\Big|\int\limits_\gamma f(z)\,dz\Big|<\varepsilon$, из которого ввиду произвольности $\varepsilon$ следует (2.12), т. е. утверждение теоремы Коши.

Обобщенная теорема Коши. *Если функция $f(z)$ аналитична в области $D\subset\mathbb{C}$, ограниченной замкнутой кусочно-гладкой кривой Жордана $\Gamma$, и непрерывна в $\overline{D}$, то*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{2.20}$$

**Доказательство**. Пусть сначала $\Gamma$ — замкнутая гладкая кривая Жордана. В силу равномерной непрерывности функции $f(z)$ в $\overline{D}$ для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что $|\,f(z')-f(z'')\,|<\varepsilon$ для любых $z', z''$ из $\overline{D}$, как только $|\,z'-z''\,|<2\delta$. Пусть еще

$$2\delta<\delta_0, \tag{2.21}$$

где $\delta_0$ — стандартный радиус кривой $\Gamma$, соответствующий числу $\theta_0 = 2\arccos\frac{3}{4}$. Пусть, кроме того, $\delta$ таково, что можно построить многоугольник с вершинами в точках $z_k \in \Gamma$, $k=1, 2, \dots, n$, следующих друг за другом в положительном направлении на $\Gamma$, и сторонами $[z_k, z_{k+1}]$, $z_{n+1}=z_1$, одинаковой длины $r$ (см. Рис. 8), где

$$2r=3\delta. \tag{2.22}$$

Тогда длина $L$ кривой $\Gamma$ больше $nr$, так что в силу (2.22) имеем

$$n < \frac{2L}{3\delta}\,. \tag{2.23}$$

Покажем, что множество $\bigcup\limits_{k=1}^{n} C(\delta, z_k)$ образует покрытие кривой $\Gamma$, каждый круг которого пересекается только с соседними кругами.

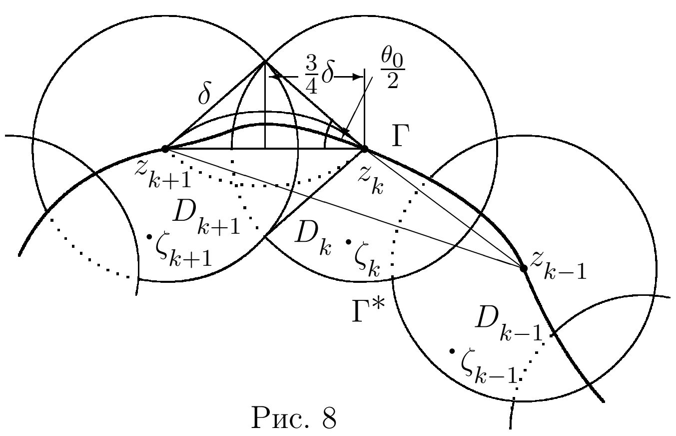

Рис. 8

В самом деле, поскольку в силу (2.22) и (2.21) имеем $|z_{k+1}-z_k|=r<\delta_0$, то (см. п. 0.5) острый угол между касательными в любых точках $\tau_1$ и $\tau_2$ дуги $\widehat{z_k z_{k+1}} \subset \Gamma$ меньше $\frac{\theta_0}{2} = \arccos\frac{3}{4}$. Отсюда по теореме Лагранжа заключаем, что для любой точки $t \in \widehat{z_k z_{k+1}}$ угол между хордами $[t, z_k]$ и $[t, z_{k+1}]$ больше $\pi - \frac{\theta_0}{2}$. С другой стороны, легко видеть, что множество всех точек, из которых отрезок $[z_k, z_{k+1}]$ виден под углом, превышающим $\pi-\frac{\theta_0}{2}$, представляет собой круговую луночку, ограниченную дугами окружностей с концами в точках $z_k$ и $z_{k+1}$, образующими с отрезком $[z_k, z_{k+1}]$ углы, равные $\frac{\theta_0}{2}$. Таким образом, дуга $\widehat{z_k z_{k+1}}$ лежит в этой круговой луночке, содержащейся в объединении кругов $C(\delta, z_k)$ и $C(\delta, z_{k+1})$, а это означает, что все указанные круги образуют покрытие кривой $\Gamma$.

Далее, как мы видели выше, $r < \delta_0$, а значит, дуга $\widehat{z_{k-1} z_{k+1}}$ короче стандартной, так что угол между отрезками $[z_k, z_{k-1}]$ и $[z_k, z_{k+1}]$ больше $\pi - \theta_0 > \frac{\pi}{2}$, поэтому $|z_{k+1} - z_{k-1}| > r\sqrt{2} = 3\delta\frac{\sqrt{2}}{2} > 2\delta$, т. е. круги $C(\delta, z_{k-1})$ и $C(\delta, z_{k+1})$ не пересекаются. Круги же $C(\delta, z_k)$ и $C(\delta, z_j)$, между которыми находится более одного круга этого покрытия, в силу (2.21) тоже не пересекаются.

Следуя В.В. Асееву, положим $D_k = D \cap C(\delta, z_k) \setminus \overline{C(\delta, z_{k+1})}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $z_{n+1} = z_1$, и обозначим через $\gamma_k$ соответственно границы областей $D_k$. После удаления из $\overline{D}$ всех замкнутых областей $\overline{D}_k$ остается односвязная область $D^*$, граница которой является замкнутой кусочно-гладкой жордановой кривой $\Gamma^*$, так как состоит из дуг окружностей $|z - z_k| = \delta$. Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz - \int\limits_{\Gamma^*} f(z)\,dz. \qquad (2.24)$$

Учитывая, что $\Gamma^* \subset D$ и по теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma^*} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_k} f(\zeta_k)\,dz = 0,$$

где $\zeta_k$ — фиксированные точки областей $D_k$ соответственно, из (2.24) в силу (2.23) получим

$$\Big|\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} [\,f(z) - f(\zeta_k)\,]\,dz\Big| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} |\,f(z) - f(\zeta_k)\,| \cdot |\,dz\,| < \varepsilon(L + 2n \cdot 2\pi\delta) < 3\pi L\varepsilon,$$

откуда следует (2.20).

Пусть теперь $\Gamma$ — замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана, состоящая из гладких дуг $\Gamma_p = \overset{\frown}{t_p t}_{p+1}$, где $t_p$, $p=1, 2, \ldots, m$, $t_{m+1} = t_1$, — вершины кривой $\Gamma$, $\delta_p$ — стандартный радиус дуги $\Gamma_p$, соответствующий числу $\theta_0^* = \arccos\dfrac{2}{3}$,

$$\delta_0 = \min_{1\le p\le m} \delta_p, \quad \rho_* = \min_{\substack{1\le {p \atop q} \le m \\ q\ne p-1,\, p}} \rho\,(t_p, \Gamma_q),\ \Gamma_0 = \Gamma_m.$$

Тогда, как и выше, по наперед заданному $\varepsilon > 0$ возьмем соответствующее число $\delta$, удовлетворяющее условию

$$0 < 2\delta < \min(\delta_0, \rho_*), \tag{2.25}$$

так что каждая окружность $|\, z - t_p \,| = \delta$, $p = 1, 2, \ldots, m$, пересекает кривую $\Gamma$ в двух точках: $t'_p \in \Gamma_p$ и $t''_p \in \Gamma_{p-1}$, $\Gamma_0 = \Gamma_m$. Заметим, что указанные окружности попарно не пересекаются, и обозначим через $\Gamma'_p$ часть дуги $\Gamma_p$, $p=1, 2, \ldots, m$, лежащую вне кругов $C(\delta, t_p)$ и $C(\delta, t_{p+1})$ (см. Рис. 9). Пусть

$$\rho' = \min_{\substack{1\le {p \atop q} \le m \\ p\ne q}} \rho\,(\Gamma'_p, \Gamma'_q), \tag{2.26}$$

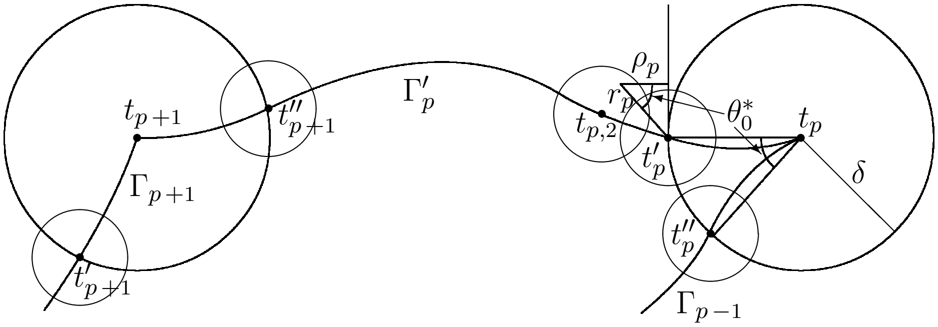

Рис. 9

При фиксированном $\delta$ выберем покрытие каждой дуги $\Gamma'_p$, $p = 1, 2, \ldots, m$, кругами $C(\rho_p, t_{p,l})$, где число $\rho_p$ удовлетворяет условию

$$0 < 2\rho_p < \rho', \quad p = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.27}$$

и таково, что можно построить ломаную с вершинами в следующих друг за другом в положительном направлении точках $t_{p,\,l}\in\Gamma'_p$, $l=1$, $2,\,\ldots,n_p, t_{p,\,1}=t'_p$, $t_{p,\,n_p}=t''_{p+1}$, со звеньями $[\,t_{p,\,l},t_{p,\,l+1}\,]$, $l=1,2,\,\ldots,n_{p-1}$, одинаковой длины $r_p$, где

$$2r_p=3\rho_p. \tag{2.28}$$

Заметим, что в силу (2.27) имеем

$$\rho_p<\delta,\quad p=1,\,2,\,\ldots,\,m, \tag{2.29}$$

так как из (2.26) следует, что $\rho'\leq|\,t'_p-t''_p\,|\leq 2\delta$, поэтому круги $C(\rho_p,t'_p)$ и $C(\rho_{p-1},t''_p)$, $\rho_0=\rho_m$, не пересекаются.

Далее, из (2.28), (2.29) и (2.25) следует неравенство $r_p<\delta_0$. Отсюда заключаем, что дуга $\overset{\frown}{t_pt_{p,\,2}}$ меньше стандартной дуги, так что угол между хордами $[\,t_p,t'_p\,]$ и $[\,t'_p,t_{p,\,2}\,]$ больше $\pi-\theta_0^*$ и поэтому, как легко видеть, круги $C(\delta,t_p)$ и $C(\rho_p,t_{p,\,2})$ тоже не пересекаются. Очевидно, что не пересекаются также круги $C(\rho_p,t_{p,\,n_p-1})$ и $C(\delta,t_{p+1})$.

Рассуждая так же, как в случае гладкой кривой, убеждаемся, что дуга $\overset{\frown}{t_{p,\,l}t_{p,\,l+1}}$, $l=1,2,\ldots,\,n_{p-1}$, лежит в круговой луночке, ограниченной дугами окружностей с концами в точках $t_{p,\,l}$ и $t_{p,\,l+1}$, образующими с отрезком $[\,t_{p,\,l},t_{p,\,l+1}\,]$ углы, равные $\dfrac{\theta_0^*}{2}$. Поскольку $\theta_0^*<\theta_0=\arccos\dfrac{1}{8}$, то эта луночка, в свою очередь, лежит в круговой луночке, ограниченной дугами окружностей с концами в точках $t_{p,\,l}$ и $t_{p,\,l+1}$, образующими с отрезком $[\,t_{p,\,l},t_{p,\,l+1}\,]$ углы, равные $\dfrac{\theta_0}{2}$. Аналогично случаю гладкой кривой $\Gamma$ отсюда следует, что объединение кругов $\bigcup\limits_{l=1}^{n_p}C(\rho_p,t_{p,\,l})$ образует покрытие дуги $\Gamma'_p$, причем каждый из кругов $C(\rho_p,t_{p,\,l})$, $l=2$, $3,\,\ldots,\,n_p-1$, пересекается только с предыдущим и следующим.

Таким образом, все круги $C(\delta,t_p)$ и $C(\rho_p,t_{p,\,l})$ образуют покрытие кривой $\Gamma$, каждый круг которого пересекается только с соседними.

Положив

$$k_1=1,\ k_{p+1}=k_p+n_p+1=\sum_{s=1}^{p}n_s+p+1,\ p=1,2,\,\ldots\,,m-1,$$

$$n = k_m + n_m = \sum_{p=1}^{m} n_p + m,$$

$z_{k_p} = t_p$, $p = 1, 2, \ldots, m$, $z_{k_p + l} = t_{p,l}$, $l = 1, 2, \ldots, n_p$, получим покрытие кривой $\Gamma$ кругами с центрами в точках $z_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, причем длина $L$ этой кривой не меньше периметра многоугольника с вершинами в точках $z_k$, т. е.

$$L \geq 2m\delta + \sum_{p=1}^{m} r_p\,(n_p - 1). \tag{2.30}$$

Очевидно также, что

$$L > \sum_{p=1}^{m} r_p. \tag{2.31}$$

После удаления из $\overline{D}$ описанных выше замкнутых областей $\overline{D}_k$ остается область $D^*$, граница которой является замкнутой кусочно-гладкой кривой $\Gamma^* \subset D$. Ввиду этого для интеграла от функции $f(z)$ по кривой $\Gamma$, подобно тому, как и в случае гладкой кривой, будем иметь:

$$\Big|\int_{\Gamma} f(z)\,dz\Big| < \varepsilon\big(L + 2m{\cdot}2\pi\delta + 2\sum_{p=1}^{m} n_p{\cdot}2\pi\rho_p\big). \tag{2.32}$$

В силу (2.28) – (2.31) из (2.32) получим неравентво

$$\Big|\int_{\Gamma} f(z)\,dz\Big| < \frac{\varepsilon}{3}L(3 + 16\pi),$$

из которого, ввиду произвольности числа $\varepsilon$, тоже следует (2.20).

Обобщенная теорема Коши верна и для многосвязной области.

Теорема. *Если функция $f(z)$ аналитична в $(m+1)$-связной области $D$, граница $\Gamma$ которой состоит из попарно не пересекающихся замкнутых кусочно-гладких кривых Жордана $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, где $\Gamma_0$ содержит внутри себя все остальные кривые, и непрерывна в $\overline{D}$, то*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_0} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{m} \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz = 0. \tag{2.33}$$

**Доказательство**. Обозначим через $\sigma_k$, $k=0,1,\ldots,m$, не пересекающиеся гладкие открытые дуги Жордана, лежащие в $D$ и соединяющие соответственно $\Gamma_k$ с $\Gamma_{k+1}$, $\Gamma_{m+1}=\Gamma_0$. Проведенными вдоль $\sigma_k$ разрезами область $D$ разбивается на две односвязные области $D'$ и $D''$ с кусочно-гладкими жордановыми границами $\Gamma'$ и $\Gamma''$ соответственно. В силу очевидного равенства

$$\int\limits_{\Gamma'} f(z)\,dz+\int\limits_{\Gamma''} f(z)\,dz=\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz=\int\limits_{\Gamma_0} f(z)\,dz-\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_k} f(z)\,dz$$

и обобщенной теоремы Коши для функции $f(z)$ в замкнутых областях $\overline{D}'$ и $\overline{D}''$ получаем (2.33).

Интегральная формула Коши. *Пусть функция* $f(z)$ *аналитична в области* $D\subset\mathbb{C}$ *с кусочно-гладкой границей* $\Gamma$ *и непрерывна в* $\overline{D}$. *Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}=\begin{cases} f(z), & z\in D,\\ 0, & z\in C\overline{D}.\end{cases} \tag{2.34}$$

Если $z\in C\overline{D}$, то функция $\dfrac{f(t)}{t-z}$ переменного $t$ тоже аналитична в $D$ и непрерывна в $\overline{D}$, и обобщенная теорема Коши дает искомое равенство.

В случае, когда $z\in D$, удалим из области $D$ круг $C(\delta,z)$, $\overline{C(\delta,z)}\subset D$, и обозначим через $\gamma$ окружность $|t-z|=\delta$. Тогда в силу обобщенной теоремы Коши для функции $\dfrac{f(t)}{t-z}$ переменного $t$ в замкнутой области $\overline{D}_\delta=\overline{D}\setminus C(\delta,z)$ имеем

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}=\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}=\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)-f(z)}{t-z}\,dt+f(z)\int\limits_{\gamma}\frac{dt}{t-z}. \tag{2.35}$$

Для $t\in\gamma$ имеем $t=z+\delta e^{i\varphi}$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $dt=i\delta e^{i\varphi}d\varphi$, поэтому

$$\int\limits_{\gamma}\frac{dt}{t-z}=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{i\delta e^{i\varphi}d\varphi}{\delta e^{i\varphi}}=2\pi i, \tag{2.36}$$

а в силу непрерывности функции $f(z)$ в области $D$ получим

$$\Big|\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)-f(z)}{t-z}\,dt\Big|\le 2\pi\max_{0\le\varphi\le 2\pi}|\,f(z+\delta e^{i\varphi})-f(z)\,|\xrightarrow[\delta\to 0]{}0. \qquad (2.37)$$

Поскольку в (2.35) первый и последний интегралы не зависят от $\delta$, то и предпоследний интеграл не зависит от $\delta$, а так как в силу (2.37) при достаточно малом $\delta$ он может быть сделан сколь угодно малым, то он равен нулю. Следовательно, (2.35) с учетом (2.36) дает вторую часть равенства (2.34), которое называется интегральной формулой Коши. Интеграл в этой формуле называют интегралом Коши.

Заметим, что область $D\subset\mathbb{C}$ может быть и многосвязной.

## 2.3. Интеграл типа Коши

Пусть тererь $\Gamma$ — кусочно-гладкая (замкнутая или незамкнутая) кривая Жордана и $f(t)$ — заданная на $\Gamma$ непрерывная функция. Для любой точки $z$ комплексной плоскости, не лежащей на $\Gamma$, выражение $\dfrac{f(t)}{t-z}$ как функция $t\in\Gamma$ непрерывно и, следовательно, существует интеграл

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}\,, \qquad (2.38)$$

являющийся однозначной функцией $z$ и называемый интегралом типа Коши.

Покажем, что *интеграл типа Коши (2.38) в любой точке $z$ комплексной плоскости, не лежащей на кривой $\Gamma$, является аналитической функцией, причем*

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}\,. \qquad (2.39)$$

Кроме того, $F(z)$ *имеет производные всех порядков и*

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}\,. \qquad (2.40)$$

Заметим сначала, что для $z+\Delta z$, не лежащего на $\Gamma$, имеем

$$\frac{F(z{+}\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{(t{-}z)(t{-}z{-}\Delta z)}\,.$$

Так как $z\notin\Gamma$, то расстояние $\rho\,(z,\Gamma)\;=\;2d>0$. Пусть $|\,\Delta z\,|<d$. Очевидно, для всех точек $t\in\Gamma$ будем иметь $|\,t-z\,|\geq 2d$, $|\,t-z-\Delta z\,|>d$, в силу чего

$$\Big|\,\frac{F(z{+}\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{(t{-}z)^2}\,\Big|=$$

$$=\frac{|\Delta z|}{2\pi}\Big|\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{(t{-}z)^2(t{-}z{-}\Delta z)}\,\Big|<\frac{L\,M}{8\pi d^3}\,|\,\Delta z\,|\,,$$

где $L$ — длина кривой $\Gamma$, а $M=\max\limits_{t\in\Gamma}|\,f(t)\,|$. Из этого неравенства следует аналитичность функции $F(z)$ и справедливость формулы (2.39). Формулу (2.40) легко доказать с помощью индукции.

Заметим также, что если положить еще $\rho{=}\max\limits_{t\in\Gamma}|\,t\,|$, то для $z$, $|\,z\,|>\rho$, получим

$$|\,F(z)\,|\leq\frac{L\,M}{2\pi\,(|\,z\,|{-}\rho)}\,,$$

откуда получим следующее свойство интеграла типа Коши:

$$F(\infty)=\lim_{z\to\infty}F(z)=0.$$

Установленная выше аналитичность интеграла типа Коши позволяет сделать важное заключение: *аналитическая в области* $D$ *функция* $f(z)$ *имеет производные любого порядка в каждой точке* $z\in D$.

В самом деле, пусть $z_0$ — произвольная точка области $D$, число $\delta>0$ такое, что круг $\overline{C(\delta,z_0)}\subset D$, а $\gamma$ — окружность $|\,t-z_0\,|=\delta$. Тогда в силу интегральной формулы Коши имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)\,dt}{t{-}z}\,,\ z\in C(\delta,z_0)\,.$$

Так как этот интеграл является интегралом типа Коши, то представленная им функция имеет производные всех порядков в круге $C(\delta, z_0)$, а в силу произвольности точки $z_0$ — всюду в области $D$.

Заметим, что если кривая $\Gamma$ замкнута и $f(t)$ представляет собой значения некоторой аналитической внутри $\Gamma$ и непрерывной вплоть до $\Gamma$ функции, то интеграл типа Коши совпадает с интегралом Коши.

## 2.4. Теорема Морера. Понятие неопределенного интеграла

Теорема Морера. *Если функция $f(z)$ непрерывна в области $D$ и для любой замкнутой кусочно-гладкой жордановой кривой $\gamma$, лежащей в $D$,*

$$\int\limits_{\gamma} f(t)\,dt = 0\,, \tag{2.41}$$

*то функция $f(z)$ аналитична в $D$.*

**Доказательство**. Пусть $\sigma$ — кусочно-гладкая кривая Жордана, соединяющая точки $z_0 \in D$ и $z \in D$ и лежащая в области $D$. Условие (2.41) означает, что $\int\limits_{\sigma} f(t)\,dt$ не зависит от пути интегрирования, а только от его начала и конца и, следовательно, при фиксированном $z_0 \in D$ можно написать

$$\int\limits_{\sigma} f(t)\,dt = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt = F(z). \tag{2.42}$$

Вследствие (2.41) для $z$ и $z + \Delta z$ из области $D$ в силу (2.42), (2.3) и (2.5) получим также равенство

$$F(z{+}\Delta z) - F(z) = \int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(t)\,dt - \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt = \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)\,dt\,.$$

В силу непрерывности $f(z)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $C(\delta, z) \subset D$ и $|\,f(t) - f(z)\,| < \varepsilon$ для всех $t \in C(\delta, z)$. Поэтому, предполагая

$|\,\Delta z\,| < \delta$, из очевидного равенства

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{z}^{z+\Delta z} [\, f(t) - f(z)\,]\, dt\,,$$

где интегрирование происходит вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки $z$ и $z+\Delta z$ и лежащего в области $D$, будем иметь

$$\left|\, \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \,\right| < \varepsilon\,,$$

откуда следует аналитичность функции $F(z)$ и равенство

$$F'(z) = f(z), \quad z \in D. \tag{2.43}$$

Поскольку по доказанному выше $F(z)$ имеет производные всех порядков, то и функция $f(z) = F'(z)$ имеет производную в любой точке области $D$, т.е. $f(z)$ аналитична в $D$.

Совокупность аналитических в области $D$ функций $\Phi(z)$, обладающих тем свойством, что

$$\Phi'(z) = f(z), \tag{2.44}$$

где $f(z)$ — аналитическая в области $D$ функция, называется неопределенным интегралом от функции $f(z)$.

Полагая $\Phi(z) - F(z) = U(x,\, y) + iV(x,\, y)$, в силу (2.43) и (2.44) будем иметь

$$\Phi'(z) - F'(z) = [\, U(x,y) + iV(x,y)\,]' = U_x + iV_x = V_y - iU_y = 0,$$

откуда получаем, что $U_x = U_y = V_x = V_y = 0$ всюду в $D$. Следовательно, $\Phi(z) - F(z) = C = \mathrm{const}$ в области $D$. Таким образом, в силу (2.42) имеем равенство

$$\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\, dt + C,$$

откуда, ввиду того, что $C = \Phi(z_0)$, следует формула Лейбница

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(t)\, dt = \Phi(z) - \Phi(z_0).$$

## 2.5. Ряд Тейлора

**1. Теорема Тейлора**. Выше было показано, что сумма $S(z)$ степенного ряда является аналитической функцией в его круге сходимости. Имеет место и обратное утверждение.

Теорема Тейлора. *Аналитическая в области $D$ функция $f(z)$ в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ единственным образом представима в виде степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \tag{2.45}$$

*радиус сходимости которого не меньше, чем расстояние $\rho$ от точки $z_0$ до границы области $D$.*

**Доказательство**. В круге $C(\delta, z_0)$, $0<\delta<\rho$, с границей $\gamma$ в силу интегральной формулы Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)\Bigl(1-\dfrac{z-z_0}{t-z_0}\Bigr)}\,. \tag{2.46}$$

Ввиду того, что для каждой фиксированной точки $z \in C(\delta, z_0)$ и $t \in \gamma$ имеет место соотношение

$$\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right| = \frac{|\,z-z_0\,|}{\delta} = q(z) < 1\,,$$

а функция $\dfrac{f(t)}{t-z_0}$ ограничена на окружности $\gamma$, по признаку Вейерштрасса ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(\frac{z-z_0}{t-z_0}\Bigr)^k \frac{f(t)}{t-z_0} = \frac{f(t)}{(t-z_0)\Bigl(1-\dfrac{z-z_0}{t-z_0}\Bigr)}$$

сходится равномерно на $\gamma$ и, следовательно, равенство (2.46) можно переписать в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(\frac{z-z_0}{t-z_0}\Bigr)^k \frac{f(t)\,dt}{t-z_0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{k+1}}\,(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k\,,$$

где
$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{k+1}}\,, \tag{2.47}$$

или, принимая во внимание формулу (2.40),

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\,,\ k=0,1,\ \ldots\ . \tag{2.48}$$

Так как коэффициенты $c_k$ в силу (2.47) и обобщенной теоремы Коши для функций $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$ одни и те же для любого $\delta,\ 0<\delta<\rho,$ то радиус сходимости ряда (2.45) не меньше $\rho$.

Ряд (2.45), коэффициенты которого определяются для аналитической функции $f(z)$ по формулам (2.47) или (2.48), называется рядом Тейлора (разложением Тейлора) функции $f(z)$.

Из (2.48) следует, что разложение аналитической функции $f(z)$ в ряд Тейлора единственно.

**2. Неравенства Коши и теорема Лиувилля**. Пусть аналитическая в круге $C(R,z_0)$ функция $f(z)$ ограничена, т. е. существует такое число $M>0$, что
$$|\,f(z)\,| < M, \quad z\in C(R,z_0). \tag{2.49}$$

Тогда по теореме Тейлора функция $f(z)$ в круге $C(R,z_0)$ представляется рядом (2.45) с коэффициентами $c_k$, определенными по формулам (2.47), в которых в качестве $\gamma$ взята окружность $|\,t-z_0\,|=\delta,\ 0<\delta<R.$ Из (2.47) в силу (2.49) следует, что
$$|\,c_k\,| \le \frac{M}{2\pi}\,\frac{2\pi\delta}{\delta^{k+1}} = \frac{M}{\delta^k}\,,$$

откуда в пределе при $\delta\to R$ получаем неравенства Коши:
$$|\,c_k\,| \le \frac{M}{R^k}\,, \quad k=0,1,\ \ldots. \tag{2.50}$$

Непосредственным следствием неравенств Коши является следующее утверждение.

Теорема Лиувилля. *Если функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости и $|\,f(z)\,|<M<\infty,\ z\in\mathbb{C},$ то $f(z)=\mathrm{const}$.*

В самом деле, в силу условия разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z$ сходится на всей комплексной плоскости, в частности, в любом круге $C(R,0)$. Устремляя $R$ к $\infty$ в неравенствах (2.50), получим $c_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots,$ и, стало быть, $f(z) = {}_0 = \mathrm{const}$.

**3. Внутренняя теорема единственности аналитической функции**. Под внутренней теоремой единственности аналитической функции понимается следующее утверждение.

Теорема.*Если аналитические в области $D$ функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ равны между собой на множестве $E \in D$, имеющем по крайней мере одну предельную точку $z_0 \in D$, то $f(z) = \varphi(z)$ всюду в $D$.*

**Доказательство.** Действительно, в силу условия существует последовательность $\{z_n\}$ точек $z_n \in E$, сходящаяся к точке $z_0$ и такая, что

$$f(z_n) = \varphi(z_n),\ n = 1, 2, \ \ldots. \tag{2.51}$$

По теореме Тейлора в круге $C(\delta, z_0) \subset D$ функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ разлагаются в степенные ряды

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad \varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c'_k (z - z_0)^k\,. \tag{2.52}$$

Начиная с некоторого номера $N$, все точки $z_n$ лежат в круге $C(\delta, z_0)$. Переходя в равенствах (2.49), в которых функции $f$ и $\varphi$ заменены рядами (2.50) при $z = z_n$, $n \geq N$, к пределу при $n \to \infty$, получим $c_0 = c'_0$. Следовательно, для всех точек $z_n$, $n \geq N$, имеем также

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z_n - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} c'_k (z_n - z_0)^{k-1}\,,$$

откуда в пределе при $n \to \infty$ получим $c_1 = c'_1$. Продолжая этот процесс, приходим к заключению, что $c_k = c'_k$ для всех номеров $k$ и, стало быть, $f(z) = \varphi(z)$ всюду в круге $C(\delta, z_0)$. В силу непрерывности функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ они равны также на множестве $\overline{C(\delta, z_0)} \cap D$.

Пусть теперь $z_*$ — любая точка области $D$, лежащая вне круга $\overline{C(\delta, z_0)}$. Соединим точку $z_0$ с $z_*$ гладкой кривой $\sigma$, $\sigma \subset D$, и обозначим через $z_1$ ее последнюю точку пересечения с окружностью $|\, z - z_0 \,| = \delta$. Повторяя приведенное выше рассуждение, докажем, что $f(z) = \varphi(z)$ в круге $C(\rho,z_1)$, где $\rho$ равно расстоянию между $\sigma$ и границей области $D$. Обозначим теперь через $z_2$ последнюю точку пересечения дуги $\overset{\frown}{z_1 z_*}$ кривой $\sigma$ с окружностью $|\,z-z_1\,|=\rho$ и аналогично докажем, что $f(z)=\varphi(z)$ в круге $C(\rho,z_2)$. Продолжая действовать таким образом, придем к кругу $C(\rho,z_m)$, $z_m\in\sigma$, содержащему точку $z_*$, в котором $f(z)=\varphi(z)$, а следовательно, и $f(z_*)=\varphi(z_*)$. В силу произвольности точки $z_*$ отсюда заключаем, что $f(z)=\varphi(z)$ всюду в области $D$.

**4.Нули аналитической функции.**Точка $z_0$ области задания функции $f(z)$, для которой $f(z_0)=0$, называется нулем этой функции. Если функция $f(z)$ аналитична в области $D$ и не тождественно равна нулю, то в силу внутренней теоремы единственности для каждого натурального числа $n$ число ее нулей на замкнутом множестве $F_n=\{z\in D:\rho(z,\partial D)\geq\frac{1}{n}\}\cap\overline{C(n,0)}$ конечно. Следовательно, *во всей области $D$ аналитическая функция $f(z)$, не тождественно равная нулю, может иметь не более чем счетное множество нулей.*

Аналитическая функция $f(z)$ в окрестности своего нуля $z_0$ разлагается в ряд Тейлора вида

$$f(z)=\sum_{k=m}^{\infty}c_k(z-z_0)^k,\quad m\geq 1,\ c_m\neq 0\,.$$

Число $m$ называется порядком или кратностью нуля $z_0$. Из равенства (2.48) следует, что $z_0$ является нулем аналитической функции $f(z)$ порядка $m$ тогда и только тогда, когда $f^{(k)}(z_0)=0, k=0, 1, \ldots, m-1$, $f^{(m)}(z_0)\neq 0$. При $m=1$ нуль называется простым.

## 2.6. Принцип максимума модуля аналитической функции

Под принципом максимума модуля аналитической функции подразумевается следующее утверждение: *модуль аналитической в области $D$ функции $f(z)$, отличной от постоянной, не принимает в этой области своего наибольшего значения* $M=\sup\limits_{z\in D}|\,f(z)\,|$.

**Доказательство.** Очевидно, что $M\neq 0$, ибо в противном случае функция $f(z)$ была бы тождественно равной нулю, т. е. постоянной.

Далее, если $M=\infty$, справедливость этого утверждения очевидна, так как в каждой точке $z\in D$ функция $f(z)$ принимает конечное значение.

Пусть теперь $M$ — конечное положительное число. Предположим от противного, что в некоторой точке $z_0\in D$ имеет место равенство $|f(z_0)|=M$. Для окружности $\gamma:\ |t-z_0|=\delta$, где $0<\delta<\rho(z_0,\partial D)$, в силу интегральной формулы Коши имеем

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z_0}.$$

Отсюда, ввиду того, что для $t\in\gamma$ имеем $t=z_0+\delta e^{i\varphi}$, $dt=i\delta e^{i\varphi}d\varphi$, получим равенство

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}f(z_0+\delta e^{i\varphi})\,d\varphi, \tag{2.53}$$

которое иногда называют теоремой о среднем для аналитической функции. По предположению имеем

$$M=|f(z_0)|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}|f(z_0+\delta e^{i\varphi})|\,d\varphi. \tag{2.54}$$

Отсюда следует, что всюду на окружности $|z-z_0|=\delta$ имеет место равенство $|f(z)|=M$. В самом деле, допустим, что для некоторого значения $\varphi=\varphi_0$ имеет место неравенство $|f(z_0+\delta e^{i\varphi_0})|<M$.

В силу непрерывности $|f(z_0+\delta e^{i\varphi})|$ как функции $\varphi$ можно указать такое число $\theta>0$, что $|f(z_0+\delta e^{i\varphi})|<M$ при $\varphi\in(\varphi_0-\theta,\ \varphi_0+\theta)$, на основании чего из (2.54) получим противоречие:

$$M\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi_0-\theta}^{\varphi_0+\theta}|f(z_0+\delta e^{i\varphi})|\,d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi_0+\theta}^{\varphi_0-\theta+2\pi}|f(z_0+\delta e^{i\varphi})|\,d\varphi<$$

$$<\frac{1}{2\pi}\left[M\cdot 2\theta+M\cdot 2(\pi-\theta)\right]=M.$$

Итак, $|f(z)|=M$ при $|z-z_0|=\delta$. Точно так же убеждаемся, что

$|\,f(z)\,| = M$ на любой окружности $|\,z - z_0\,| = r,\ 0 < r < \delta,$ т. е. $|\,f(z)\,| = M$ всюду в замкнутом круге $\overline{C(\delta, z_0)}$.

Таким образом, если функция $f(z) = u(x,\, y) + iv(x,\, y),$ то в замкнутом круге $\overline{C(\delta, z_0)}$ имеет место равенство

$$u^2 + v^2 = M^2,$$

дифференцируя которое в круге $C(\delta, z_0)$ поочередно по $x$ и по $y$, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0, \\ uu_y + vv_y = 0. \end{cases}$$

Исключая здесь с помощью условий Коши – Римана частные производные функции $v(x,\, y)$, получим

$$\begin{cases} uu_x - vu_y = 0, \\ vu_x + uu_y = 0. \end{cases}$$

Отсюда, поскольку определитель этой линейной однородной системы уравнений относительно $u_x$ и $u_y$ равен $u^2 + v^2 = M^2 \neq 0$, заключаем, что $u_x = u_y = 0$, а в силу условий Коши – Римана и $v_x = v_y = 0$ и, следовательно, в круге $C(\delta, z_0)$ имеем: $u(x,\, y) = C_1 = \mathrm{const},\ v(x,\, y) = C_2 = \mathrm{const}$.

Таким образом, $f(z) = C_1 + iC_2 = C =$ const в круге $C(\delta, z_0)$, а по внутренней теореме единственности $f(z) = C = \mathrm{const}$ и во всей области $D$, что противоречит условию. Тем самым принцип максимума модуля аналитической функции доказан.

**Следствие 1.** *Модуль аналитической в области* $D$ *инепрерывной в замкнутой области* $\overline{D}$ *функции* $f(z)$, *отличной от постоянной, достигает своего наибольшего значения на границе этой области.*

Ясно, что если $f(z) = 0$ в некоторой точке $z \in D$, то $\inf\limits_{z \in D} |\,f(z)\,|$ достигается в области $D$. Если же отличная от постоянной аналитическая функция $f(z) \neq 0$ в области $D$ и $\inf\limits_{z \in D} |\,f(z)\,| = m$, то, применяя принцип максимума модуля к аналитической в области $D$ функции $\dfrac{1}{f(z)}$, заключаем, что $|\,f(z)\,|$ не принимает в области $D$ и своего наименьшего значения $m$.

Другими словами, для не обращающихся в нуль аналитических функций, отличных от постоянной, справедливо следующее утверждение: *модуль аналитической, не обращающейся в нуль в области* $D$ *функции* $f(z)$, *отличной от постоянной, не достигает в этой области своих наибольшего и наименьшего значений.*

**Следствие 2.** *Модуль аналитической, не обращающейся в нуль в области* $D$ *и непрерывной в замкнутой области* $\overline{D}$ *функции* $f(z)$, *отличной от постоянной, достигает своих наибольшего и наименьшего значений на границе области* $D$.

## 2.7. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций

Будем говорить, что некоторое свойство имеет место внутри области, если оно имеет место на любом замкнутом множестве этой области.

Из математического анализа известно, что сумма $f(x)$ равномерно сходящегося в интервале $(a,b)\subset\mathbb{R}$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ дифференцируемых функций может оказаться не дифференцируемой, а при наличии производной $f'(x)$ совсем не обязательно, чтобы $f'(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$. В отличие от этого в комплексном анализе имеет место следующее утверждение.

Первая теорема Вейерштрасса. *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \tag{2.55}$$

*аналитических в области* $D$ *функций* $f_k(z)$ *равномерно сходится внутри области* $D$, *то сумма* $f(z)$ *этого ряда аналитична в* $D$, *причем*

$$f^{(p)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(p)}(z) \tag{2.56}$$

*для любого натурального* $p$ *и ряд* (2.56) *равномерно сходится внутри области* $D$.

**Доказательство**. Как было доказано выше, функция $f(z)$, как сумма равномерно сходящегося внутри области $D$ ряда непрерывных функций $f_k(z)$, непрерывна внутри $D$, а значит, и в области $D$. Пусть $z_0$ — произвольная точка области $D$, а $\gamma$ — окружность $|t-z_0|=\delta$ такая, что $\overline{C(\delta,z_0)}\subset D$. Заметим сначала, что равномерно сходящийся на $\gamma$

ряд (2.55) можно почленно интегрировать. Из равномерной сходимости ряда (2.55) на $\gamma$ следует также равномерная сходимость на $\gamma$ рядов

$$\frac{f(t)}{(t-z)^{p+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(t)}{(t-z)^{p+1}}, \quad p = 0, 1, \ldots,$$

а значит, и возможность их почленного интегрирования для каждого фиксированного $z \in C(\delta, z_0)$ (поскольку для $t \in \gamma$ имеем $|t-z| \geq \delta - |z-z_0| > 0$), так что

$$\frac{p!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)\, dt}{(t-z)^{p+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f_k(t)\, dt}{(t-z)^{p+1}}.$$

Отсюда при $p = 0$ в силу интегральной формулы Коши (2.34) для функций $f_k(z)$ получим равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)\, dt}{t-z} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f(z), \quad z \in C(\delta, z_0),$$

означающее, что функция $f(z)$ представима в круге $C(\delta, z_0)$ интегралом типа Коши, а следовательно, аналитична в этом круге.

При $p = 1, 2, \ldots$ в силу (2.40) получаем равенство (2.56) для всех $z \in C(\delta, z_0)$, а значит, и в точке $z_0$. В силу произвольности точки $z_0$ функция $f(z)$ аналитична и равенство (2.56) имеет место всюду в области $D$.

Пусть теперь $K$ — произвольное замкнутое множество области $D$. Покажем, что ряд (2.56) сходится равномерно на $K$, т. е. для любого натурального числа $p$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N = N(K, p, \varepsilon)$, что для любого натурального числа $m$ имеем

$$\Big| \sum_{k=1}^{m} f_{n+k}^{(p)}(z) \Big| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N \quad \text{и} \quad z \in K. \tag{2.57}$$

Возьмем число $d$, $0 < 2d < \rho\,(K, \partial D)$, и из открытого покрытия множества $K$ кругами $C(d, z)$, $z \in K$, выберем конечное покрытие $C(d, z_j)$, $j = 1, 2, \ldots, l$. Обозначим через $\gamma_j$ окружности $|\,t - z_j\,| = 2d$. В силу равномерной сходимости ряда (2.55) на замкнутом множестве $G = \bigcup\limits_{j=1}^{l} \gamma_j$ области $D$ для любого натурального числа $p$ и $\varepsilon > 0$ найдем такое число $N = N(p, \varepsilon)$, что для любого натурального числа $m$ имеем

$$\Big|\sum_{k=1}^{m} f_{n+k}(t)\Big| < \varepsilon \frac{d^p}{2p!} \quad \text{при} \quad n > N \quad \text{и} \quad t \in G.$$

Отсюда и из равенства

$$\sum_{k=1}^{m} f_{n+k}^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_j} \Big[\sum_{k=1}^{m} f_{n+k}(t)\Big] \frac{dt}{(t-z)^{p+1}}$$

для произвольной точки $z \in K$, лежащей в некотором круге $C(d, z_j)$, получим неравенство (2.57), что завершает доказательство первой теоремы Вейерштрасса.

**Примечание.** Первую теорему Вейерштрасса можно сформулировать и для последовательностей аналитических функций: *если последовательность аналитических в области $D$ функций $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится внутри $D$ к $f(z)$, то функция $f(z)$ аналитична в области $D$, причем последовательность производных $f_n^{(p)}(z)$ равномерно сходится внутри $D$ к производной $f^{(p)}(z)$, $p = 1, 2, \ldots$.*

Непосредственным следствием принципа максимума модуля аналитической функции является следующее утверждение.

Вторая теорема Вейерштрасса. *Если ряд* (2.55) *аналитических в области $D$ и непрерывных в $\overline{D}$ функций $f_k(z)$ равномерно сходится на границе $\Gamma$ области $D$, то он равномерно сходится в замкнутой области $\overline{D}$.*

**Доказательство.** В самом деле, по условию для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N = N(\varepsilon)$, что для любого натурального числа $m$ имеем

$$\Big|\sum_{k=1}^{m} f_{n+k}(t)\Big| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N \quad \text{и} \quad t \in \Gamma.$$

Так как функция $\sum\limits_{k=1}^{m} f_{n+k}(z)$ аналитична в $D$ и непрерывна в $\overline{D}$, то в силу принципа максимума модуля и его следствия 1 получим

$$\Big|\sum_{k=1}^{m} f_{n+k}(z)\Big| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N \quad \text{и} \quad z \in \overline{D},$$

что является необходимым и достаточным условием (критерием Коши) равномерной сходимости ряда (2.55) в замкнутой области $\overline{D}$.

## 2.8. Принцип компактности

**Определение 1.** Семейство $\mathfrak{M} = \{f(z)\}$ функций $f(z)$ называется равномерно ограниченным на множестве $E$, если существует положительное число $M$ такое, что $|f(z)| < M$ для всех $z \in E$ и всех $f(z) \in \mathfrak{M}$.

**Определение 2.** Семейство $\mathfrak{M} = \{f(z)\}$ функций $f(z)$ называется равностепенно непрерывным на множестве $E$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любых точек $z_1$ и $z_2$ из $E$, удовлетворяющих условию $|z_1 - z_2| < \delta$, неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ выполняется для всех функций $f(z) \in \mathfrak{M}$.

Под принципом компактности понимается следующее утверждение.

Принцип компактности. *Для того чтобы из любой последовательности бесконечного семейства $\mathfrak{M}$ аналитических в области $D \subset \subset \mathbb{C}$ функций можно было выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри $D$ к аналитической функции, необходимо и достаточно, чтобы семейство $\mathfrak{M}$ было равномерно ограниченным внутри $D$.*

**Необходимость.** Предположим, от противного, что семейство $\mathfrak{M}$ не равномерно ограничено внутри области $D$. Это значит, что существует замкнутое множество $K \subset D$, на котором оно не равномерно ограничено, т. е. для любого числа $M > 0$ существует функция $f(z) \in \mathfrak{M}$ такая, что $\max\limits_{z\in K} |f(z)| \geq M$. Следовательно, для последовательности функций $f_n(z) \in \mathfrak{M}$, $n = 1, 2, \ldots$, таких, что $\max\limits_{z\in K} |f_n(z)| \geq n$, имеем

$$\max_{z\in K} |f_n(z)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

а поскольку $\max\limits_{z\in K}|\,f_n(z)\,|$ достигается на $K$ в некоторой точке $z_n$, то $f_n(z_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Но по условию из последовательности $\{f_n(z)\}$ можно выделить подпоследовательность функций $f_{n_k}(z)$, $k=1$, 2, …, равномерно сходящуюся внутри $D$ к некоторой аналитической в области $D$ функции $f(z)$. В частности, существует натуральное число $N$ такое, что $|\,f_{n_k}(z)-f(z)\,|<1$ при $k>N$, $z\in K$, а следовательно,

$$|\,f_{n_k}(z)\,| < |\,f(z)\,| + 1 \le 1 + \max_{z\in K}|\,f(z)\,| = M < \infty, \quad k>N,\ z\in K.$$

Но это противоречит тому, что $f_n(z_n)\to\infty$ при $n\to\infty$.

Достаточность. Доказательство достаточности проведем в три этапа.

$1^0$. Докажем сначала, что семейство $\mathfrak{M}$ равностепенно непрерывно внутри области $D$. Пусть $K$ — произвольное замкнутое множество области $D$, $0 < 2d < \rho\,(K,\partial D)$ и $K_1 = \{z \in D : \rho\,(z,K) \le 2d\}$. Ясно, что $K_1$ — замкнутое множество, и по условию существует такое число $M > 0$, что $|\,f(z)\,| < M$ для всех $z \in K_1$ и $f(z) \in \mathfrak{M}$. Пусть $z_1$ и $z_2$ — произвольные точки множества $K$, для которых $|\,z_1 - z_2\,| < d$. По интегральной формуле Коши для любой функции $f(z)\in\mathfrak{M}$ в замкнутом круге $\overline{C(2d,z_1)}\subset K_1$ с границей $\gamma$ имеем

$$f(z_k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z_k}, \quad k=1,2, \tag{2.58}$$

и поскольку $z_2\in C(d,z_1)$, а для $t\in\gamma$ имеем $|\,t-z_1\,|=2d$, то $|\,t-z_2\,|>d$, в силу чего из (2.58) получим:

$$|\,f(z_1)-f(z_2)\,|=\Bigl|\frac{z_1-z_2}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)\,dt}{(t-z_1)(t-z_2)}\Bigr| < \frac{|\,z_1-z_2\,|}{2\pi}\cdot\frac{4\pi dM}{2d^2} = \frac{M}{d}|\,z_1-z_2\,|.$$

Положив $\delta=\min\,(d\,,\frac{d}{M}\,\varepsilon)$, для любых точек $z_1, z_2$ из $K$, удовлетворяющих условию $|\,z_1-z_2\,|<\delta$, и для любой функции $f(z)\in\mathfrak{M}$ отсюда получим требуемое неравенство $|\,f(z_1)-f(z_2)\,|<\varepsilon$.

$2^0$. Докажем теперь, что из любой последовательности $\{f_n(z)\}$ семейства $\mathfrak{M}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся во всех точках $z$ области $D$ с рациональными координатами.

В самом деле, все такие точки представляют собой счетное множество, поэтому их можно расположить в последовательность $r_1$, $r_2$, ….

Из ограниченной последовательности чисел $f_n(r_1)$, $n=1,2,\ldots$, выделим сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n,1}(r_1)\}$. Это означает, что соответствующая ей последовательность функций $f_{n,1}(z)$, $n=1,2,\ldots$, сходится в точке $z=r_1$. Из ограниченной последовательности чисел $f_{n,1}(r_2)$ выделим сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n,2}(r_2)\}$. Тогда соответствующая ей последовательность функций $\{f_{n,2}(z)\}$ сходится не только в точке $z=r_2$, но и в точке $z=r_1$ (как подпоследовательность сходящейся в точке $z=r_1$ последовательности $\{f_{n,1}(z)\}$). Неограниченно продолжая этот процесс, получим счетное множество последовательностей $\{f_{n,k}(z)\}$, $k=1,2,\ldots$, причем каждая последовательность $\{f_{n,k}(z)\}$ сходится в точках $z=r_1,\, r_2,\, \ldots,\, r_k$. Диагональная последовательность $\{f_{n,n}(z)\}$, как содержащаяся, исключая конечное число первых членов, в любой из последовательностей $\{f_{n,k}(z)\}$, сходится во всех точках $r_1,\, r_2,\, \ldots$, т. е. во всех точках области $D$ с рациональными координатами.

$3^0$. В заключение покажем, что полученная диагональная последовательность $\{f_{n,n}(z)\}$ является искомой, т. е. она равномерно сходится внутри области $D$. Действительно, пусть $K$ — произвольное замкнутое множество, $K\subset D$. Обозначим через $G$ конечное покрытие множества $K$ кругами $C(\rho,z)$, $0<\rho<\rho\,(K,\partial D)$, $z\in K$. Очевидно, $\overline{G}\subset D$, а поскольку семейство $\mathfrak{M}$ равностепенно непрерывно на $\overline{G}$, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любых точек $z_1,\, z_2\in G$, удовлетворяющих условию $|\,z_1-z_2\,|<2\delta$, при всех $n\in\mathbb{N}$ имеем:

$$|\,f_{n,n}(z_1)-f_{n,n}(z_2)\,|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.59}$$

Покроем плоскость $z$ квадратной сеткой со сторонами длины $\delta$ и обозначим замкнутые квадраты, содержащие точки множества $K$, число которых в силу ограниченности $K$ конечно, через $\Delta_l$, $l = 1, 2, \ldots, p$. В каждом квадрате $\Delta_l$ выберем по одной точке $r_{k_l}$ с рациональными координатами, принадлежащей $G$. В силу сходимости в них последовательности $\{f_{n,n}(z)\}$, для того же $\varepsilon > 0$, что и в (2.59), найдем такое $N > 0$, что

$$|\, f_{m,m}(r_{k_l}) - f_{n,n}(r_{k_l})\,| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.60}$$

при $m, n > N$ для всех $l = 1, 2, \ldots, p$.

Пусть теперь $z$ — произвольная точка множества $K$. Она лежит в некотором замкнутом квадрате $\Delta_l$. Расстояние точки $z$ до лежащей в этом же квадрате точки $r_{k_l}$ меньше $2\delta$, поэтому в силу (2.59) имеем:

$$|\, f_{m,m}(z) - f_{m,m}(r_{k_l})\,| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\, f_{n,n}(z) - f_{n,n}(r_{k_l})\,| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.61}$$

Складывая все неравенства (2.60) и (2.61), в силу неравенства треугольника получаем при $m, n > N$:

$$|\, f_{m,m}(z) - f_{n,n}(z)\,| < \varepsilon.$$

Так как число $N$ одно и то же для всех точек $z \in K$, то согласно критерию Коши это доказывает, что последовательность $\{f_{n,n}(z)\}$ равномерно сходится на множестве $K$ к конечной функции, которая по первой теореме Вейерштрасса будет аналитической в области $D$.

## 2.9. Интегральные формулы Шварца и Пуассона

Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $C(R, z_0)$ и непрерывна в $\overline{C(R, z_0)}$. Обозначив через $\Gamma$ окружность $|\, t - z_0\,| = R$, в силу интегральной формулы Коши будем иметь:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{t - z}, \quad z \in C(R, z_0), \tag{2.62}$$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{t - z*} = 0\,, \quad z* = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z}_0}\,, \quad z \in C(R, z_0). \tag{2.63}$$

Полагая $t - z_0 = Re^{i\varphi}$ и переходя в (2.63) к сопряженным величинам с учетом того, что

$$dt = iRe^{i\varphi} d\varphi = i\,(t - z_0)\,d\varphi, \quad \overline{dt} = -i\,(\overline{t} - \overline{z}_0)\,d\varphi = -\frac{\overline{t} - \overline{z}_0}{t - z_0}\,dt$$

и

$$\overline{z}^* = \overline{z}_0 + \frac{(t - z_0)(\overline{t} - \overline{z}_0)}{z - z_0},$$

получим

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)}\,\overline{dt}}{\overline{t} - \overline{z}^*} = -\int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)}\,\dfrac{\overline{t} - \overline{z}_0}{t - z_0}\,dt}{(\overline{t} - \overline{z}_0)\Big(1 - \dfrac{t - z_0}{z - z_0}\Big)} =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)}(z - z_0)\,dt}{(t - z_0)(t - z)} = \int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)}\,dt}{t - z} - \int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)}\,dt}{t - z_0} = 0,$$

и поскольку из (2.62) при $z = z_0$ следует, что

$$\overline{f(z_0)} = \overline{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{t - z_0}} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \overline{f(t)}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)}\,dt}{t - z_0},$$

отсюда получаем равенство

$$\overline{f(z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{f(t)}\,dt}{t - z}, \quad z \in C(R, z_0). \tag{2.64}$$

Сложив равенства (2.62) и (2.64) и положив $\Re e f(t) = u(t)$, получим

$$f(z) + \overline{f(z_0)} = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{u(t)\,dt}{t - z}. \tag{2.65}$$

Поскольку из (2.65) при $z = z_0$ следует, что

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{u(t)\,dt}{t - z_0},$$

то (2.65) можно записать в виде

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{u(t)\,dt}{t - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{u(t)\,dt}{t - z_0} + iC$$

или

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{t - 2z_0 + z}{(t - z_0)(t - z)}\,u(t)\,dt + iC, \quad C = \Im m f(z_0). \tag{2.66}$$

Равенство (2.66), выражающее значения аналитической в круге $C(R, z_0)$ и непрерывной в $\overline{C(R, z_0)}$ функции $f(z)$ через значения действительной части этой функции на окружности $|\,t{-}z_0\,|=R$, называется интегральной формулой Шварца. Применяя формулу (2.66) к функции $f(z)/i$, можно получить выражение функции $f(z)$ через значения ее мнимой части на окружности $|\,t-z_0\,|=R$.

Полагая $z-z_0=re^{i\psi}$ и отделяя действительные части в (2.66), получим

$$u(z) = \Re e\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{t-z_0+z-z_0}{(t-z_0)[\,t-z_0-(z-z_0)\,]}\,u(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Re e\frac{Re^{i\varphi}+re^{i\psi}}{Re^{i\varphi}-re^{i\psi}}\,u\left(z_0+Re^{i\varphi}\right)d\varphi,$$

или

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(R^2-r^2)\,u\left(z_0+Re^{i\varphi}\right)}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\varphi. \tag{2.67}$$

Это — формула Пуассона.

## 2.10. Функции класса Гельдера

Говорят, что заданная на связном множестве $E$ функция $f(z)$ удовлетворяет на $E$ условию Гельдера (условию $H$), если существуют такие положительные числа $A$ и $\mu$, $0<\mu\le 1$, что

$$|\,f(z_1)-f(z_2)\,| \le A\,|\,z_1-z_2\,|^{\mu}$$

для любых точек $z_1, z_2$ из $E$. Число $A$ называетсся коэффициентом, а $\mu$ — показателем условия $H$. Если требуется явно указать $\mu$, то говорят, что функция $f(z)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$. Значение коэффициента $A$ нас обычно не будет интересовать.

Приведем некоторые свойства функций, удовлетворяющих условию Гельдера.

$1^0$. Если множество $E$ ограничено и функция $f(z)$ удовлетворяет на $E$ условию $H(\mu)$, то она удовлетворяет и условию $H(\nu)$ при всяком $\nu\in(0,\,\mu)$.

Действительно, в этом случае

$$|\,f(z_1)-f(z_2)\,| \le A\,|\,z_1-z_2\,|^{\mu} = A\,|\,z_1-z_2\,|^{\mu-\nu}\,|\,z_1-z_2\,|^{\nu} \le A_1\,|\,z_1-z_2\,|^{\nu},$$

где $A_1 = A\,d^{\mu-\nu}$, а $d = \sup\limits_{z_1, z_2 \in E} |\,z_1 - z_2\,|$ — диаметр множества $E$.

В дальнейшем мы будем пользоваться условием $H$ главным образом для функций точки $t$ заданной замкнутой гладкой кривой Жордана $\Gamma$.

$2^0$. Если функция $\varphi(t)$ имеет на гладкой кривой $\Gamma : t = t(s)$, $0 \le s \le L$, ограниченную производную по $t$, т. е. существует предел

$$\lim_{\substack{t_1 \to t \\ t_1,\, t \in \Gamma}} \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t)}{t_1 - t} = \varphi'(t) \quad \text{и} \quad |\,\varphi'(t)\,| \le M, \quad t \in \Gamma,$$

то $\varphi(t)$ удовлетворяет на $\Gamma$ условию $H(1)$.

Действительно, полагая $\varphi\,[\,t(s)\,] = u(s) + iv(s)$, применяя к дифференцируемым в силу гладкости кривой $\Gamma$ функциям $u(s)$, $v(s)$ теорему о среднем значении и принимая во внимание соотношения (0.16) и (0.27) (см. «Введение»), получим

$$|\,\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\,| \le \frac{\sqrt{2}M}{k_0}\,|\,t_1 - t_2\,|.$$

Отсюда следует, что аналитическая в области $D$ функция $f(z)$ удовлетворяет условию $H(1)$ в любой замкнутой подобласти $\overline{D}_1 \subset D$, поскольку любые точки $z_1$, $z_2$ из $D$ можно соединить гладкой линией $\gamma \subset \overline{D}_1$ и производная $f'(z)$ ограничена в $\overline{D}_1$.

$3^0$. Если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию

$$|\,\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\,| \le A\,|\,t_1 - t_2\,|^{\mu} \tag{2.68}$$

в любых точках $t_1$ и $t_2$ кривой $\Gamma$, для которых $|\,t_1 - t_2\,| \le \delta$, где $\delta$ — некоторое положительное число, то она удовлетворяет условию $H(\mu)$ на всей кривой $\Gamma$.

В самом деле, если $|\,t_1 - t_2\,| > \delta$ и $|\,\varphi(t)\,| \le M$ на $\Gamma$, то

$$|\,\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\,| \le 2M < \frac{2M}{\delta^{\mu}}\,|\,t_1 - t_2\,|^{\mu},$$

поэтому для любых точек $t_1$, $t_2$ на $\Gamma$ функция $\varphi(t)$ будет удовлетворять условию $H(\mu)$ с коэффициентом $A' = \max\left(A, \dfrac{2M}{\delta^{\mu}}\right)$.

$4^0$. В силу соотношения (0.27) условие $H(\mu)$ эквивалентно условию

$$|\,\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\,| \le A\,[\,\sigma(t_1, t_2)\,]^{\mu} = A\,|\,s_1 - s_2\,|^{\mu}. \tag{2.69}$$

$5^0$. На основании двойного неравенства (0.24) и свойств $3^0$, $4^0$ заключаем, что условие $H(\mu)$ эквивалентно требованию, чтобы на каждой стандартной дуге $\overset{\frown}{ab}$ кривой $\Gamma$ выполнялось неравенство

$$|\,\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\,| \le A\,|\,r_1-r_2\,|^{\mu}, \tag{2.70}$$

где $r_1=|\,t_1-a\,|$, $r_2=|\,t_2-a\,|$.

В неравенствах (2.68) – (2.70) под $A$ можно понимать одну и ту же величину, так как при необходимости в некоторых из них величину $A$ можно заменить большей.

В дальнейшем нам понадобятся следующие неравенства.

Для любых положительных чисел $\sigma_1$, $\sigma_2$ и $\mu$, $0\le\mu\le1$, имеем

$$\sigma_1^{\mu}+\sigma_2^{\mu} \le 2^{\,1-\mu}(\sigma_1+\sigma_2)^{\mu}, \tag{2.71}$$

$$|\,\sigma_1^{\mu}-\sigma_2^{\mu}\,| \le |\,\sigma_1-\sigma_2\,|^{\mu}. \tag{2.72}$$

Считая $\sigma_1\ge\sigma_2$, что не ограничивает общности, и полагая $\sigma=\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$, приходим к неравенствам

$$\frac{1+\sigma^{\mu}}{(1+\sigma)^{\mu}} \le 2^{\,1-\mu} \quad (0\le\sigma\le 1), \qquad \frac{1-\sigma^{\mu}}{(1-\sigma)^{\mu}} \le 1 \quad (0\le\sigma<1),$$

справедливость которых устанавливается путем определения максимумов функций переменного $\sigma$, стоящих в левых частях.

Далее, при $x\ge0$ и $0\le\mu\le1$ имеет место неравенство

$$(1+x)^{\mu}-1 \le \mu x, \tag{2.73}$$

так как для функции $f(x)=(1{+}x)^{\mu}-1-\mu x$ имеем

$$f(0)=0, \quad f'(x)=\mu\,[\,(1+x)^{\mu-1}-1\,]\le 0.$$

Функцию, удовлетворяющую на гладкой кривой $\Gamma$ условию $H(\mu)$, будем называть еще принадлежащей классу $H(\mu)$ на $\Gamma$, или, если не требуется указания значения $\mu$, — классу $H$.

$6^0$. Пусть разомкнутая гладкая кривая $\overset{\frown}{ab}$ разбита точкой $t_0$ на две части: $\overset{\frown}{at_0}$ и $\overset{\frown}{t_0b}$. Если функция $\varphi(t)$ непрерывна на $\overset{\frown}{ab}$ и $\varphi(t)\in H(\mu)$ на $\overset{\frown}{at_0}$ и $\overset{\frown}{t_0b}$, то $\varphi(t)\in H(\mu)$ и на $\overset{\frown}{ab}$.

Действительно, если $t_1 \in \overset{\frown}{at_0}$, $t_2 \in \overset{\frown}{t_0 b}$ и $\sigma_1 = \sigma(t_1, t_0)$, $\sigma_2 = \sigma(t_0, t_2)$, то в силу (2.71) получим

$$
\begin{aligned}
&|\,\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\,| \le |\,\varphi(t_1) - \varphi(t_0)\,| + |\,\varphi(t_0) - \varphi(t_2)\,| \le \\
&\le A\,(\sigma_1^{\mu} + \sigma_2^{\mu}) \le 2^{\,1-\mu} A\,(\sigma_1 + \sigma_2)^{\,\mu} = 2^{\,1-\mu} A\,\sigma^{\,\mu}(t_1, t_2).
\end{aligned}
$$

Ясно также, что если функция $\varphi(t)$ непрерывна на замкнутой гладкой кривой $\Gamma$ и $\varphi(t) \in H(\mu)$ на дугах $\gamma_1$ и $\gamma_2$, на которые $\Gamma$ разбивается двумя точками, то $\varphi(t) \in H(\mu)$ и на $\Gamma$.

$7^0$. Если $\varphi(t) \in H(\mu)$, $\psi(t) \in H(\nu)$ на $\Gamma$, то функции $\varphi(t) + \psi(t)$, $\varphi(t) \cdot \psi(t)$ принадлежат классу $H(\lambda)$ на $\Gamma$, где $\lambda = \min(\mu, \nu)$.

Для суммы это утверждение очевидно, а для произведения оно следует из неравенства

$$
\begin{aligned}
|\,\varphi(t_1)\psi(t_1) - \varphi(t_2)\psi(t_2)\,| \le |\,\psi(t_1)\,| \cdot |\,\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\,| + \\
+ |\,\varphi(t_2)\,| \cdot |\,\psi(t_1) - \psi(t_2)\,|\,.
\end{aligned}
$$

$8^0$. Пусть $\varphi(t) \in H(\mu)$ на $\Gamma$, $0 \le \lambda < \mu \le 1$, $t_0$ — произвольная фиксированная точка на $\Gamma$ и

$$
\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{|\,t - t_0\,|^{\,\lambda}}, & t \ne t_0, \\ 0, & t = t_0. \end{cases}
$$

Тогда $\psi(t) \in H(\mu - \lambda)$ на $\Gamma$.

Действительно, пусть $\gamma$ — стандартная дуга с концами $a, b$, вырезаемая из $\Gamma$ стандартным кругом радиуса $\delta$ с центром в точке $t_0$. В силу $6^0$ можно ограничиться случаем, когда $t$ находится на части $\overset{\frown}{t_0 b}$ дуги $\gamma$. Положение точки $t$ на дуге $\overset{\frown}{t_0 b}$ однозначно определяется величиной $r = |\,t - t_0\,|$, поэтому, полагая $\tilde{\psi}\,(r) = \psi(t)$, $\omega(r) = \varphi(t) - \varphi(t_0)$ и считая $h > 0$ (что не ограничивает общности), будем иметь

$$
\begin{aligned}
&|\,\tilde{\psi}\,(r+h) - \tilde{\psi}\,(r)\,| = \left|\,\frac{\omega(r+h)}{(r+h)^{\,\lambda}} - \frac{\omega(r)}{r^{\,\lambda}}\,\right| \le \\
&\le \frac{|\,\omega(r+h) - \omega(r)\,|}{(r+h)^{\,\lambda}} + |\,\omega(r)\,|\,\frac{(r+h)^{\,\lambda} - r^{\lambda}}{r^{\,\lambda}\,(r+h)^{\,\lambda}}.
\end{aligned}
\qquad (2.74)
$$

Обозначим последние два слагаемые соотношения (2.75) соответственно через $\Delta_1$ и $\Delta_2$. Ввиду того, что $\omega(r) \in H(\mu)$, имеем

$$\Delta_1 \le A_1 \frac{h^{\mu}}{(r+h)^{\lambda}} = A\left(\frac{h}{r+h}\right)^{\lambda} h^{\mu-\lambda} < A\, h^{\mu-\lambda}. \tag{2.75}$$

Чтобы оценить $\Delta_2$, воспользуемся неравенством $|\,\omega(r)\,| \le A\, r^{\mu}$ и рассмотрим два возможных случая: $r \le h$ и $r > h$. При $r \le h$ в силу (2.72) получим

$$\Delta_2 \le A\left(\frac{h}{r+h}\right)^{\lambda} r^{\mu-\lambda} \le A\, h^{\mu-\lambda}, \tag{2.76}$$

а при $r > h$ в силу (2.73) будем иметь

$$\Delta_2 \le \frac{Ar^{\mu-\lambda}\left[\left(1+\dfrac{h}{r}\right)^{\lambda} - 1\right]}{\left(1+\dfrac{h}{r}\right)^{\lambda}} < A\lambda\left(\frac{h}{r}\right)^{1+\lambda-\mu} h^{\mu-\lambda} < Ah^{\mu-\lambda}. \tag{2.77}$$

В силу (2.75) – (2.77) из (2.74) получаем

$$|\, \tilde{\psi}\,(r+h) - \tilde{\psi}\,(r)\,| \le 2A\, h^{\mu-\lambda},$$

следовательно, согласно $5^0$ функция $\psi(t) \in H(\mu-\lambda)$ на $\gamma$.

Перейдем к рассмотрению функции $\psi(t)$ на части $\Gamma \setminus \gamma$ кривой $\Gamma$ : $t = t(s) = x(s) + iy(s)$, где $s$ — длина дуги кривой $\Gamma$, отсчитываемая в положительном направлении. Будем считать, что $t(0) = a$, $t_0 = t(s_0) = x_0 + iy_0$. Положив $\rho = r^{-\lambda}$, где $r = |\,t - t_0\,|$ на $\Gamma \setminus \gamma$, получим

$$\left|\,\frac{d\rho}{dt}\,\right| = \left|\,\frac{d\rho}{ds}\,\right| = \lambda r^{-\lambda-2} |\,[\,x(s) - x_0\,]\,x'(s) + [\,y(s) - y_0\,]\,y'(s)\,| \le$$

$$\le \lambda r^{-\lambda-1} \le \lambda \delta^{-\lambda-1}.$$

Поэтому согласно $2^0$, $7^0$ и $1^0$ функция $\psi(t) \in H(\mu) \subset H(\mu-\lambda)$ на $\Gamma \setminus \gamma$. Таким образом, в силу $6^0$ функция $\psi(t) \in H(\mu) \subset H(\mu-\lambda)$ и на $\Gamma$.

$9^0$. Пусть $\varphi(t) \in H(\mu)$ на $\Gamma$, $t_0$ — некоторая фиксированная точка кривой $\Gamma$, $\omega\,(t)$ — ограниченная на $\Gamma$ функция, $|\,\omega\,(t)\,| < M$, имеющая производную по $t$ всюду, кроме, быть может, точки $t = t_0$, удовлетворяющую условию

$$\left|\,\frac{d\omega}{dt}\,\right| \le \frac{C}{|\,t - t_0\,|}, \tag{2.78}$$

где $C$ — некоторая постоянная, $\psi(t) = [\,\varphi(t) - \varphi(t_0)\,]\,\omega(t)$. Тогда $\psi(t) \in H(\mu)$ на $\Gamma$.

В самом деле, пусть кривая $\Gamma$ задана уравнением $t=t(s)$, где $s$ — длина дуги кривой $\Gamma$, $\widetilde{\omega}=\omega\,[\,t(s)\,]$. Тогда в силу соотношений (0.16) и (0.27) условие (2.78) эквивалентно следующему:

$$\Bigl|\,\frac{d\,\widetilde{\omega}}{ds}\,\Bigr|\le\frac{C_0}{|\,s-s_0\,|}\,, \tag{2.79}$$

где $C_0=\dfrac{C}{k_0}$, $t_0=t(s_0)$. Можно считать, что $\omega(t)$ — действительная функция, так как в противном случае можно было бы вести рассуждения отдельно для действительной и мнимой частей. Положив $\widetilde{\varphi}\,(s)=$ $=\varphi[\,t(s)\,]$, $\widetilde{\psi}\,(s)=\psi[\,t(s)\,]$, имеем

$$|\,\widetilde{\psi}\,(s+h)-\widetilde{\psi}\,(s)\,|\le|\,[\,\widetilde{\varphi}\,(s+h)-\widetilde{\varphi}\,(s)\,]\,\widetilde{\omega}\,(s+h)\,|+$$
$$+\,|\,[\,\widetilde{\varphi}\,(s)-\widetilde{\varphi}\,(s_0)\,]\cdot[\,\widetilde{\omega}\,(s+h)-\widetilde{\omega}\,(s)\,]\,|.$$

Не нарушая общности, будем считать $s-s_0\ge 0$, $h>0$. Первое слагаемое в правой части последнего неравенства не превышает $AMh^{\mu}$, а второе слагаемое при $s-s_0\le h$ — $2AMh^{\mu}$. Для второго слагаемого при $s-s_0>h$ в силу теоремы о среднем значении и (2.79) имеем $(0<\xi<1)$

$$|\;\widetilde{\varphi}\,(s)-\widetilde{\varphi}\,(s_0)\,|\cdot|\;\widetilde{\omega}\,(s+h)-\widetilde{\omega}\,(s)\,|\le\frac{A(s-s_0)^{\mu}C_0h}{s+\xi h-s_0}<$$
$$<AC_0\Bigl(\frac{h}{s-s_0}\Bigr)^{1-\mu}h^{\mu}<AC_0h^{\mu}\,.$$

Тем самым наше утверждение доказано.

$10^0$. Пусть теперь $t_0$ — фиксированная точка на $\Gamma$, а $\theta=\arg\,(t-t_0)$, $t\in\Gamma$ — угол, составленный вектором $\overrightarrow{t_0t}$ с каким-либо фиксированным направлением. Условимся, что $\theta$ изменяется непрерывно, когда $t$ перемещается по $\Gamma$, не переходя через точку $t_0$. Вследствие того, что функция $\theta=\arg\,(t-t_0)$ является мнимой частью функции $\log\,(t-t_0)$ и

$$\frac{d\log\,(t-t_0)}{dt}=\frac{1}{t-t_0},$$

функция $\omega\,(t)=e^{-i\lambda\theta}$ удовлетворяет условию (2.78) и, очевидно, является ограниченной. Поэтому, если $\varphi(t)\in H(\mu)$ на $\Gamma$, $0\le\lambda<\mu\le 1$ и

$$\psi(t)=\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-t_0)^{\lambda}},$$

то в силу $8^0$ и $9^0$ функция $\psi(t)\in H(\mu-\lambda)$ на $\Gamma$.

## 2.11. Интеграл в смысле главного значения по Коши

Пусть $\Gamma$ — кусочно-гладкая кривая Жордана, а $\varphi(t)$ — заданная на $\Gamma$ непрерывная функция. Как уже было показано, интеграл типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{2.80}$$

является аналитической функцией переменного $z$ на комплексной плоскости всюду вне $\Gamma$. Функция $\varphi(t)$ называется плотностью интеграла типа Коши, а $\dfrac{1}{t-z}$ — ядром Коши.

Когда $z\in\Gamma$, интеграл в правой части формулы (2.80) в обычном понимании не существует, но при некоторых дополнительных предположениях относительно плотности $\varphi$ ему можно придать определенный смысл.

Будем предполагать, что $\Gamma$ — замкнутая гладкая кривая Жордана, а точка $z=t_0\in\Gamma$. Пусть число $\delta>0$ и меньше стандартного радиуса $\delta_0$ кривой $\Gamma$. Часть кривой $\Gamma$, лежащую вне круга $C(\delta,t_0)$, обозначим через $\Gamma_\delta$. Интеграл

$$\Phi_\delta(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}\,, \tag{2.81}$$

очевидно, имеет смысл в обычном понимании. Если существует

$$\lim_{\delta\to 0}\Phi_\delta(t_0)=\Phi(t_0),$$

то он называется интегралом в смысле главного значения по Коши или *сингулярным интегралом Коши*, и его обозначают обычным символом интеграла

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}\,. \tag{2.82}$$

Иногда символ интеграла в смысле главного значения по Коши дополняют буквами v.p. (v.p.$\int$) или звездочкой ($\int_*$ или $\int^*$).

*Для существования интеграла* (2.82) *в смысле главного значения по Коши при любом* $t_0\in\Gamma$ *достаточно, чтобы* $\varphi(t)\in H$ *на* $\Gamma$.

Для доказательства этого утверждения перепишем интеграл (2.81) в виде

$$\Phi_{\delta}(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta}\frac{dt}{t-t_0}\,. \tag{2.83}$$

Из условия $\varphi(t)\in H$ следует сходимость несобственного интеграла

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt. \tag{2.84}$$

Обозначим через $C_\delta$ (см. Рис. 10) часть окружности $|\,t-t_0\,| = \delta$, лежащую внутри $\Gamma$. Учитывая, что кривая $\Gamma$ гладкая, а для $t\in C_\delta$ имеем $t-t_0=\delta e^{i\varphi}$, $\alpha_\delta\le\varphi\le\beta_\delta$, по теореме Коши для функции $\dfrac{1}{t-t_0}$ получим

$$\int\limits_{\Gamma_\delta}\frac{dt}{t-t_0} = \int\limits_{\delta}\frac{dt}{t-t_0} = i\int\limits_{\alpha_\delta}^{\beta_\delta} d\varphi = i(\beta_\delta-\alpha_\delta)\to\pi i \quad \text{при} \quad \delta\to 0\,. \tag{2.85}$$

Переходя в равенстве (2.83) к пределу при $\delta\to 0$ и учитывая (2.84), (2.85), будем иметь

$$\lim_{\delta\to 0}\Phi_\delta(t_0) = \Phi(t_0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt + \frac{\varphi(t_0)}{2}\,. \tag{2.86}$$

## 2.12. Граничные значения интеграла типа Коши

**1. Формулы Сохоцкого – Племеля**. Пусть $\Gamma$ — замкнутая гладкая кривая Жордана, функция $\varphi(t)\in H(\mu)$ на $\Gamma$. Обозначим через $t_0$ произвольную фиксированную точку на $\Gamma$ и перепишем (2.80) следующим образом:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-z}\,dt + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{dt}{t-z}\,,\ z\notin\Gamma.$$

Из этого равенства в силу интегральной формулы Коши получим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - z}\, dt + \varphi(t_0),\ z \in D^+, \tag{2.87}$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - z}\, dt,\ z \in D^-, \tag{2.88}$$

где $D^+$ и $D^-$ — соответственно внутренняя и внешняя по отношению к $\Gamma$ области комплексной плоскости $z$.

Покажем, что для функции

$$\Psi(z) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - z}\, dt \tag{2.89}$$

существует $\lim\limits_{z \to t_0} \Psi(z) = \Psi(t_0)$, равномерный относительно $t_0$ на $\Gamma$, когда $z \to t_0$ изнутри или извне кривой $\Gamma$ по некасательному пути, т. е. так, что нетупой угол между отрезком $[\,z, t_0\,]$ и касательной к $\Gamma$ в точке $t_0$ больше некоторого числа $\theta_0$, $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$, одного и того же для всех $t_0$.

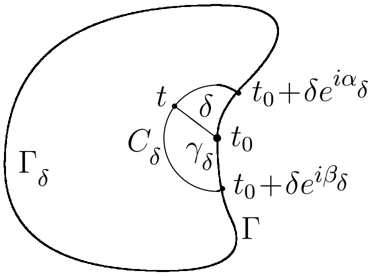

Рис. 10

В силу (2.89) имеем

$$\Psi(z) - \Psi(t_0) = (z - t_0) \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{(t - z)(t - t_0)}\, dt. \tag{2.90}$$

Обозначим через $\gamma_\delta$ дугу, вырезаемую из $\Gamma$ кругом $C(\delta, t_0)$ радиуса $\delta$, меньшего стандартного радиуса $\delta_0$ кривой $\Gamma$, соответствующего числу $\theta_0$, и запишем выражение (2.90) в виде

$$\Psi(z) - \Psi(t_0) = I_1 + I_2, \tag{2.91}$$

где

$$I_1 = (z-t_0)\int\limits_{\gamma_\delta} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-z)(t-t_0)}\,dt, \quad I_2 = (z-t_0)\int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-z)(t-t_0)}\,dt.$$

Из соотношений (0.16) и (0.17) следует, что на $\gamma_\delta$ имеем

$$|\,dt\,| = |\,ds\,| \le k^0\,|\,dr\,|, \tag{2.92}$$

где $r = |\,t-t_0\,|$, $(k^0)^{-1} = \cos\dfrac{\theta_0}{2}$. Далее, как было показано при доказательстве существования у гладкой кривой стандартного радиуса, соответствующего числу $\theta_0$, когда $t \in \gamma_\delta$, острый угол между отрезком $[\,t_0, t\,]$ и касательной к $\Gamma$ в точке $t_0$ меньше $\dfrac{\theta_0}{2}$ (см. Рис. 11). Обозначим через $\alpha$ и $\beta$ углы при вершинах $t_0$ и $t$ в треугольнике с вершинами в точках $t_0$, $t$ и $z$. Учитывая, что $z \to \to t_0$ указанным выше образом, заключаем, что $\alpha > \dfrac{\theta_0}{2}$. Воспользовавшись теоремой синусов, в силу этого неравенства получим

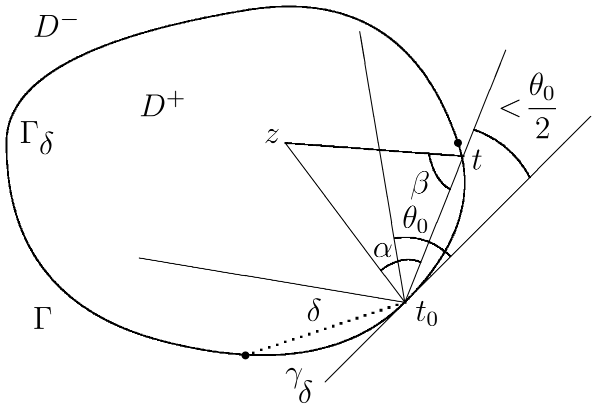

Рис. 11

$$|\,t-z\,| = |\,z-t_0\,|\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} > |\,z-t_0\,|\,\sin\frac{\theta_0}{2}\,. \tag{2.93}$$

В силу (2.92), (2.93) и того, что $\varphi(t) \in H(\mu)$, имеем

$$\begin{gathered}|\,I_1\,| \le |\,z-t_0\,|\int\limits_{\gamma_\delta} \frac{|\,\varphi(t)-\varphi(t_0)\,|}{|\,t-z\,|\cdot|\,t-t_0\,|}\,|\,dt\,| < \frac{2A}{\sin\dfrac{\theta_0}{2}\cos\dfrac{\theta_0}{2}}\int\limits_0^\delta r^{\,\mu-1}dr = \\ = \frac{4A}{\mu\sin\theta_0}\,\delta^{\,\mu}.\end{gathered} \tag{2.94}$$

Для $t \in \Gamma_\delta$ имеем $|\,t-t_0\,| \geq \delta$. В предположении, что $|\,z-t_0\,| < \dfrac{\delta}{2}$, получим $|\,t-z\,| > \delta/2$. Отсюда заключаем, что

$$|\,I_2\,| \leq |\,z-t_0\,| \int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{|\,\varphi(t)\,| + |\,\varphi(t_0)\,|}{|\,t-z\,| \cdot |\,t-t_0\,|} \,|\,dt\,| < \frac{4ML}{\delta^2}\,|\,z-t_0\,|, \tag{2.95}$$

где $M = \max\limits_{t\in\Gamma} |\,\varphi(t)\,|$, а $L$ — длина кривой $\Gamma$.

На основании (2.94) для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ число $\delta$ можно взять настолько малым, чтобы $|\,I_1\,| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Далее, в силу (2.95) при данном $\delta$ точку $z$ можно взять настолько близкой к $t_0$, чтобы $|\,I_2\,| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. В результате из (2.91) получаем, что $|\,\Psi(z) - \Psi(t_0)\,| < \varepsilon$, как только $|\,z-t_0\,|$ достаточно мало.

Следовательно, существуют предельные значения выражений (2.87) и (2.88), которые на основании (2.86) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z\to t_0\\ z\in D^+}} \Phi(z) = \Phi^+(t_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt + \varphi(t_0) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{\varphi(t_0)}{2}\,, \end{aligned} \tag{2.96}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z\to t_0\\ z\in D^-}} \Phi(z) = \Phi^-(t_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} - \frac{\varphi(t_0)}{2}\,. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Равенства (2.97) и (2.98) называются формулами Сохоцкого–Племеля.

Как видно из (2.95) и (2.96), для любых чисел $\theta_0$, $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$, и $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\rho = \rho\,(\theta_0, \varepsilon)$, что для любых точек $\tau \in \Gamma$ и $z$ из

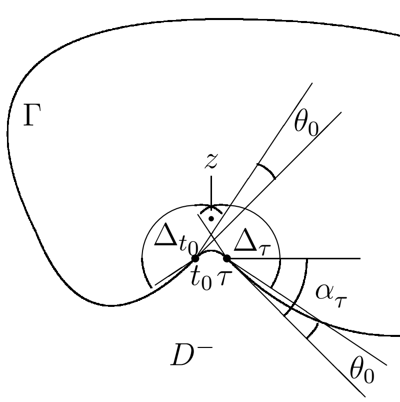

Рис. 12

множества $\Delta_\tau$, состоящего из точек круга $|\,z-\tau\,|<\rho$, удовлетворяющих условию

$$\theta_0<\arg(z-\tau)-\alpha(\tau)<\pi-\theta_0,$$

где $\alpha(\tau)$ — направление касательной кривой $\Gamma$ в точке $\tau$, выполняется неравенство

$$|\,\Psi(z)-\Psi(\tau)\,|<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Если теперь точки $\tau\in\Gamma$ и $t_0\in\Gamma$ достаточно близки, то (см. Рис. 12) $\Delta_\tau\cap\Delta_{t_0}\neq\emptyset$, поэтому для $z\in\Delta_\tau\cap\Delta_{t_0}$ получим

$$|\,\Psi(\tau)-\Psi(t_0)\,|\leq|\,\Psi(\tau)-\Psi(z)\,|+|\,\Psi(z)-\Psi(t_0)\,|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

что означает, что функция $\Psi(t_0)$ непрерывна на $\Gamma$, а следовательно, функции $\Phi^+(t_0)$ и $\Phi^-(t_0)$ тоже непрерывны на $\Gamma$.

Отсюда, в свою очередь, следует, что *формулы* (2.96) *и* (2.97) *остаются в силе, когда $z\to t_0$ по любому пути, лежащему в $D^+$ и $D^-$ соответственно.* Действительно, пусть $z\to t_0$ по любому пути, оставаясь, например, в $D^+$.

Заметим сначала, что если нормаль к незамкнутой гладкой кривой $\gamma$ в точке $t_1\in\gamma$ пересекает $\gamma$ в некоторой точке $t_2\neq t_1$, то изменение угла наклона касательной к кривой $\gamma$ на дуге $\overset{\frown}{t_1t_2}\subset\gamma$ больше $\dfrac{\pi}{2}$.

Далее, в силу того, что на стандартной дуге $\gamma_{\delta_0}$, вырезаемой из $\Gamma$ кругом $C(\delta_0,t_0)$, острый угол между касательными в точках $t_0$ и $t$ меньше $\dfrac{\theta_0}{2}$, острый угол между касательными в любых двух точках дуги $\gamma_{\delta_0}$ меньше $\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому нормаль к кривой $\gamma_{\delta_0}$, проходящая через любую точку $z\in C(\delta_0\cos\dfrac{\theta_0}{2},\,t_0)$, пересекает $\gamma_{\delta_0}$ только в одной точке $t$ и составляет с хордой $[\,t,t_0\,]$ нетупой угол $\beta>\dfrac{\pi-\theta_0}{2}$. Из треугольника с вершинами $t_0$, $t$ и $z$ с помощью теоремы синусов получим

$$|\,t-z\,| = |\,z-t_0\,|\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < |\,z-t_0\,|\,\sec\frac{\theta_0}{2}\,,$$

$$|\,t-t_0\,| = |\,z-t_0\,|\,\frac{\sin(\pi-\alpha-\beta)}{\sin\beta} < |\,z-t_0\,|\,\sec\frac{\theta_0}{2}\,.$$

Это означает, что вместе с $|\,z-t_0\,|$ малыми будут также величины $|\,z-t\,|$ и $|\,t-t_0\,|$. Следовательно, разность

$$\Phi(z)-\Phi^+(t_0) = [\,\Phi(z)-\Phi^+(t)\,] + [\,\Phi^+(t)-\Phi^+(t_0)\,]$$

по модулю может быть сделана как угодно малой при достаточно малом $|\,z-t_0\,|$.

Точно так же можно показать, что разность $\Phi(z)-\Phi^-(t_0)$ по модулю может быть сделана как угодно малой при достаточно малом $|\,z-t_0\,|$, когда $z\in D^-$.

Из формул Сохоцкого – Племеля (2.96) и (2.97), которые можно также записать в виде

$$\Phi^\pm(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} \pm \frac{\varphi(t_0)}{2}\,,$$

непосредственно следует справедливость равенств

$$\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0) = \varphi(t_0), \tag{2.98}$$

$$\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{2.99}$$

первое из которых называют формулой скачка.

**2. Характер непрерывности граничных значений $\Phi^\pm(t)$ интеграла типа Коши** (2.80) выясняет следующее утверждение.

Теорема Племеля – Привалова. *Если плотность интеграла типа Коши $\varphi(t)\in H(\mu)$ на замкнутой гладкой кривой Жордана $\Gamma$, то его граничные значения $\Phi^\pm(t)\in H(\mu)$ при $\mu<1$ и $\Phi^\pm(t)\in H(1-\varepsilon)$ при $\mu=1$ на $\Gamma$, где $\varepsilon$ — произвольно малое положительное число.*

**Доказательство.** В силу (2.96), (2.97) и свойства $7^0$ функций класса Гельдера достаточно показать, что функция

$$\Psi(t_0) = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}\, dt \tag{2.100}$$

удовлетворяет условию

$$|\,\Psi(t_1) - \Psi(t_0)\,| \le C|\,t_1 - t_0\,|^{\nu},$$

где $\nu = \mu$ при $\mu < 1$ и $\nu = 1 - \varepsilon$ при $\mu = 1$, для любых точек $t_0$, $t_1$ на $\Gamma$.

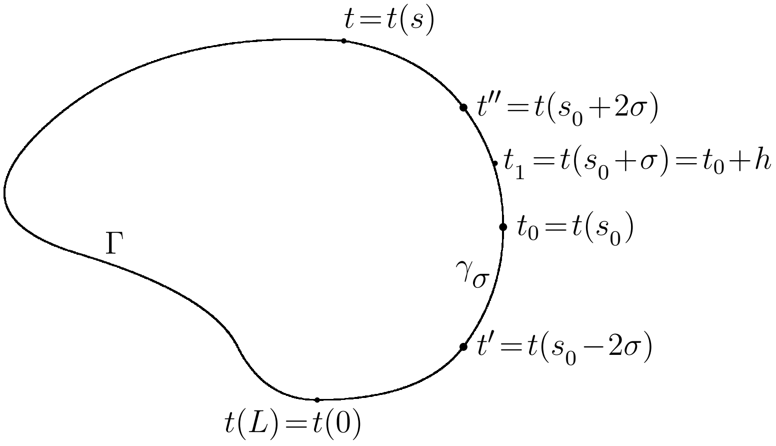

Рис. 13

Пусть $s, s_0, s_1$ — дуговые абсциссы, соответствующие точкам $t$, $t_0$, $t_1$. Положим $t_1 - t_0 = h$, $s_1 - s_0 = \sigma$. Не нарушая общности, будем считать $0 < 2\sigma \le s_0$, $s_0 + 2\sigma \le L$, где $L$ — длина кривой $\Gamma$. В силу (2.100) имеем

$$\Psi(t_1) - \Psi(t_0) = \Psi(t_0 + h) - \Psi(t_0) =$$

$$= \int_{\Gamma} \Big[\, \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0 + h)}{t - t_0 - h} - \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \,\Big]\, dt\,.$$

Обозначим через $\gamma_\sigma$ дугу $\overset{\frown}{t't''}$ кривой $\Gamma$, для которой $\sigma(t', t_0) = \sigma(t_0, t'') = 2\sigma$ (см. Рис. 13), и разобьем этот интеграл на два: $I_0$ — по дуге $\gamma_\sigma$ и $I$ — по $\Gamma \backslash \gamma_\sigma$.

Из условия $\varphi(t) \in H(\mu)$ на $\Gamma$ (см. (2.68)) следует, что

$$|\,I_0\,| \le A \int_{\gamma_\sigma} \Big(|\,t - t_0 - h\,|^{\mu - 1} + |\,t - t_0\,|^{\mu - 1}\Big)\, ds \le$$

$$\leq A \int\limits_{s_0-2\sigma}^{s_0+2\sigma} \Big(|\, s-s_0-\sigma\,|^{\mu-1} + |\, s-s_0\,|^{\mu-1}\Big)\, ds.$$

Произведя элементарные выкладки и учитывая (0.27), получим

$$|\, I_0\,| \leq C_0\, |\, h\,|^{\mu}, \quad C_0 = \frac{A\big(1+2^{\mu}+2{\cdot}3^{\mu}\big)}{k_0\mu}\,.$$

Перепишем теперь интеграл $I$ в виде $I_1+I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma\setminus\gamma_\sigma} \frac{\varphi(t_0)-\varphi(t_0+h)}{t-t_0}\, dt = [\,\varphi(t_0)-\varphi(t_0+h)\,]\log\frac{t'-t_0}{t''-t_0}\,,$$

$$I_2 = \int\limits_{\Gamma\setminus\gamma_\sigma} [\,\varphi(t)-\varphi(t_0+h)\,]\Big(\frac{1}{t-t_0-h}-\frac{1}{t-t_0}\Big)\, dt =$$

$$= h \int\limits_{\Gamma\setminus\gamma_\sigma} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0+h)}{(t-t_0-h)(t-t_0)}\, dt.$$

Поскольку $\arg(t-t_0)$, очевидно, является на $\Gamma\setminus\{t_0\}$ равномерно ограниченной относительно $t_0$ функцией,

$$k_0 = \frac{k_0 2\sigma}{2\sigma} \leq \Big|\, \frac{t'-t_0}{t''-t_0}\,\Big| \leq \frac{2\sigma}{k_0 2\sigma} = \frac{1}{k_0}\,,$$

а $\varphi(t)\in H(\mu)$, то $|\, I_1\,| \leq C_1\, |\, h\,|^{\mu}$. Принимая во внимание (0.27) и учитывая, что $|\, s-s_0\,| \geq 2\sigma$ на $\Gamma\setminus\gamma_\sigma$, получим далее

$$|\, I_2\,| \leq \frac{A}{k_0^2}\, |\, h\,| \int\limits_{\Gamma\setminus\gamma_\sigma} \frac{ds}{\Big|\, 1-\dfrac{\sigma}{s-s_0}\,\Big|^{1-\mu} |\, s-s_0\,|^{2-\mu}} \leq$$

$$\leq \frac{2^{1-\mu}A}{k_0^2}\,|\,h\,| \int\limits_{\Gamma\setminus\gamma_\sigma} \frac{ds}{|\,s-s_0\,|^{\,2-\mu}} =$$

$$= \frac{2^{1-\mu}A}{k_0^2}\,|\,h\,|\Big( \int\limits_0^{s_0-2\sigma} \frac{ds}{(s_0-s)^{\,2-\mu}} + \int\limits_{s_0+2\sigma}^{L} \frac{ds}{(s-s_0)^{\,2-\mu}}\Big)\,.$$

Отсюда при $\mu<1$ получаем оценку

$$|\,I_2\,| \leq C_2\,|\,h\,|^{\mu}, \quad \text{где} \quad C_2 = \frac{2A}{k_0^2\,(1-\mu)}\,,$$

а при $\mu=1$ и достаточно малом $|\,h\,|$ — оценку

$$|\,I_2\,| \leq C_2'\,|\,h\,|\log\frac{1}{|\,h\,|} \leq C_2'\,|\,h\,|^{1-\,\varepsilon}\,,$$

что завершает доказательство теоремы.

Относительно поведения интеграла типа Коши в замкнутых областях $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$ имеет место утверждение, подобное теореме Племеля–Привалова.

Теорема. *Если функция $\varphi(t)\in H(\mu)$ на замкнутой гладкой кривой Жордана $\Gamma$ и $D^+$, $D^-$ — внутренняя и внешняя по отношению к $\Gamma$ области, то интеграл типа Коши $\Phi(z)\in H(\mu)$ при $\mu<1$ и $\Phi(z)\in H(1-\varepsilon)$ при $\mu=1$, где $\varepsilon$ — произвольно малое положительное число, в каждой из замкнутых областей $\overline{D^+}$, $\overline{D^-}$. При этом под $\Phi(z)$ при $z\in\Gamma$ следует понимать соответствующее граничное значение ($\Phi^+$ или $\Phi^-$).*

**Доказательство.** Будем считать $\mu<1$, так как в случае $\mu=1$ можно исходить из того, что если $\varphi(t)\in H(1)$, то тем более $\varphi(t)\in H(1-\varepsilon)$ на $\Gamma$.

Возьмем произвольную точку $t_0\in\Gamma$ и рассмотрим в области $D^+$ какую-нибудь ветвь функции

$$\Psi(z) = \frac{\Phi(z)-\Phi^+(t_0)}{(z-t_0)^{\,\lambda}}\,, \quad 0\leq\lambda<\mu\,. \tag{2.101}$$

В силу теоремы Племеля – Привалова и свойства $10^0$ функций класса Гельдера граничное значение этой функции

$$\Psi^+(t) = \frac{\Phi^+(t) - \Phi^+(t_0)}{(t-t_0)^{\lambda}}\,, \quad 0 \le \lambda < \mu\,, \tag{2.102}$$

удовлетворяет на $\Gamma$ условию $H(\mu-\lambda)$.

Удалив из области $D^+$ множество $\Delta = \overline{C(\delta, t_0)} \cap D^+$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, и обозначив через $\Gamma_\delta$ и $C_\delta$ соответственно часть кривой $\Gamma$, лежащую вне круга $C(\delta, t_0)$, и часть окружности $|\,t-t_0\,| = \delta$, лежащую в области $D^+$ и пробегаемую в направлении, порожденном положительным направлением на $\Gamma$, в силу (2.101) и интегральной формулы Коши получим

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{\Psi^+(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\delta} \frac{\Phi(t) - \Phi^+(t_0)}{(t-t_0)^{\lambda}(t-z)}\,dt\,, \quad z \in D^+ \backslash \Delta.$$

Поскольку $\max\limits_{z\in\overline{D^+}} |\,\Phi(z)\,| = \max\limits_{t\in\Gamma} |\,\Phi^+(t)\,| = M < \infty$, то второй интеграл в этом выражении стремится к нулю при $\delta \to 0$ в силу того, что

$$\frac{|\,\Phi(t) - \Phi^+(t_0)\,|}{|\,t-t_0\,|^{\lambda}}\Big|_{t\in C_\delta} \le \frac{2M}{\delta^{\lambda}}\,.$$

Отсюда следует, что в области $D^+$ справедлива формула

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\Psi^+(t)\,dt}{t-z}\,,$$

из которой получаем непрерывность в $\overline{D^+}$ функции $\Psi(z)$, дополненной на $\Gamma$ значениями $\Psi^+(t)$.

Следовательно, согласно принципу максимума модуля

$$\frac{|\,\Phi(z) - \Phi^+(t_0)\,|}{|\,z-t_0\,|^{\lambda}} = |\,\Psi(z)\,| \le \max_{t\in\Gamma} |\,\Psi^+(t)\,| \le C, \tag{2.103}$$

где постоянная $C$ не зависит ни от положения $t_0$ на $\Gamma$, ни от величины $\lambda < \mu$. В самом деле, по теореме Племеля – Привалова $\Phi^+(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ с некоторым коэффициентом $C_\mu$. Тогда, как следует из доказательства свойства $1^0$ функций класса Гельдера, при любом $\lambda$, $0 < \lambda < \mu$, функция $\Phi^+(t)$ удовлетворяет условию $H(\lambda)$ с коэффициентом $C = \max(C_\mu, C_\mu d^\mu)$, где $d$ — диаметр кривой $\Gamma$.

Отсюда в силу (2.103) заключаем, что соотношение (2.104) остается верным также при $\lambda = \mu$, и мы имеем

$$|\,\Phi(z) - \Phi^+(t_0)\,| \le C\,|\,z - t_0\,|^{\mu}\,. \tag{2.104}$$

Это неравенство аналогично устанавливается и для $z \in D^-$. Таким образом, неравенство

$$|\,\Phi(z_1) - \Phi(z_2)\,| \le C\,|\,z_1 - z_2\,|^{\mu}$$

установлено в случае, когда по крайней мере одна из точек $z_1$, $z_2$ лежит на $\Gamma$.

Пусть теперь обе точки $z_1, z_2$ лежат в области $D^+$ и $\rho_0$ — произвольное положительное число, меньшее стандартного радиуса $\delta_0$ кривой $\Gamma$, соответствующего некоторому числу $\theta_0$, $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$. В замкнутой области $\overline{D^+_{\rho_0}} = \{z : z \in D^+,\ \rho(z, \Gamma) \ge \rho_0\}$ функция $\Phi(z) \in H(1) \in H(\mu)$ в силу свойства $2^0$ функций класса $H$, поэтому достаточно ограничиться случаем, когда по крайней мере одна из точек $z_1$, $z_2$, скажем, точка $z_2$ находится от $\Gamma$ на расстоянии, меньшем $\rho_0$.

Обозначим временно $z_2$ через $z_0$ и $z_1$ через $z$, и пусть $t_0$ — ближайшая к $z_0$ точка кривой $\Gamma$. В области $D^+$ с разрезом вдоль отрезка $[\,z_0, t_0\,]$ (нормального к $\Gamma$ в точке $t_0$) рассмотрим ветвь функции

$$\Psi_0(z) = \frac{\Phi(z) - \Phi(z_0)}{(z - z_0)^{\mu}}\,,$$

которая, очевидно, непрерывно продолжается на всю границу этой области. Граничное значение этой функции на $\Gamma$ удовлетворяет в силу (2.104) условию $|\,\Psi_0^+(t)\,| \le C$.

Чтобы изучить поведение функции $\Psi_0(z)$ на каждом из краев разреза $[\,z_0, t_0\,]$, рассмотрим производную интеграла типа Коши

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)\,dt}{(t - z)^2}\,, \quad z \in [\,z_0, t_0\,]\,. \tag{2.105}$$

Обозначим через $\gamma_{\rho_0}$ дугу $\overset{\frown}{t't''}$, вырезаемую из $\Gamma$ кругом $C(\rho_0, t_0)$, и разобьем интеграл (2.105) на два: $\Phi'(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z)$, первый из которых взят по $\gamma_{\rho_0}$, а второй — по $\Gamma_{\rho_0} = \Gamma \backslash \gamma_{\rho_0}$. Представим $\Psi_1(z)$ в виде

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\rho_0}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{(t-z)^2}\, dt + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \left( \frac{1}{t'-z} - \frac{1}{t''-z} \right). \qquad (2.106)$$

Из треугольника с вершинами в точках $t_0$, $t$, $z$ с углом $\alpha$ при вершине $t_0$ и сторонами $|\, z-t_0 \,| = \rho$, $|\, t-t_0 \,| = r$, по теореме косинусов с учетом неравенства $\alpha > \dfrac{\pi - \theta_0}{2}$ при $t \in \gamma_{\rho_0}$ имеем

$$|\, t-z \,|^2 > r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin\frac{\theta_0}{2} = \left( r - \rho \sin\frac{\theta_0}{2} \right)^2 + \rho^2 \cos^2\frac{\theta_0}{2}.$$

Поэтому, используя (2.68) и (2.92), получаем неравенство

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\rho_0}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{(t-z)^2}\, dt \right| <$$

$$< \frac{A}{\pi \cos\frac{\theta_0}{2}} \int\limits_0^{\rho_0} \frac{r^{\mu}\, dr}{\left( r - \rho \sin\frac{\theta_0}{2} \right)^2 + \rho^2 \cos^2\frac{\theta_0}{2}} <$$

$$< \frac{A}{\pi \cos\frac{\theta_0}{2}}\, \rho^{\mu-1} \int\limits_0^{\infty} \frac{u^{\mu}\, du}{\left( u - \sin\frac{\theta_0}{2} \right)^2 + \cos^2\frac{\theta_0}{2}}.$$

Отсюда, поскольку $\Psi_2$ и второй член правой части (2.106) ограничены (так как $|\, t-z \,| > \min\left( \delta_0 - \rho_0,\ \rho_0 \cos\dfrac{\theta_0}{2} \right)$ для $t \in \Gamma_{\rho_0}$ и $z \in [\, z_0, t_0 \,]$, а $|\, t'-z \,|$ и $|\, t''-z \,|$ больше $\rho_0 \cos\dfrac{\theta_0}{2}$), заключаем, что

$$|\, \Phi'(z) \,| \le C_1 \rho^{\mu-1} = C_1 |\, z-t_0 \,|^{\mu-1}, \qquad (2.107)$$

где $C_1$ — положительная постоянная. Из формулы

$$\Phi(z)-\Phi(z_0)=\int\limits_{z_0}^{z}\Phi'(\zeta)\,d\zeta$$

в силу (2.108) и (2.73) получаем соотношение

$$|\,\Phi(z)-\Phi(z_0)\,|\le C_1\int\limits_{|z-t_0|}^{|z_0-t_0|}\rho^{\mu-1}\,d\rho=$$

$$=\frac{C_1}{\mu}\big(\,|\,z_0-t_0\,|^{\mu}-|\,z-t_0\,|^{\mu}\big)\le\frac{C_1}{\mu}\,|\,z-z_0\,|^{\mu}\,,$$

означающее, что на обоих краях разреза $[\,z_0,t_0\,]$ граничное значение функции $\Psi_0(z)$ также ограничено некоторой постоянной $C$ (не зависящей от $z_0$).

Таким образом, по принципу максимума модуля $|\,\Psi(z)\,|\le C$ всюду в $D^+$.

Аналогично устанавливается такое же неравенство для области $D^-$, завершающее доказательство теоремы.

**3.** Заметим, что из теоремы Племеля – Привалова на основании (2.96), (2.97) и свойства $7^0$ функций класса $H$ следует справедливость утверждения: *если* $\varphi(t)\in H(\mu)$ *на* $\Gamma$, *то интеграл в смысле главного значения* $\Phi(t_0)\in H(\mu)$ *при* $\mu<1$ *и* $\Phi(t_0)\in H(1-\varepsilon)$ *при* $\mu=1$, *где* $\varepsilon$ — *произвольно малое положительное число.*

Докажем теперь, что функция

$$\Phi(t_0,\tau)=\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(t,\tau)\,dt}{t-t_0}\,,$$

где плотность $\varphi(t,\tau)$ принадлежит классу $H(\mu)$ по $t$ на $\Gamma$ и классу $H(\nu)$ по $\tau$ на некотором множестве $T$, удовлетворяет условию $H$ по обоим переменным $t_0$, $\tau$ при $t_0\in\Gamma$, $\tau\in T$.

Очевидно, достаточно доказать, что функция $\Phi(t_0,\tau)$ удовлетворяет условию $H$ по переменному $\tau$.

Воспользовавшись формулой (2.86) при $\varphi(t) \equiv 1$, представим разность $\Phi(t_0, \tau{+}h) - \Phi(t_0, \tau)$ в виде

$$\Phi(t_0, \tau{+}h) - \Phi(t_0, \tau) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t, \tau{+}h) - \varphi(t, \tau)}{t{-}t_0}\, dt =$$

$$= I + \pi i\, [\, \varphi(t_0,\, \tau{+}h) - \varphi(t_0,\, \tau)\, ],$$

где

$$I = \int\limits_{\Gamma} \{[\, \varphi(t, \tau{+}h) - \varphi(t_0, \tau{+}h)\, ] - [\, \varphi(t, \tau) - \varphi(t_0, \tau)\, ]\} \frac{dt}{t{-}t_0}\, .$$

Второе слагаемое в этом представлении, очевидно, не превосходит по модулю $A\,|\,h\,|^{\nu}$, где $A$ — постоянная. Для оценки интеграла $I$ обозначим через $\gamma_\sigma$ дугу кривой $\Gamma$ длины $\sigma{=}|\,h\,|$ с серединой $t_0$ и разобьем $I$ на сумму $I_1 + I_2$ интегралов по $\gamma_\sigma$ и $\Gamma \setminus \gamma_\sigma$ соответственно. Легко видеть, что

$$|\, I_1\, | \le A_1 \int\limits_{\gamma_\sigma} \frac{ds}{|\, s{-}s_0\, |^{\,1-\mu}} \le B\, \sigma^{\mu}\, .$$

Далее, записав $I_2$ в виде

$$I_2 = \int\limits_{\Gamma \setminus \gamma_\sigma} \frac{\varphi(t, \tau{+}h) - \varphi(t, \tau)}{t{-}t_0}\, dt -$$

$$-[\, \varphi(t_0, \tau{+}h) - \varphi(t_0, \tau)\, ] \int\limits_{\Gamma \setminus \gamma_\sigma} \frac{dt}{t{-}t_0}\, ,$$

получим для второго слагаемого оценку сверху $B_1\, \sigma^{\nu}$. Первое же слагаемое при достаточно малом $\sigma$ не превосходит по модулю

$$A_2\, |\, h\, |^{\nu} \int\limits_{\Gamma \setminus \gamma_\sigma} \frac{ds}{|\, s{-}s_0\, |} \le B_2\, \sigma^{\nu}\, |\log \sigma\, |\, .$$

Таким образом, наше утверждение доказано.

В частности, когда $T{=}\Gamma$ и $\tau{=}t_0$, функция

$$F(t_0) = \Phi(t_0, t_0) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t, t_0)\, dt}{t{-}t_0}$$

удовлетворяет условию $H$ на кривой $\Gamma$.

# Глава 3

# РЯД ЛОРАНА
# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ

## 3.1. Ряд Лорана. Изолированные особые точки

**1. Ряд Лорана**. Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-z_0)^k, \ z_0 \in \mathbb{C}, \tag{3.1}$$

каждый член которого имеет смысл для всех $z \neq z_0$. С помощью замены $z-z_0=\frac{1}{\zeta}$ ряд (3.1) приводится к степенному ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \zeta^k. \tag{3.2}$$

Если $\rho$ — радиус сходимости ряда (3.2), а $S_*(\zeta)$ — его сумма, то ряд (3.1) абсолютно сходится в области $|z-z_0|>r$, $r=\frac{1}{\rho}$, и его сумма $S_1(z)=S_*\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$. Поскольку функция $S_*(\zeta)$ аналитична в круге $|\zeta|< <\rho$, а функция $\zeta=\frac{1}{z-z_0}$ — в области $|z-z_0|>r$, то функция $S_1(z)$, как суперпозиция двух аналитических функций, аналитична в области $|z-z_0|>r$. Функциональный ряд (3.1) естественно называть степенным рядом по отрицательным стпеням $z-z_0$.

Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

сходится в круге $|z-z_0|<R$ и имеет сумму $S_2(z)$, то при $r<R$ аналитическая в кольце $K: r<|z-z_0|<R$ функция $S(z)=S_1(z)+S_2(z)$ является суммой ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k. \tag{3.3}$$

Имеет место и обратное утверждение.

Теорема Лорана. *Аналитическая в кольце* $K : r < |z - z_0| < R$ *функция* $f(z)$ *в каждой точке* $z \in K$ *единственным образом представляется в виде ряда* (3.3), *где коэффициенты* $c_k$, $k = 0, \pm 1, \ldots,$ *определены по формуле* (2.47), *в которой в качестве* $\gamma$ *надо взять окружность* $|t - z_0| = \delta$, $r < \delta < R$.

**Доказательство.** Пусть $z$ — произвольная точка кольца $K$. Возьмем какое-нибудь, содержащее эту точку, кольцо $K_1 : r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R$. По интегральной формуле Коши для $z \in K_1$ имеем

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1 \cup \gamma_1^-} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)\left(1 - \dfrac{z-z_0}{t-z_0}\right)} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(t)\,dt}{(z-z_0)\left(1 - \dfrac{t-z_0}{z-z_0}\right)}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\Gamma_1 : |t - z_0| = R_1$, $\gamma_1 : |t - z_0| = r_1$. По признаку Вейерштрасса при каждом фиксированном $z \in K_1$ ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^k \frac{f(t)}{t-z_0} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^k \frac{f(t)}{z-z_0} = \sum_{k=-1}^{-\infty} \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^{k+1} \frac{f(t)}{z-z_0}$$

сходятся равномерно относительно $t$ на $\Gamma_1$ и $\gamma_1$ соответственно, поскольку функция $\dfrac{f(t)}{t-z_0}$ ограничена на $\Gamma_1$, $\dfrac{f(t)}{z-z_0}$ — на $\gamma_1$, а

$$\left| \frac{z-z_0}{t-z_0} \right|_{t \in \Gamma_1} = \frac{|z-z_0|}{R_1} < 1 \quad \text{и} \quad \left| \frac{t-z_0}{z-z_0} \right|_{t \in \gamma_1} = \frac{r_1}{|z-z_0|} < 1.$$

Поэтому, подставляя эти ряды в (3.4) вместо их сумм, с помощью почленного интегрирования получим равенство

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \tag{3.5}$$

в котором

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{k+1}}\,, \quad k=0,1,\ldots,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{k+1}}\,, \quad k=-1,-2,\ldots$$

Так как функции $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$, $k \in \mathbb{Z}$, аналитичны в кольце $K$, то по обобщенной теореме Коши для двусвязной области в этих интегралах вместо $\Gamma_1$ и $\gamma_1$ можно взять любую окружность $\gamma : |\,t-z_0\,| = \delta$, $r < < \delta < R$, в результате чего для определения коэффициентов $c_k$ получим формулу (2.47) для всех целых значений $k$.

Предположим теперь, что существует другое разложение функции $f(z)$ по степеням $z-z_0$ в кольце $K$:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k (z-z_0)^k,\ z\in K.$$

Умножая равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k (z-z_0)^k$$

на $(z-z_0)^{-n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, и почленно интегрируя ряды по окружности $\gamma : |\,z-z_0\,| = \delta$, $r < \delta < R$, на основании легко проверяемой с помощью замены $z-z_0 = \delta e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, формулы

$$\int\limits_{\gamma} (z-z_0)^m dz = \begin{cases} 0, & m \neq -1, \\ 2\pi i, & m=-1, \end{cases}$$

получим: $c_n = c'_n$, $n=0, \pm 1, \ldots$

Таким образом, *разложение* (3.5) *функции* $f(z)$ *в данном кольце* $K$ *единственно.*

Ряд в правой части (3.5) называется рядом Лорана аналитической в кольце $K$ функции $f(z)$, а ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-z_0)^{-k} = f_1\Big(\frac{1}{z-z_0}\Big) \tag{3.6}$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k = f_2(z-z_0) \tag{3.7}$$

— соответственно главной (иррегулярной) и правильной (регулярной) частями лорановского разложения этой функции. Очевидно, что ряд (3.7) сходится в круге $C(R, z_0)$, а ряд (3.6) — вне замкнутого круга $\overline{C(r, z_0)}$.

**2. Изолированные особые точки аналитической функции.** Если в некоторой окрестности $C(\delta, z_0)$ точки $z_0$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функция $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z_0$ (в которой она может быть и не заданной), то $z_0$ называется изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$.

Согласно теореме Лорана в области $0 < |\,z-z_0\,| < \delta$ функция $f(z)$ разлагается в ряд (3.5). В зависимости от того, является ли множество отличных от нуля коэффициентов при отрицательных степенях $z-z_0$ в лорановском разложении (3.5) функции $f(z)$ пустым, конечным или бесконечным, $z_0$ называется устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(z)$.

Рассмотрим вопрос о поведении аналитической функции в окрестности ее изолированной особой точки.

По определению устранимой особой точки функция $f(z)$ представляется в проколотой окрестности $C^*(\delta, z_0)$ в виде степенного ряда (2.45). Так как этот ряд сходится в круге $C(\delta, z_0)$ и его сумма $S(z)$ является аналитической в этом круге функцией, совпадающей с $f(z)$ при $z \neq z_0$, то в результате доопределения (или переопределения) в точке $z_0$ значением $S(z_0) = c_0 = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ функция $f(z)$ становится аналитической в круге $C(\delta, z_0)$. Следовательно, *в каждой проколотой окрестности $C^*(\delta_1, z_0)$, $0 < \delta_1 < \delta$, устранимой особой точки $z_0$ функция $f(z)$ ограничена.*

Пусть теперь точка $z_0$ является полюсом функции $f(z)$. Число

$m = \max\limits_{c_k \neq 0}(-k)$ называется порядком полюса $z_0$. При $m=1$ полюс называется простым. В случае полюса порядка $m$ имеем

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \quad c_{-m} \neq 0, \tag{3.8}$$

поэтому для функции

$$\varphi(z) = (z-z_0)^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-m}(z-z_0)^k \tag{3.9}$$

точка $z_0$ является устранимой особой точкой и

$$\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = c_{-m} \neq 0\,. \tag{3.10}$$

Отсюда следует, что для любого положительного числа $a < |\, c_{-m} \,|$ существует такое число $\delta_1$, $0 < \delta_1 < \delta$, что в проколотой окрестности $C^*(\delta_1, z_0)$

имеем $|\, c_{-m} \,| - |\, \varphi(z) \,| \leq |\, \varphi(z) - c_{-m} \,| < |\, c_{-m} \,| - a$, т. е. $|\, \varphi(z) \,| > a$ или $|\, f(z) \,| > \dfrac{a}{|\, z-z_0 \,|^m}$, так что

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty\,.$$

Из определений нуля и полюса следует, что *если точка $z_0$ является нулем порядка $m$ аналитической в области $D$ функции $f(z)$, то для функции $F(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ точка $z_0$ является полюсом порядка $m$.*

Действительно, в силу изолированности нуля $z_0$ функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = (z-z_0)^m \psi(z)$, где $\psi(z)$ — аналитическая в области $D$ функция, не обращающаяся в нуль в некотором круге $C(\delta, z_0) \subset D$. Следовательно, функция $\dfrac{1}{\psi(z)}$ тоже аналитична в круге $C(\delta, z_0)$, и если ее разложением Тейлора в окрестности точки $z_0$ является ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$, то лорановское разложение функции $F(z)$ в области $0 < |\, z-z_0 \,| < \delta$ имеет вид

$$F(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_{k+m} (z-z_0)^k.$$

Поскольку $a_0 \neq 0$, то отсюда следует, что точка $z_0$ является полюсом порядка $m$ функции $F(z)$.

Имеет место и обратное утверждение: *если точка $z_0$ является полюсом порядка $m$ функции $f(z)$, то она будет нулем порядка $m$ функции $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$, доопределенной в точке $z=z_0$ значением, равным нулю.*

В самом деле, в силу (3.9) и (3.10), положив $\varphi(z_0)=c_{-m}$, заключаем, что в некотором круге $C(\delta_2, z_0)$ вместе с $\varphi(z)$ аналитической и не обращающейся в нуль будет также функция $\dfrac{1}{\varphi(z)}$, и если ее разложением Тейлора в окрестности точки $z_0$ является ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k, \quad b_0 \neq 0,$$

то разложение функции

$$F(z)=\frac{(z-z_0)^m}{\varphi(z)}$$

имеет вид

$$F(z) = \sum_{k=m}^{\infty} b_{k-m} (z-z_0)^k,$$

что и требовалось доказать.

Из установленной связи между нулями и полюсами функций $f(z)$ и $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ легко получается следующее утверждение: *если в некоторой проколотой окрестности существенно особой точки $z_0$ аналитическая функция $f(z) \neq 0$, то эта точка является существенно особой и для функции $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.*

Действительно, так как $f(z) \neq 0$ в некоторой области $0 < |\,z-z_0\,| < \delta$, то $z_0$ будет изолированной особой точкой функции $F(z)$. Полюсом или нулем (после доопределения) функции $F(z)$ точка $z_0$ быть не может, поскольку в силу доказанного она была бы соответственно нулем или полюсом функции $f(z)$. Если же $z_0$ — устранимая особая точка функции $F(z)$ со значением $\lim\limits_{z \to z_0} F(z) \neq 0$, то, очевидно, таковой она была бы и для $f(z)$, что также противоречит условию.

Поведение аналитической функции в окрестности ее существенно особой точки характеризует следующее утверждение.

Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса. *Множество $E$ значений, принимаемых аналитической функцией $w=f(z)$ в любой окрестности ее существенно особой точки $z_0$, всюду плотно на расширенной комплексной плоскости $w$, т. е. каждая точка $a$ расширенной комплексной плоскости $w$ либо принадлежит множеству $E$, либо является его предельной точкой.*

**Доказательство.** Заметим сначала, что главная часть (3.6) лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности ее существенно особой точки $z_0$ сходится в области $|z-z_0|>0$, поэтому ряд (3.2) сходится на всей комплексной плоскости $\zeta$ и его сумма $f_1(\zeta)$ согласно теореме Лиувилля не может быть ограниченной, поскольку наличие бесконечного множества отличных от нуля коэффициентов $c_{-k_j}$, $j=1,2,\ldots$, исключает постоянство функции $f_1(\zeta)$. Это означает, что существует такая последовательность $\{\zeta_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\zeta_k=\infty$, что $\lim\limits_{k\to\infty}f_1(\zeta_k)=\infty$, и следовательно, для последовательности точек $z_k=z_0+\dfrac{1}{\zeta_k}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} z_k = z_0 \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} f_1\left(\frac{1}{z_k-z_0}\right)=\infty\,.$$

Поскольку

$$f(z)=f_1\left(\frac{1}{z-z_0}\right)+f_2(z-z_0),$$

а в силу (3.7), очевидно, имеем $\lim\limits_{k\to\infty}f_2(z_k-z_0)=c_0$, то $\lim\limits_{k\to\infty}f(z_k)=\infty$.

Другими словами, точка $w=\infty$ является предельной для множества $E$. Для произвольного же конечного числа $a$ либо в любой окрестности точки $z_0$ существует такая точка $z\neq z_0$, что $f(z)=a$, и тогда теорема верна, либо существует проколотая окрестность $C^*(\delta,z_0)$, в которой $f(z)\neq a$, и в этом случае по доказанному выше утверждению $z_0$ будет существенно особой точкой также для функции $\dfrac{1}{f(z)-a}$. Но тогда, как только что было показано, существует такая последовательность $\{z_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=z_0$, что $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{f(z_k)-a}=\infty$ или $\lim\limits_{k\to\infty}f(z_k)=a$, т.е. точка $a$ является предельной для последовательности $\{f(z_k)\}$ множества $E$.

Из установленных выше утверждений о поведении аналитической функции в окрестности изолированной особой точки следует, что *изолированная особая точка* $z_0 \in \mathbb{C}$ *аналитической функции* $f(z)$ *является:*

*а) устранимой, если* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=k\neq\infty$;

*б) полюсом порядка* $m$, *если* $\lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z)=k\neq 0,\infty$;

*в) существенно особой, если не существует (конечного или бесконечного) предела* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

**3. Бесконечно удаленная изолированная особая точка.** Пусть теперь изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$ является бесконечно удаленная точка, т. е. для некоторого $R>0$ функция $f(z)$ аналитична в области $R<|\,z\,|<\infty$. Очевидно, функция $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ будет аналитической в области $0<|\,\zeta\,|<\frac{1}{R}$, поэтому точка $\zeta=0$ — изолированная особая точка этой функции. Разложение функции $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ в окрестности точки $\zeta=0$ в ряд Лорана

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\sum_{k=1}^{\infty} d_{-k}\zeta^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty} d_k\zeta^{k}$$

после замены переменного $\zeta=\frac{1}{z}$ дает лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k}+\sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} z^{-k}, \quad c_k=d_{-k}\,. \tag{3.11}$$

В зависимости от того, является ли точка $\zeta=0$ устранимой особой, полюсом или существенно особой для функции $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, говорят, что $z=\infty$ является устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой для функции $f(z)$.

Таким образом, в зависимости от того, пусто, конечно или бесконечно множество отличных от нуля коэффициентов при положительных степенях $z$ в разложении (3.11), точка $z=\infty$ является устранимой особой, полюсом или существенно особой для функции $f(z)$.

Первый ряд в правой части (3.11) называется главной, а второй — правильной частью лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$.

Все, что было доказано о поведении аналитической функции вблизи конечной изолированной особой точки, очевидно, справедливо и в том случае, когда изолированной особой точкой является бесконечно удаленная точка. В частности, будем говорить, что функция $f(z)$, определенная в области $D\subset\overline{\mathbb{C}}$, содержащей точку $z=\infty$, аналитична в бесконечно удаленной точке, если лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности этой точки имеет вид

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{-k}}{z^{k}} \quad \text{и} \quad f(\infty)=c_0\,.$$

## 3.2. Понятия целой и мероморфной функций

**1. Целые функции.** Очевидно, полином степени $n$

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}c_k z^k, \quad c_n\neq 0, \tag{3.12}$$

является аналитической функцией на всей комплексной плоскости, а $z=\infty$ представляет собой изолированную особую точку этого полинома. Поскольку лорановским разложением полинома $P_n(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ будет стоящая в правой части (3.12) сумма, то для полинома $P_n(z)$ особая точка $z=\infty$ является устранимой в случае $n=0$ и полюсом порядка $n$ при $n>0$.

Аналитическая на комплексной плоскости функция называется целой. Единственной особой точкой целой функции на расширенной комплексной плоскости является бесконечно удаленная точка. Из сказанного выше следует, что полином является целой функцией, для которой $z=\infty$ — устранимая особая точка или полюс.

Обратно, *если для целой функции $f(z)$ точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой или полюсом порядка $n$, то $f(z)$ есть соответственно постоянная или полином степени $n$.*

Действительно, разложение целой функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$ (поскольку оно сходится на всей комплексной плоскости) является одновременно лорановским разложением $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$, поэтому справедливость приведенного утверждения следует непосредственно из определения устранимой особой точки или полюса порядка $n$ для случая особой точки $z=\infty$.

Целая функция, для которой $z=\infty$ — существенно особая точка, называется целой трансцендентной.

**2. Мероморфные функции.** Рациональная функция

$$\mathcal{R}(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

аналитична на комплексной плоскости всюду, кроме нулей ее знаменателя $Q_m(z)$. Из очевидных равенств

$$\lim_{z\to\infty}\mathcal{R}(z)=\alpha\neq\infty,\ n\leq m;\quad \lim_{z\to\infty}z^{m-n}\mathcal{R}(z)=\beta\neq 0,\infty,\ n>m,$$

следует, что $z=\infty$ для рациональной функции $\mathcal{R}(z)$ является устранимой особой точкой при $n\leq m$ и полюсом порядка $n-m$ при $n>m$.

Очевидно также, что нуль $z_k$ полинома $Q_m(z)$ порядка $\mu_k$ является для $\mathcal{R}(z)$ полюсом порядка $\mu_k$ при $P_n(z_k)\neq 0$, а если $z_k$ — нуль полинома $P_n(z)$ порядка $\lambda_k$, то точка $z_k$ является для $\mathcal{R}(z)$ полюсом порядка $\mu_k-\lambda_k$ при $\lambda_k<\mu_k$ и устранимой особой точкой при $\lambda_k\geq\mu_k$.

Функция, аналитическая в области $D$ всюду, кроме точек, являющихся ее полюсами, называется мероморфной в $D$.

Если рациональную функцию $\mathcal{R}(z)$ в устранимых особых точках доопределить соответствующими пределами, то все ее особые точки на расширенной комплексной плоскости будут полюсами, поэтому рациональная функция $\mathcal{R}(z)$ будет мероморфной на расширенной комплексной плоскости. Обратно, *мероморфная на расширенной комплексной плоскости функция* $f(z)$ *является рациональной.*

В самом деле, пусть $z_k\in\mathbb{C}$, $k=1, 2, \ldots, m$, — все конечные полюсы функции $f(z)$ порядка $\lambda_k$, а

$$f_{1,k}\Big(\frac{1}{z-z_k}\Big)=\sum_{n=1}^{\lambda_k}\frac{c_{-n,k}}{\left(z-z_k\right)^n}$$

— главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки $z_k$. Тогда функция

$$\Phi(z)=\begin{cases} f(z)-\displaystyle\sum_{k=1}^{m}f_{1,k}\Big(\frac{1}{z-z_k}\Big), & z\neq z_k,\\ \displaystyle\lim_{z\to z_k}\Big[f(z)-\sum_{k=1}^{m}f_{1,k}\Big(\frac{1}{z-z_k}\Big)\Big], & z=z_k,\end{cases}$$

является целой, и для нее точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой или полюсом. Следовательно, $\Phi(z)$ есть постоянная или полином, а $f(z)$ — рациональная функция.

Из приведенного рассуждения следует, что всякая рациональная функция после выделения целой части может быть разложена, и притом единственным образом, на простые дроби.

Верно и в некотором смысле обратное утверждение, которое мы приведем без доказательства, а именно

Теорема Миттаг-Леффлера. *Пусть* $\{z_k\}$ *— сходящаяся к бесконечности последовательность различных комплексных чисел* $z_k$ *и* $G_k(z)$ *— наперед заданные рациональные функции вида*

$$G_k(z)=\sum_{n=1}^{\lambda_k}\frac{c_{-n,\,k}}{\left(z-z_k\right)^n}\,.$$

*Тогда существует мероморфная на комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ *функция* $f(z)$, *имеющая полюсы в точках* $z_k$ *и только в этих точках, для которой главная часть* $f_{1,k}\left(\dfrac{1}{z-z_k}\right)$ *лорановского разложения* $f(z)$ *в окрестности точки* $z_k$ *равна* $G_k(z)$, $k=1,\,2,\,\ldots$.

## 3.3. Элементы теории вычетов

**1. Понятие вычета.** Пусть $z_0\in\mathbb{C}$ — изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$, а $\gamma$ — кусочно-гладкая замкнутая кривая Жордана, лежащая в области аналитичности $f(z)$ и такая, что внутренняя по отношению к $\gamma$ область $D_\gamma$ содержит единственную особую точку $z_0$ функции $f(z)$. В силу теоремы Коши значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f(t)\,dt$$

одно и то же для всех таких кривых $\gamma$ и оно называется **вычетом** функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки $z_0$ и обозначается символом $\underset{z=z_0}{Res}\,f(z)$.

Из формулы (2.47) при $k=-1$ и теоремы Коши следует, что в случае конечной изолированной особой точки $z_0$ имеем

$$\underset{z=z_0}{Res}\,f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f(t)\,dt=c_{-1}. \tag{3.13}$$

Итак, вычет аналитической функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки $z_0$ равен коэффициенту $c_{-1}$ при $(z-z_0)^{-1}$ в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z_0$.

Очевидно, что в случае, когда $z_0$ — устранимая особая точка, $\underset{z=z_0}{Res}\, f(z)=0$.

Если $z_0$ — простой полюс, то

$$\underset{z=z_0}{Res}\, f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

В частности, когда функция $f(z)$ представлена в виде

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$, отсюда получим

$$\underset{z=z_0}{Res}\, f(z)=c_{-1}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}\,.$$

Если же $z_0$ — полюс порядка $m>1$, то из (3.8) получим

$$\underset{z=z_0}{Res}\, f(z)=c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{\,m-1}}{dz^{m-1}}\,[\,(z-z_0)^m f(z)\,]. \tag{3.14}$$

Предположим теперь, что изолированная особая точка $z_0$ функции $f(z)$ является бесконечно удаленной. В качестве $\gamma$ возьмем окружность $|\,z\,|=R$ настолько большого радиуса, чтобы функция $f(z)$ была аналитична при $|\,z\,|\geq R$. Так как теперь интегрирование вдоль $\gamma$ происходит в отрицательном направлении (оставляющем окрестность $C(R,\infty)$ слева), то мы получим

$$\underset{z=\infty}{Res}\, f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\,t\,|=R} f(t)\,dt=-c_{-1}. \tag{3.15}$$

Отсюда, в частности, следует, что *вычет аналитической функции относительно бесконечно удаленной устранимой особой точки (как и бесконечно удаленной точки аналитичности) может быть отличным от нуля.*

## 2. Вычисление некоторых интегралов

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ВЫЧЕТАХ. *Если функция* $f(z)$ *аналитична в области* $D$ *с кусочно-гладкой границей* $\Gamma$ *и непрерывна в* $\overline{D}$ *всюду, кроме конечного числа особых точек* $z_k \in D$, $k=1, 2, \ldots, n$, *то*

$$\int\limits_{\Gamma} f(t)\,dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res}\, f(z). \tag{3.16}$$

**Доказательство.** Пусть $\delta > 0$ и такое, что $\overline{C(\delta, z_k)} \subset D$, $\overline{C(\delta, z_k)} \cap \cap \overline{C(\delta, z_j)} = \emptyset$, $k, j=1, 2, \ldots, n$, $k \neq j$, $\gamma_k = \partial C(\delta, z_k)$, а $\overline{D}_\delta = \overline{D} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} C(\delta, z_k)$. Применяя обобщенную теорему Коши к функции $f(z)$ в $\overline{D}_\delta$ и учитывая (3.12), получим

$$\int\limits_{\Gamma} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f(t)\,dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res}\, f(z).$$

Из формул (3.15) и (3.16) вытекает следующее утверждение: *если функция* $f(z)$ *аналитична на комплексной плоскости всюду, кроме конечного числа особых точек* $z_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, *то*

$$\sum_{k=0}^{n} \underset{z=z_k}{Res}\, f(z) = 0, \tag{3.17}$$

*где* $z_0 = \infty$.

Действительно, при достаточно большом $R > 0$ точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ лежат в круге $|z| < R$, поэтому из (3.16) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res}\, f(z).$$

Но интеграл в левой части этого равенства в силу (3.15) равен $-\underset{z=\infty}{Res}\, f(z)$, откуда и следует (3.17).

Приведем теперь несколько примеров вычисления интегралов с помощью вычетов.

1. $\mathcal{I}_1 = \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi\,,$

где $\mathcal{R}$ — рациональная функция переменных $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, непрерывная при $\varphi \in [\,0, 2\pi\,]$. Замена переменного $z = e^{i\varphi}$ дает

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big), \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}\,,$$

в силу чего получим

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{i} \int\limits_{|\,z\,|\,=\,1} \mathcal{R}\Big[\,\frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big),\ \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big)\,\Big]\frac{dz}{z} =$$

$$= 2\pi \sum_k \underset{\substack{z\,=\,z_k \\ |\,z_k\,|\,<\,1}}{Res}\ \mathcal{R}\Big[\,\frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big),\ \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big)\,\Big]\frac{1}{z}\,.$$

2.$\mathcal{I}_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,$

где $f(z)$ — аналитическая при $\Im m z > 0$ и непрерывная при $\Im m z \geq 0$ функция с конечным числом особых точек $z_k$, $\Im m z_k > 0$, $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$. При достаточно большом $R$ все особые точки $z_k$ будут лежать в полукруге $|\,z\,| < R$, $\Im m z > 0$, а на дуге $\Gamma_R : |\,z\,| = R$, $\Im m z \geq 0$ функция $f(z)$ будет непрерывна. Для контура $C_R = [\,-R,\, R\,] \cup \Gamma_R$ имеем

$$\int\limits_{C_R} f(z)\, dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k\,=\,1}^{n} \underset{z = z_k}{Res}\, f(z). \tag{3.18}$$

Полагая $M(R) = \max\limits_{z \in \Gamma_R} |\, f(z)\,|$, получим неравенство

$$\Big|\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, dz\Big| \leq \pi R M(R).$$

Поэтому в предположении, что $RM(R) \to 0$ при $R \to \infty$, переход к пределу при $R \to \infty$ в равенстве (3.18) дает

$$\mathcal{I}_2 = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z = z_k}{Res}\, f(z).$$

3. $\mathcal{I}_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx,$

где $\lambda > 0$, а $f(z)$ — аналитическая при $\Im m z > 0$ и непрерывная при $\Im m z \geq 0$ функция, за исключением конечного числа особых точек $z_k$, $\Im m z_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $\Im m z \geq 0$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма Жордана. *Если непрерывная на последовательности дуг* $\Gamma_{R_n}$ : $|\,z\,| = R_n$, $\Im m z > -a$, $R_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *функция* $f(z) \to 0$ *равномерно относительно* $\arg z$ *при* $z \in \Gamma_{R_n}$, $n \to \infty$, *то для любого* $\lambda > 0$ *имеем*

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{\Gamma_{R_n}} f(z)\, e^{i\lambda z} dz = 0.$$

**Доказательство.** Пусть $a > 0$, $\alpha(R_n) = \arcsin \dfrac{a}{R_n}$ и $M(R_n) = \max\limits_{z \in \Gamma_{R_n}} |\, f(z)\,|$. По условию леммы при $n \to \infty$ имеют место соотношения: $M(R_n) \to 0$, $\alpha(R_n) \to 0$, $R_n\alpha(R_n) \to a$. Для $z \in \Gamma_{R_n}$ имеем $z = R_n e^{i\varphi}$, $-\alpha(R_n) < \varphi < \pi + \alpha(R_n)$. Для каждой из частей дуги $\Gamma_{R_n}$, на которой $y \leq 0$, получим

$$\Big|\int f(z)\, e^{i\lambda z} dz\Big| \leq R_n M(R_n) \int\limits_0^{\alpha(R_n)} e^{-\lambda y} d\varphi \leq$$

$$\leq M(R_n) R_n \alpha(R_n) e^{\lambda a} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Для оставшейся части дуги $\Gamma_{R_n}$, т.е. когда $0 \leq \varphi \leq \pi$, в силу неравенства

$$\sin\varphi \geq \frac{2\varphi}{\pi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

будем иметь

$$\Big|\int f(z)\, e^{i\lambda z} dz\Big| \leq R_n M(R_n) \int\limits_0^{\pi} e^{-\lambda R_n \sin\varphi} d\varphi \leq$$

$$\leq 2R_n M(R_n) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}\lambda R_n \varphi} d\varphi = M(R_n)\frac{\pi}{\lambda}\Big(1 - e^{-\lambda R_n}\Big) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

В случае $a \leq 0$ достаточно второй оценки.

Возвращаясь к вычислению интеграла $\mathcal{I}_3$, заметим, что $f(z) \to 0$ равномерно относительно $\arg z$, когда $z \to \infty$, $\Im m z \geq 0$. Взяв контур

$C_R$, как в предыдущем примере, и устремив $R$ к $\infty$, в силу леммы Жордана получим

$$\mathcal{I}_3 = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res}\, f(z)\, e^{i\lambda z}.$$

4. $\mathcal{I}_4 = \int\limits_0^\infty \frac{\mathcal{R}(x)}{x^\alpha}\, dx,$

где $0<\alpha<1$, а $\mathcal{R}(z)$ — рациональная функция, непрерывная при $z\geq 0$ и обращающаяся в нуль при $z=\infty$. Для вычисления $\mathcal{I}_4$ рассмотрим область $D_R^\rho$, представляющую собой кольцо $0<\rho<|\,z\,|<R<\infty$ с разрезом вдоль интервала $(\rho, R)$.

При любых $\rho$ и $R$ в области $D_R^\rho$ можно выделить ветвь многозначной функции $z^\alpha$, поскольку в этой области нельзя указать замкнутой кривой, вдоль которой можно совершить обход вокруг ее точек ветвления $0$ и $\infty$. Впредь под $z^\alpha$ будем понимать ветвь этой многозначной функции, определенную условием $0<\arg z<2\pi$, или, по-другому, ветвь $z^\alpha$, совпадающую с $x^\alpha$ на верхнем берегу разреза $[\,\rho, R\,]$, и положим $f(z) = \dfrac{\mathcal{R}(z)}{z^\alpha}$. Обозначим через $C_R^\rho$ границу области $D_R^\rho$, состоящую из окружности $\Gamma_R : |\,z\,| = R$, окружности $\Gamma_\rho : |\,z\,| = \rho$, пробегаемой в отрицательном направлении, и отрезков $I_1$, $I_2$, представляющих собой отрезок $[\,\rho, R\,]$, пробегаемый соответственно в сторону возрастания и убывания $x$ (или, как мы еще будем говорить, верхнего и нижнего берега разреза $[\,\rho, R\,]$). При достаточно малом $\rho$ и большом $R$ все особые точки $z_k$ функции $f(z)$ будут лежать в области $D_R^\rho$.

Чтобы вычислить интеграл по границе $C_R^\rho$, (которая, впрочем, не является кривой Жордана), найдем значение функции $f(z)$ на нижнем берегу разреза $I_2$. Так как $\arg z = 2\pi$ при $z\in I_2$, т. е. $z = xe^{2\pi i}$, то

$$z^\alpha\big|_{z\in I_2} = e^{\alpha \log z}\big|_{z\in I_2} = e^{\alpha(\log|z| + i \arg z)}\big|_{z\in I_2} =$$

$$= e^{\alpha(\log x + 2\pi i)} = x^\alpha e^{2\pi\alpha i}.$$

Ввиду того, что $\mathcal{R}(z)$ — однозначная функция, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{C_R^\rho} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_R\cup\Gamma_\rho^-} f(z)\,dz + \int\limits_\rho^R \frac{\mathcal{R}(x)}{x^\alpha}\,dx + \int\limits_R^\rho \frac{\mathcal{R}(x)\,dx}{x^\alpha e^{2\pi\alpha i}} = \\
&= \int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz - \int\limits_{\Gamma_\rho} f(z)\,dz + \left(1 - e^{-2\pi\alpha i}\right) \int\limits_\rho^R \frac{\mathcal{R}(x)}{x^\alpha}\,dx = \\
&= 2\pi i \sum_k \mathop{Res}\limits_{z=z_k} f(z) = 2\pi i \sum_k \mathop{Res}\limits_{z=z_k} \frac{\mathcal{R}(z)}{z^\alpha}\,.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Так как $\mathcal{R}(\infty)=0$, то при больших $|\,z\,|$ имеем $|\,\mathcal{R}(z)\,| \sim C|\,z\,|^{-n}$, где $n \geq 1$, а $C$ — некоторая положительная постоянная. Поэтому $RM(R) \sim \sim CR^{1-n-\alpha} \to 0$ при $R \to \infty$ и, следовательно,

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0. \tag{3.20}$$

Далее, очевидно, что $\rho M(\rho) \sim |\,\mathcal{R}(0)\,|\rho^{1-\alpha} \to 0$ при $\rho \to 0$, поэтому также

$$\lim_{\rho\to 0} \int\limits_{\Gamma_\rho} f(z)\,dz = 0. \tag{3.21}$$

Таким образом, из (3.18) в пределе при $\rho \to 0$, $R \to \infty$ в силу (3.19), (3.20) получим

$$\mathcal{I}_4 = \frac{2\pi i}{1 - e^{-i2\pi\alpha}} \sum_k \mathop{Res}\limits_{z=z_k} \frac{\mathcal{R}(z)}{z^\alpha} = \frac{\pi e^{i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} \sum_k \mathop{Res}\limits_{z=z_k} \frac{\mathcal{R}(z)}{z^\alpha}\,.$$

5. $\mathcal{I}_5 = \int\limits_0^\infty \mathcal{R}(x) \log x\,dx$,

где $\mathcal{R}(x)$ — действительная рациональная функция, непрерывная при $x \geq 0$ и имеющая на бесконечности нуль не ниже второго порядка.

Выбрав в области $D_R^\rho$, указанной в предыдущем примере, ветвь функции $\log z$ условием $0 < \arg z < 2\pi$ и положив $f(z) = \mathcal{R}(z)\log^2 z$, на нижнем берегу разреза $I_2$ будем иметь

$$f(z)\big|_{z\in I_2} = \mathcal{R}(x)(\log x + 2\pi i)^2 = \mathcal{R}(x)(\log^2 x - 4\pi^2) + 4\pi i\mathcal{R}(x)\log x,$$

поэтому

$$\begin{aligned}\int\limits_{C_R^\rho} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_R\cup\Gamma_\rho^-} f(z)\,dz + 4\pi^2\int\limits_\rho^R \mathcal{R}(x)\,dx - 4\pi i\int\limits_\rho^R \mathcal{R}(x)\,\log x\,dx = \\ = 2\pi i\sum_k \mathop{Res}_{z=z_k} \mathcal{R}(z)\log^2 z\,.\end{aligned}\qquad(3.22)$$

По условию при больших $R$ имеем $|\,\mathcal{R}(Re^{i\varphi})\,| \sim CR^{-n}$, $n\geq 2$, поэтому $R\,|\,\mathcal{R}(z)\log^2 z\,|_{z\in\Gamma_R} \sim CR^{1-n}(\log^2 R + 4\pi^2)\to 0$ при $R\to\infty$, вследствие чего и здесь имеет место соотношение (3.20). Также легко видеть, что в этом случае справедливо и равенство (3.21), так что, переходя в (3.22) к пределу при $\rho\to 0$, $R\to\infty$ и отделяя мнимые части, получим

$$\mathcal{I}_5 = -\frac{1}{2}\Re e\sum_k \mathop{Res}_{z=z_k} \mathcal{R}(z)\log^2 z\,.$$

Ниже для простоты будем предполагать (если не оговорено противное), что $D$ — конечная односвязная область с кусочно-гладкой жордановой границей $\Gamma$. Легко видеть, что изложенные ниже результаты остаются в силе, если $D$ является $n$-связной конечной областью, граница $\Gamma$ которой состоит из $n$ попарно не пересекающихся замкнутых кусочно-гладких кривых Жордана.

## 3.4. Принцип аргумента аналитической функции

Предположим, что функция $\varphi(z)$ аналитична в $D$ и непрерывна в $\overline{D}$, а $f(z)$ аналитична в $\overline{D}$ всюду, кроме конечного числа полюсов $\beta_k\in D$ порядка $\mu_k$, $k=1,2,\,\ldots,\,n$, и $f(z)\neq 0$ в $\overline{D}$ всюду, кроме конечного числа нулей $\alpha_k\in D$ порядка $\lambda_k$, $k=1,\,2,\,\ldots,\,m$. Функция $\psi(z)=\dfrac{\varphi(z)f'(z)}{f(z)}$ будет аналитической в $D$ и непрерывной в $\overline{D}$ всюду, кроме, быть может, точек $\alpha_k$ и $\beta_k$, которые могут быть ее полюсами.

Ввиду того, что в некоторой окрестности точки $\alpha_k$ функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = (z-\alpha_k)^{\lambda_k} f_k(z)$, где $f_k(z)$ — аналитическая и отличная от нуля функция, то в этой окрестности имеем равенство

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\lambda_k}{z-\alpha_k} + \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}\,.$$

Отсюда следует, что коэффициент при $(z-\alpha_k)^{-1}$ в лорановском разложении функции $\psi(z)$ в окрестности точки $\alpha_k$ равен $\lambda_k\varphi(\alpha_k)$. Аналогичным образом убеждаемся, что коэффициент при $(z-\beta_k)^{-1}$ в лорановском разложении $\psi(z)$ в окрестности точки $\beta_k$ равен $-\mu_k\varphi(\beta_k)$. Следовательно, на основании (3.14) и (3.15) получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\varphi(\alpha_k) - \sum_{k=1}^{n} \mu_k\varphi(\beta_k).$$

При $\varphi(z)\equiv 1$ отсюда получается формула логарифмического вычета

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k = N - P, \tag{3.23}$$

где $N$ и $P$ — соответственно число нулей и полюсов функции $f(z)$ в области $D$, причем каждый нуль и полюс берется столько раз, каков его порядок.

Принцип аргумента. *Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}$ с кусочно-гладкой границей $\Gamma$ всюду, кроме конечного числа полюсов, лежащих в области $D$, и $f(z)\neq 0$ на $\Gamma$, то приращение аргумента функции $f(z)$ при однократном обходе точкой $z$ кривой $\Gamma$ в положительном направлении равно $2\pi(N-P)$, где $N$ и $P$ — соответственно число нулей и полюсов функции $f(z)$ в области $D$ с учетом их порядков.*

**Доказательство.** Так как функция $f(z)$ аналитична и отлична от нуля на $\Gamma$, то число ее нулей в области $D$ конечно и существует двусвязная область $\Delta$, ограниченная кривыми $\Gamma_0$ и $\Gamma_1$ и содержащая кривую $\Gamma$, и в ней аналитическая и отличная от нуля функция $g(z)$, совпадающая с $f(z)$ в $\Delta\cap\overline{D}$. Тогда функция $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ тоже аналитична в области $\Delta$, и пусть $\zeta$ — произвольная точка кривой $\Gamma$, а $G$ — односвязная область, полученная из $\Delta$ проведением разреза вдоль гладкой кривой $\sigma$, соединяющей $\Gamma_0$ с $\Gamma_1$, причем можно считать, что $\sigma$ пересекает $\Gamma$ только в одной точке $\zeta$. Тогда по теореме Коши интеграл

$$\int\limits_{z_0}^{z} \frac{g'(t)}{g(t)}\, dt$$

не зависит от лежащего в $G$ пути интегрирования $\gamma$ с началом в точке $z_0$ и концом в точке $z$. Поэтому, если $z_0$ — фиксированная точка области $G$, а $\log g(z_0)$ — какое-нибудь фиксированное значение $\operatorname{Log} g(z_0)$, например, главное его значение, то

$$\log g(z) = \log g(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{g'(t)}{g(t)}\, dt$$

является однозначной аналитической в области $G$ функцией.

Пусть теперь $z_0 \in \Gamma$, $z_0 \neq \zeta$, а $\gamma_1$, $\gamma_2$ — части кривой $\Gamma$ с началом $z_0$ и концом $\zeta$, причем направление от $z_0$ к $\zeta$ на дуге $\gamma_2$ совпадает с положительным направлением кривой $\Gamma$. Положив

$$(\log f(\zeta))_k = \lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in\gamma_k}} \log f(z), \quad k=1,\, 2,$$

получим

$$\int\limits_{\gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = (\log f(\zeta))_k - \log f(z_0),$$

в силу чего

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int\limits_{\gamma_2} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz - \int\limits_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = (\log f(\zeta))_2 - (\log f(\zeta))_1 =$$

$$= [\,\log f(z)\,]_{\Gamma} = i\,[\,\arg f(z)\,]_{\Gamma},$$

где символ $[\,]_{\Gamma}$ обозначает приращение стоящего в квадратных скобках выражения при однократном обходе точкой $z$ кривой $\Gamma$ в положительном направлении.

В силу (3.23) отсюда получим равенство

$$[\arg f(z)]_\Gamma = 2\pi\,(N-P), \tag{3.24}$$

которое и выражает принцип аргумента.

Теорема Руше. *Если функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в замкнутой области $\overline{D}$ с кусочно-гладкой границей $\Gamma$ и для всех $z\in\Gamma$ имеет место неравенство*

$$|\,\varphi(z)-\psi(z)\,| < |\,\psi(z)\,|, \tag{3.25}$$

*то обе эти функции имеют в $D$ одинаковое число нулей.*

**Доказательство**. Из (3.25) следует, что $\varphi(z)\neq 0$ и $\psi(z)\neq 0$ на кривой $\Gamma$, а значения функции $F(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ удовлетворяют на $\Gamma$ условию $|\,F(z)-1\,|<1$. Это означает, что при полном обходе точкой $z$ кривой $\Gamma$ в положительном направлении приращение аргумента функции $F(z)$ равно нулю. Отсюда, поскольку $\arg F(z)=\arg\varphi(z)-\arg\psi(z)$, получаем $[\arg\varphi(z)]_\Gamma = [\arg\psi(z)]_\Gamma$, но так как функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ не имеют в области $D$ полюсов, то согласно (3.24) они имеют в $D$ одинаковое число нулей.

Заметим, что теорема Руше останется верной, если (3.25) заменить условием

$$|\,\varphi(z)-\psi(z)\,| < |\,\varphi(z)\,| + |\,\psi(z)\,|,$$

поскольку тогда значения функции $F(z)$ на $\Gamma$ будут лежать в $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ и, следовательно, $[\arg F(z)]_\Gamma = 0$.

Из теоремы Руше вытекает следующее свойство однолистных аналитических функций: *в области однолистности аналитической функции $f(z)$ ее производная $f'(z)$ нигде не обращается в нуль.*

В самом деле, допустим, что в некоторой точке $z_0$ области однолистности $D$ аналитической функции $f(z)$ производная $f'(z_0)=0$. Тогда разложение $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0$ имеет вид

$$f(z) = c_0 + \sum_{k=n}^{\infty} c_k(z-z_0)^k,\ c_n\neq 0,\ n\geq 2,$$

поскольку $c_1=f'(z_0)=0$. Выберем настолько малое число $\delta$, $0<\delta<$ $<\rho(z_0,\partial D)$, чтобы

$$f'(z)\neq 0, \quad 0<|\,z-z_0\,|\leq\delta, \tag{3.26}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k-n} \neq 0, \quad |\, z-z_0 \,| \leq \delta. \tag{3.27}$$

Из (3.27) следует, что

$$\min_{|\, z-z_0 \,|=\delta} \left| \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \right| = m > 0.$$

Обозначим через $\alpha$ произвольное комплексное число, удовлетворяющее условию $0 < |\, \alpha \,| < m$. Функции

$$\varphi(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-z_0)^k + \alpha = f(z) - c_0 + \alpha$$

и

$$\psi(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

удовлетворяют в замкнутом круге $\overline{C(\delta, z_0)}$ условиям теоремы Руше. Как следует из (3.27), число нулей функции $\psi(z)$, а следовательно, и функции $\varphi(z)$ в круге $C(\delta, z_0)$ равно $n$, причем поскольку $\varphi(z_0) = \alpha \neq 0$ и $\varphi'(z) = f'(z)$, то в силу (3.26) каждый из нулей функции $\varphi(z)$ является простым. Таким образом, функция $f(z)$ принимает значение $c_0 - \alpha$ в $n$ точках круга $C(\delta, z_0)$, $n \geq 2$, что противоречит ее однолистности.

## 3.5. Интегральная формула Коши для внешней области

*Пусть* $D^+$ *и* $D^-$ *— соответственно внутренняя и внешняя области, на которые замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана* $\Gamma$ *делит расширенную комплексную плоскость, а функция* $f(z)$ *аналитична в* $D^-$ *и непрерывна в* $\overline{D^-}$. *Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)\, dt}{t-z} = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+, \\ f(\infty) - f(z), & z \in D^-. \end{cases} \tag{3.28}$$

**Доказательство.** Пусть $z$ — произвольная точка комплексной плоскости, лежащая вне $\Gamma$, а $\Gamma_R$ — окружность $|\, t \,| = R$ настолько большого радиуса, что точка $z$ и кривая $\Gamma$ лежат в круге $C(R, 0)$. В силу интегральной формулы Коши для двусвязной области $D_R^- = D^- \cap C(R,0)$, ограниченной кривыми $\Gamma_R$ и $\Gamma$, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \begin{cases} 0, & z \in D^+, \\ f(z), & z \in D_R^-. \end{cases} \qquad (3.29)$$

Поскольку разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots,$$

то для функции $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, аналитической при $|\,\zeta\,| \geqslant R$, в окрестности точки $\zeta = \infty$ получим разложение

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{\zeta}} = \Big(\frac{c_0}{\zeta} + \frac{c_{-1}}{\zeta^2} + \ldots\Big)\Big(1 + \frac{z}{\zeta} + \ldots\Big) =$$

$$= \frac{c_0}{\zeta} + \frac{c_0 z + c_{-1}}{\zeta^2} + \frac{c_0 z^2 + c_{-1} z + c_{-2}}{\zeta^3} + \ldots.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = -\mathop{Res}_{\zeta=\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = c_0 = f(\infty),$$

поэтому формулу (3.30) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+, \\ f(\infty) - f(z), & z \in D_R^-. \end{cases}$$

Поскольку это равенство, доказанное для любой точки $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, справедливо и при $z = \infty$ (см. п. 2.3, с. 65), то тем самым доказана интегральная формула Коши для внешней области (3.28).

С помощью интегральных формул Коши для внутренней и внешней областей можно доказать,что *для того чтобы заданная на замкнутой гладкой кривой* $\Gamma$ *функция* $f(t)\in H$ *была граничным значением аналитической в области* $D^{+}(D^{-})$ *функции* $F(z)(\Phi(z))$, *т. е.* $F^{+}(t)=f(t)$ $(\Phi^{-}(t)=f(t))$ *всюду на* $\Gamma$, *необходимо и достаточно, чтобы в первом случае выполнялось условие*

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}=0,\quad z\in D^{-}, \tag{3.30}$$

*а во втором случае — условие*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}=\Phi(\infty),\quad z\in D^{+}. \tag{3.31}$$

При этом необходимость этих условий непосредственно вытекает из интегральных формул Коши.

Известно также, что условия (3.30) и (3.31) соответственно эквивалентны следующим:

$$f(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}=0,\quad t_0\in\Gamma,$$

и

$$f(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}=2\Phi(\infty),\quad t_0\in\Gamma,$$

или же:

$$\int\limits_{\Gamma}t^{k}f(t)\,dt=0,\quad k=0,\,1,\ldots,$$

и, для произвольной фиксированной точки $z_0\in D^{+}$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z_0}=\Phi(\infty),\quad \int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{k+1}}=0,\quad k=1,\,2,\ldots$$

# Глава 4

# ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

## 4.1. Аналитическое продолжение

**1. Понятие аналитического продолжения.** На плоскости комплексного переменного $z$ рассмотрим две области $D_1$ и $D_2$, пересечение которых $\Delta = D_1 \cap D_2$ представляет собой область. Пусть $f_1(z)$ — аналитическая в $D_1$ функция. Если существует аналитическая в области $D_2$ функция $f_2(z)$, совпадающая с $f_1(z)$ в $\Delta$, то говорят, что $f_2(z)$ является аналитическим продолжением $f_1(z)$ из области $D_1$ в область $D_2$ через их общую часть $\Delta$.

В силу внутренней теоремы единственности такое аналитическое продолжение, если оно существует, единственно.

Аналитическая функция $f(z)$ вместе с областью $D$ ее задания называется элементом, и для него принято обозначение $(f, D)$. Из двух элементов $(f_1, D_1)$ и $(f_2, D_2)$ один из них называется непосредственным аналитическим продолжением другого, если $\Delta = D_1 \cap D_2$ является областью и $f_1(z) = f_2(z)$ для всех $z \in \Delta$. Очевидно, что функция

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1, \\ f_2(z), & z \in D_2 \setminus \Delta, \end{cases}$$

аналитична в области $D_1 \cup D_2$.

Конечное множество элементов $(f_1, D_1), (f_2, D_2), \ldots, (f_n, D_n)$, каждый элемент $(f_k, D_k)$ которого является непосредственным аналитическим продолжением элемента $(f_{k-1}, D_{k-1})$, $k = 2, 3, \ldots, n$, называется цепью.

Непустое множество $F$ элементов $(f, D)$, для любых двух элементов которого один можно получить из другого при помощи цепи, все элементы которой принадлежат $F$, называется общей аналитической функцией.

Может случиться, что при аналитическом продолжении, соответствующем цепи $(f_1, D_1), (f_2, D_2), \ldots, (f_n, D_n)$, на непустом пересечении $\Delta = D_1 \cap D_n$ аналитические функции $f_1(z)$ и $f_n(z)$ не совпадают и, следовательно, определенная этой цепью общая аналитическая функция не однозначна.

Общая аналитическая функция, содержащая все аналитические продолжения каждого ее элемента, называется полной аналитической функцией в смысле Вейерштрасса.

Если аналитическая в области $D$ функция $f(z)$ не может быть аналитически продолжена в более широкую область $D_1 \supset D$, то говорят, что $D$ является естественной областью аналитичности функции $f(z)$.

При детальном изучении общих и полных аналитических функций естественно возникает необходимость обобщения введенного выше понятия римановой поверхности, но мы не будем на этом останавливаться.

Непосредственное аналитическое продолжение, если оно возможно, иногда удобнее всего осуществить с помощью степенных рядов. При этом в качестве элемента $(f, D)$ следует брать сумму $f(z)$ степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ с его кругом сходимости $D = C(R, z_0)$.

**2. Теорема монодромии.** Пусть Γ — лежащая на комплексной плоскости $z$ кривая Жордана с началом в точке $z_0$ и концом в точке $z_*$.

Говорят, что функция $f_0(z)$ аналитически продолжается из точки $z_0$ в точку $z_*$ вдоль кривой Γ, если можно указать точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ на Γ, следующие друг за другом в направлении от $z_0$ к $z_*$, и цепь $(f_0, D_0), (f_1, D_1), (f_2, D_2), \ldots, (f_n, D_n)$, такие, что каждая область $D_k$ содержит дугу $\overset{\frown}{z_k z_{k+1}}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $z_{n+1} = z_*$, кривой Γ.

Заметим, что аналитическое продолжение функции вдоль данной кривой Γ не зависит от выбора точек $z_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и цепи.

В теории аналитических функций важную роль играет следующее утверждение.

Теорема монодромии. *Если аналитическая в области $D_0$ функция $f_0(z)$ аналитически продолжается вдоль любой жордановой кривой, лежащей в односвязной области $D \supset D_0$, то полученная в результате таких аналитических продолжений функция однозначна в $D$.*

**Доказательство**. Пусть $z_0$ и $z_*$ — произвольные точки областей $D_0$ и $D$ соответственно, $\Gamma_0$ и $\Gamma_1$ — произвольные жордановы кривые, лежащие в области $D$ и соединяющие точки $z_0$ и $z_*$, а $(f_0, D_0)$, $(f_1^0, D_1^0)$, $\ldots$, $(f_{n_0}^0, D_{n_0}^0)$ и $(f_0, D_0)$, $(f_1^1, D_1^1)$, $\ldots$, $(f_{n_1}^1, D_{n_1}^1)$ — цепи, соответствующие аналитическому продолжению функции $f_0(z)$ из точки $z_0$ в точку $z_*$ вдоль кривых $\Gamma_0$ и $\Gamma_1$ соответственно.

Из односвязности области $D$ следует, что кривую $\Gamma_0$ с помощью непрерывной деформации без выхода из области $D$ можно перевести в кривую $\Gamma_1$. Обозначим через $\{\Gamma_\lambda\}$ семейство лежащих в области $D$ жордановых кривых $\Gamma_\lambda$ с закрепленными началом в точке $z_0$ и концом в точке $z_*$ и параметрическими уравнениями $z = z(\lambda, t)$, $0 \le t \le 1$, $0 \le \lambda \le 1$, $z(\lambda, 0) = z_0$, $z(\lambda, 1) = z_*$. Эти кривые при непрерывном возрастании параметра $\lambda$ от нуля до единицы осуществляют указанный переход кривой $\Gamma_0$ в $\Gamma_1$.

Пусть $(f_0, D_0)$, $(f_1^\lambda, D_1^\lambda)$, $\ldots$, $(f_{n_\lambda}^\lambda, D_{n_\lambda}^\lambda)$ — цепь, соответствующая аналитическому продолжению функции $f_0(z)$ из точки $z_0$ в точку $z_*$ вдоль кривой $\Gamma_\lambda$. Из определения цепи и понятия аналитического продолжения вдоль кривой следует, что для каждого $\mu \in [0, 1]$ найдется такое число $\delta_\mu > 0$, что для всех $\lambda \in r_\mu \cap [0, 1]$, где $r_\mu$ обозначает интервал $|\lambda - \mu| < \delta_\mu$, имеет место равенство

$$f_{n_\lambda}^\lambda(z_*) = f_{n_\mu}^\mu(z_*). \tag{4.1}$$

Действительно, пусть

$$(f_0, D_0),\ (f_1^\mu, D_1^\mu),\ \ldots,\ (f_{n_\mu}^\mu, D_{n_\mu}^\mu) \tag{4.2}$$

и $z_k^\mu = z(\mu, t_k^\mu)$, $k = 1, 2, \ldots, n_\mu$, $0 < t_1^\mu < \ldots < t_k^\mu < t_{k+1}^\mu < \ldots < t_{n_\mu}^\mu < 1$, — цепь и точки, соответствующие аналитическому продолжению функции $f_0(z)$ из точки $z_0$ в точку $z_*$ вдоль кривой $\Gamma_\mu$, $\mu \in [0, 1]$, а $D^\mu = \bigcup_{k=0}^{n_\mu} D_k^\mu$, $D_0^\mu = D_0$.Тогда $\rho_\mu = \min_{0 \le k \le n_\mu} \rho(\overset{\frown}{z_k^\mu z_{k+1}^\mu}, \partial D_k^\mu) > 0$ (здесь $z_0^\mu = z_0$, $z_{n_\mu+1}^\mu = z_*$), а функция $\sigma(\lambda, \mu) = \max_{0 \le t \le 1} |z(\lambda, t) - z(\mu, t)|$ непрерывна по обоим переменным и $\sigma(\mu, \mu) = 0$, поэтому для каждого $\mu \in [0, 1]$ найдется такое число $\delta_\mu > 0$, что $\sigma(\lambda, \mu) < \rho_\mu$ для всех $\lambda \in r_\mu \cap [0, 1]$. Но это означает, что кривая $\Gamma_\lambda \subset D^\mu$, так как ее дуги $\overset{\frown}{\zeta_k^\lambda \zeta_{k+1}^\lambda} \subset D_k^\mu$, где $\zeta_k^\lambda = z(\lambda, t_k^\mu)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n_\mu$, $\zeta_0^\lambda = z_0$, $\zeta_{n_\mu+1}^\lambda = z_*$, поэтому точки $\zeta_k^\lambda$ и та же цепь (4.2) могут служить также для аналитического продолжения функции $f_0(z)$ вдоль кривой $\Gamma_\lambda$, т. е. можно взять $n_\lambda = n_\mu$ и

$$(f_k^\lambda, D_k^\lambda) = (f_k^\mu, D_k^\mu), \quad k=1,\, 2, \ldots,\, n_\lambda,$$

откуда и следует (4.1).

Далее, по лемме Гейне – Бореля из бесконечного открытого покрытия $\{r_\mu\}$ отрезка $[0,1]$ можно выделить конечное его покрытие $\{r_{\mu_1}, r_{\mu_2}, \ldots, r_{\mu_m}\}$, $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_m < 1$. Взяв в каждом интервале $r_{\mu_k} \cap \cap\, r_{\mu_{k+1}}$ по фиксированной точке $\lambda_k$, в силу (4.1) получим

$$f_{n_{\mu_k}}^{\mu_k}(z_*) = f_{n_{\lambda_k}}^{\lambda_k}(z_*) = f_{n_{\mu_{k+1}}}^{\mu_{k+1}}(z_*),\ k=1,\, 2,\, \ldots,\, m-1.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $0 \in r_{\mu_1}$, $1 \in r_{\mu_m}$, заключаем, что

$$f_{n_0}^{0}(z_*) = f_{n_{\mu_1}}^{\mu_1}(z_*) = \ldots = f_{n_{\mu_k}}^{\mu_k}(z_*) = \ldots = f_{n_{\mu_m}}^{\mu_m}(z_*) = f_{n_1}^{1}(z_*).$$

В силу произвольности точек $z_0$, $z_*$ и кривых $\Gamma_0$, $\Gamma_1$ это и доказывает теорему монодромии.

**3.** Принцип непрерывности. *Пусть общий участок границ областей* $D_1$ *и* $D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, *является открытой гладкой дугой Жордана* $\gamma$. *Если функции* $f_k(z)$ *аналитичны в областях* $D_k$, $k = 1,\, 2$, *непрерывны вплоть до* $\gamma$ *и* $f_1(z)=f_2(z)$, $z\in\gamma$, *то функция*

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z\in D_1, \\ f_2(z), & z\in D_2, \\ f_1(z)=f_2(z), & z\in\gamma, \end{cases} \tag{4.3}$$

*аналитична в области* $D=D_1\cup\gamma\cup D_2$.

**Доказательство**. Очевидно, что аналитичность функции $f(z)$ надо доказать только в точках $z\in\gamma$. Пусть $z_0$ — произвольная точка кривой $\gamma$, а $\delta$ — такое положительное число, меньшее стандартного радиуса $\delta_0$ кривой $\gamma$, что $\overline{C(\delta, z_0)} \subset D$. Обозначив через $\gamma_k$ границы областей $\Delta_k = D_k \cup C(\delta, z_0)$, $k = 1,\, 2$, в силу интегральной формулы

Коши получим
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f(t)\,dt}{t-z}=\begin{cases} f_1(z), & z\in\Delta_1,\\ 0, & z\in\Delta_2,\end{cases} \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f(t)\,dt}{t-z}=\begin{cases} 0, & z\in\Delta_1,\\ f_2(z), & z\in\Delta_2.\end{cases} \tag{4.5}$$

Поскольку в интегралах, стоящих в левых частях (4.4) и (4.5), интегрирование по кривым $\gamma_1$ и $\gamma_2$ на их общем участке $\gamma\cap C(\delta,z_0)$ происходит в противоположных направлениях, то в результате сложения равенств (4.4) и (4.5) в силу (4.3) получим функцию

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t-z_0|=\delta}\frac{f(t)\,dt}{t-z},$$

совпадающую с $f(z)$ в областях $\Delta_1$ и $\Delta_2$. Поскольку функция $F(z)$ представима в круге $C(\delta,z_0)$ интегралом типа Коши, то она аналитична в этом круге и, очевидно, совпадает с $f(z)$ и на дуге $\gamma\cap C(\delta,z_0)$.

Таким образом, функция $f(z)$ аналитична в круге $C(\delta,z_0)$, а значит, и в точке $z_0$. В силу произвольности точки $z_0\in\gamma$ функция $f(z)$ аналитична на всей дуге $\gamma$, а следовательно, и в области $D$.

В условиях принципа непрерывности говорят, что *функция $f_2(z)$ является аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ из области $D_1$ в область $D_2$ через дугу $\gamma$.*

Из принципа непрерывности легко выводится следующее утверждение.

ГРАНИЧНАЯ ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. *Если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитичны в области $D$, граница которой содержит открытую гладкую жорданову дугу $\gamma$, непрерывны вплоть до $\gamma$ и $f(z)=\varphi(z)$ на $\gamma$, то $f(z)=\varphi(z)$ всюду в области $D$.*

В самом деле, без ограничения общности будем предполагать, что к области $D$ вдоль участка $\gamma$ ее границы можно пристроить область $D_1$, $D\cap D_1=\emptyset$, так как в противном случае этого можно добиться дополнительным конформным отображением (например, для односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ с помощью ветви $\sqrt{z-a}$, где $a$ — один из концов дуги $\gamma$), и рассмотрим функцию

$$g(z) = \begin{cases} f(z)-\varphi(z), & z \in D \cup \gamma, \\ 0, & z \in D_1, \end{cases}$$

удовлетворяющую условиям принципа непрерывности и поэтому аналитическую в области $\Delta = D \cup \gamma \cup D_1$. Так как $g(z) = 0$ на множестве $\gamma \cup D_1$ области $\Delta$, то по внутренней теореме единственности аналитической функции $g(z)=0$ всюду в $\Delta$ и, значит, $f(z)=\varphi(z)$ всюду в области $D$.

**4.** Принцип симметрии Римана – Шварца. *Пусть участком границы области $D$ является открытая дуга $\gamma$ окружности $C_z$, а область $D^*$, симметричная с $D$ относительно $C_z$, лежит вне $D$. Если функция $f(z)$ аналитична в области $D$, непрерывна вплоть до $\gamma$ и переводит $\gamma$ в дугу $\sigma$ окружности $C_w$, то $f(z)$ аналитически продолжается из области $D$ в область $D^*$ через дугу $\gamma$, причем значение полученной в результате этого продолжения функции в точке $z^*$, симметричной с $z$ относительно $C_z$, симметрично с $f(z)$ относительно $C_w$.*

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что $\gamma$ и $\sigma$ совпадают соответственно с интервалами $a < x < b$ и $\alpha < u < \beta$ действительных осей комплексных плоскостей $z$ и $w$, так как к этому случаю всегда можно прийти с помощью дробно-линейных преобразований.

По теореме Тейлора в каждом круге $C(\rho(z_0), z_0)$, где $z_0 \in D$, а $\rho(z_0)$ — расстояние точки $z_0$ до границы области $D$, имеем

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \quad \overline{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c}_k (\overline{z}-\overline{z}_0)^k.$$

В области $D^*$ определим функцию $\overline{f}(z)$, полагая

$$\overline{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c}_k (z-\overline{z}_0)^k$$

в каждом круге $C(\rho(z_0), \overline{z}_0)$. Очевидно, что функция $\overline{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$ аналитична в области $D^*$ и непрерывна вплоть до $\gamma$, причем на $\gamma$ имеет место равенство $\overline{f}(x)=f(x)$, так как по условию $\Im m\overline{f}(x)=\Im m\overline{f(x)}=$ $=\Im mf(x)=0$ при $x\in(a,b)$. В силу принципа непрерывности функция

$$F(z)=\begin{cases} f(z), & z\in D\cup\gamma, \\ \overline{f}(z), & z\in D^*, \end{cases}$$

аналитична в области $D\cup\gamma\cup D^*$, причем $\overline{f}(\overline{z})=\overline{f(z)}$, $z\in D$, что и требовалось доказать.

**5. Аналитическое продолжение действительной аналитической функции действительного переменного.** Заданная на отрезке $I:\ a\leq x\leq b$ действительная функция $f(x)$ называется аналитической, если в некоторой окрестности $|x-x_0|<\delta$ каждой точки $x_0\in I$ она представляется в виде степенного ряда

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k \tag{4.6}$$

с действительными коэффициентами.

Если $f(x)$ — действительная аналитическая функция на отрезке $I$, а $F(z)$ — аналитическая функция в области $D$, содержащей отрезок $I$, причем $F(x)=f(x)$ при $x\in I$, то говорят, что $F(z)$ является аналитическим продолжением $f(x)$ из отрезка $I$ в область $D$.

По первой теореме Абеля полученный из (4.6) заменой $x$ на комплексное переменное $z=x+iy$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-x_0)^k$$

сходится в круге $C(\delta,x_0)$, и его сумма $F(z)$ является аналитической в этом круге функцией, совпадающей с $f(x)$ при $z=x$. Очевидно, что функция $F(z)$ из верхнего полукруга $|z-x_0|<\delta$, $\Im mz>0$ аналитически продолжается в нижний полукруг $|z-x_0|<\delta$, $\Im mz<0$ через интервал $|x-x_0|<\delta$ по принципу симметрии Римана–Шварца. Отсюда, ввиду того, что $F(z)$ аналитически продолжается вдоль отрезка $I$, заключаем, что *функция $f(x)$ аналитически продолжается из отрезка $I$ в некоторую область $D$, симметричную отоносительно действительной оси $\Im mz=0$.*

**6. Принцип Шварца аналитического продолжения.** Кривая $\gamma$: $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, называется аналитической, если $x(t)$ и $y(t)$ — аналитические функции параметра $t$ на отрезке $[\alpha,\beta]$. Очевидно, что в этом случае комплекснозначная функция $z=z(t)$ в окрестности каждой точки $t_0\in[\alpha,\beta]$ представляется в виде степенного ряда вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(t-t_0)^k$, $c_k\in\mathbb{C}$, поэтому ее естественно тоже называть аналитической функцией действительного параметра $t$.

Аналитическая кривая называется правильной, если она не имеет кратных точек и $z'(t)\ne 0$, $\alpha<t<\beta$.

Принцип Шварца. *Если функция $f(z)$ аналитична в области $D$, граница которой содержит открытую правильную аналитическую дугу $\gamma: z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $\alpha<t<\beta$, непрерывна вплоть до $\gamma$, а $F(t)=f[z(t)]$ — аналитическая функция параметра $t$, то $f(z)$ может быть аналитически продолжена из области $D$ через дугу $\gamma$.*

**Доказательство.** Не ограничивая общности, можно считать, что положительное направление на дуге $\gamma$ (т. е. направление, соответствующее возрастанию параметра $t$) совпадает с положительным направлением на границе области $D$. Пусть $z_0$ — произвольная точка дуги $\gamma$, $z_0=z(t_0)$, $\alpha<t_0<\beta$. При достаточно малом $\delta>0$ функции $F(\zeta)$ и $z=z(\zeta)=\psi(\zeta)$ будут аналитичны в круге $C(\delta,t_0)$ комплексной плоскости $\zeta$, $\Re e\zeta=t$, причем в силу условия $z'(t_0)\ne 0$ функция $z==z(\zeta)$ будет взаимно однозначно отображать круг $C(\delta,t_0)$ на некоторую область $\Delta$ комплексной плоскости $z$ с внутренней точкой $z_0$. Пусть $\gamma_1=\gamma\cap\Delta$, $\Delta_1=\Delta\cap D$, $\Delta_2=\Delta\setminus(\Delta_1\cup\gamma_1)$. Дуга $\gamma_1$ является, очевидно, образом интервала $(t_0-\delta,t_0+\delta)$ при отображении $z=z(\zeta)$.

Функция $\varphi(\zeta)=f[z(\zeta)]$, как суперпозиция двух аналитических функций, аналитична в верхнем полукруге $|\zeta-t_0|<\delta$, $\Im m\zeta>0$, непрерывна вплоть до интервала $(t_0-\delta,t_0+\delta)$, а в интервале $(t_0-\delta,t_0+\delta)$ принимает те же значения $F(t)$, что и функция $F(\zeta)$. По граничной теореме единственности $\varphi(\zeta)=F(\zeta)$ в полукруге $|\zeta-t_0|<\delta$, $\Im m\zeta>0$, следовательно, функция $\varphi(\zeta)$ может быть аналитически продолжена из верхнего полукруга в нижний через интервал $(t_0-\delta,t_0+\delta)$ с помощью функции

$$\chi(\zeta) = \begin{cases} f\,[\,z(\zeta)\,], & \text{если} \quad |\,\zeta - t_0\,| < \delta, \ \Im m\zeta \geq 0, \\ F(\zeta), & \text{если} \quad |\,\zeta - t_0\,| < \delta, \ \Im m\zeta < 0. \end{cases}$$

Это, в свою очередь, означает, что функция $f(z)$ может быть аналитически продолжена из области $\Delta_1$ в область $\Delta_2$ через дугу $\gamma_1$, и это аналитическое продолжение осуществляет функция

$$g(z) = \chi\,[\,\psi^{-1}(z)\,] = \begin{cases} f(z), & z \in \Delta_1 \cup \gamma_1, \\ F\,[\,\psi^{-1}(z)\,], & z \in \Delta_2. \end{cases}$$

В силу произвольности точки $z_0$ отсюда следует, что функция $f(z)$ может быть аналитически продолжена из области $D$ через дугу $\gamma$.

## 4.2. Теорема Римана о конформном отображении односвязных областей

**1. Предварительные замечания.** Выше было показано, что конформное отображение осуществляется однолистной аналитической функцией. При изучении задачи построения конформого отображения одной односвязной области $D$ на другую область $D_1$, в предположении, что одна из областей, например, $D_1$ ограничена, надо исключить случаи, когда $D$ есть расширенная комплексная плоскость или расширенная комплексная плоскость с выколотой точкой.

В самом деле, если область $D$ является расширенной комплексной плоскостью или комплексной плоскостью (к последнему случаю с помощью дробно-линейного преобразования сводится случай расширенной комплексной плоскости с выколотой конечной точкой), то функция $w = f(z)$, конформно отображающая $D$ на $D_1$, должна быть целой и ограниченной. Но в силу теоремы Лиувилля такая функция постоянна и, следовательно, не может осуществлять искомого конформного отображения.

Не ограничивая общности, можно считать, что область $D$ лежит в круге $|\,z\,| < 1$. Действительно, в противном случае, если область $D$ ограничена, т. е. лежит в некотором круге $|\,z\,| < R$, то ее можно отобразить на лежащую в единичном круге область с помощью линейного преобразования $\dfrac{z}{R}$. Если же область $D$ не ограничена и имеет внешние точки, то она отображается на ограниченную область преобразованием $\dfrac{1}{z-a}$, где $a$ — внешняя точка области $D$. Пусть, наконец, область $D$ не ограничена и не имеет внешних точек. Ее граница содержит по крайней мере две точки $a$ и $b$ и в силу односвязности области $D$ представляет собой связное замкнутое множество. Поэтому в области $D$ можно выделить аналитическую ветвь двузначной функции $\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$ при $a, b \in \mathbb{C}$ ($\sqrt{z-a}$ при $a \in \mathbb{C}$, $b = \infty$), которая отобразит $D$ на область $\Delta$, внешними точками которой являются все точки области $\Delta^*$ — образа области $D$ при отображении другой ветвью указанной двузначной функции (заметим, что область $\Delta^*$ может быть получена из $\Delta$ поворотом вокруг нуля на угол $\pi$). Таким образом, любую односвязную область, имеющую не менее двух граничных точек, можно конформно отобразить на область, лежащую в единичном круге.

Далее, достаточно ограничиться случаем, когда область $D_1$ есть круг $|w| < 1$. Действительно, если существуют конформные отображения $\zeta = \varphi(z)$ области $D$ на круг $|\zeta| < 1$ и $\omega = \psi(w)$ области $D_1$ на круг $|\omega| < 1$, то функция $w = \psi^{-1}[\varphi(z)]$ будет конформно отображать область $D$ на $D_1$.

Заметим, что если существует одно конформное отображение $w = f(z)$ области $D$ на круг $|w| < 1$, то множество таких отображений бесконечно, так как вместе с $f(z)$ все функции вида $e^{i\theta}\dfrac{f(z) - w_0}{1 - \overline{w}_0 f(z)}$, где $\theta$ и $w_0$ — произвольные соответственно действительная и комплексная постоянные, $|w_0| < 1$, тоже конформно отображают область $D$ на единичный круг.

Точку $z_0 \in D$ вместе с выходящим из нее направлением будем называть линейным элементом, а конформное отображение области $D$ на область $D_1$, переводящее заданный линейный элемент из $D$ в заданный линейный элемент из $D_1$, — нормализованным конформным отображением.

При этом фраза «при отображении $w = f(z)$ точка $z_0$ и выходящее из нее направление $\alpha$ переходит в точку $w_0$ и выходящее из нее направление $\beta$» означает, что $f(z_0) = w_0$, а любая проходящая через точку $z_0$ гладкая кривая $\gamma$, касательная к которой в этой точке образует с действительной осью угол $\alpha$, переходит в проходящую через точку $w_0$ гладкую кривую $\sigma$, касательная к которой в точке $w_0$ образует с действительной осью угол $\beta$. Учитывая геометрический смысл аргумента производной, второе условие можно записать в виде равенства $\arg f'(z_0)=\beta-\alpha$, а условия нормализованности — в виде

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \beta - \alpha. \tag{4.7}$$

Наконец, не ограничивая общности, можно также считать, что точка $z=0$ принадлежит области $D$, а условия нормализованности имеют вид

$$f(0) = 0, \quad f'(0) > 0. \tag{4.8}$$

В самом деле, если условия нормализованности отображения $w = f(z)$ имеют вид (4.7), то функция $\omega = \phi(\zeta) = h\{f\,[\,g^{-1}(\zeta)\,]\}$, где

$$\zeta = g(z) = e^{-i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}, \quad \omega = h(w) = e^{-i\beta}\frac{w-w_0}{1-\overline{w}_0 w},$$

уже будет удовлетворять условиям $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) > 0$, так как

$$\phi(0) = h\{f\,[\,g^{-1}(0)\,]\} = h\,[\,f(z_0)\,] = h(w_0) = 0,$$

а

$$\phi'(0) = h'(w_0)f'(z_0)(g^{-1})'(0) = \frac{h'(w_0)f'(z_0)}{g'(z_0)},$$

так что

$$\arg\phi'(0) = \arg h'(w_0) + \arg f'(z_0) - \arg g'(z_0),$$

откуда в силу (1.34) и второго из условий (4.7) получим

$$\arg\phi'(0) = -\beta + (\beta - \alpha) - (-\alpha) = 0,$$

т. е. $\phi'(0) > 0$.

**2. Вспомогательные утверждения.** При доказательстве существования и единственности нормализованного конформного отображения односвязной области на единичный круг (теоремы Римана) нам понадобятся еще несколько утверждений и среди них следующее.

Теорема Гурса. *Если последовательность однолистных аналитических в области $D\subset\mathbb{C}$ функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, … внутри $D$ равномерно сходится к функции $f(z)$, отличной от постоянной, то функция $f(z)$ тоже аналитична и однолистна в области $D$.*

**Доказательство.** Из первой теоремы Вейерштрасса следует, что предельная функция $f(z)$ аналитична в области $D$. Предположим от противного, что функция $f(z)$ не однолистна в $D$, т. е. что существует по крайней мере две различные точки $z_1$ и $z_2$ области $D$, в которых $f(z)$ принимает одно и то же значение $a$. Поскольку функция $f(z)$ аналитична и не постоянна, то в силу внутренней теоремы единственности в каждой замкнутой подобласти области $D$ число точек $z$, в которых $f(z)=a$, конечно,поэтому в области $D$ можно указать замкнутую кусочно-гладкую кривую $\gamma$, на которой $f(z) \neq a$, и такую, что ограниченная ею область $D_\gamma \subset D$ содержит точки $z_1, z_2$ и не содержит других точек $z$, в которых $f(z)=a$. Поскольку непрерывная на замкнутом множестве $\gamma$ функция $f(z) \neq a$, то

$$\min_{z \in \gamma} |\, f(z) - a \,| = m > 0, \tag{4.9}$$

а так как последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится на $\gamma$ к $f(z)$, существует такое натуральное число $N = N(m)$, что при $n > N$ и $z \in \gamma$ имеем

$$|\, f_n(z) - f(z) \,| < m. \tag{4.10}$$

Из (4.9) и (4.10) следует, что при $n > N$ и $z \in \gamma$ имеет место неравенство

$$|\, f_n(z) - a - [\, f(z) - a \,] \,| < |\, f(z) - a \,|,$$

откуда по теореме Руше заключаем, что при $n > N$ функции $f_n(z) - a$ имеют в области $D_\gamma$, как и функция $f(z) - a$, два нуля. Но поскольку $[\, f_n(z) - a \,]' = f_n'(z) \neq 0$ в силу однолистности функций $f_n(z)$, то все нули функций $f_n(z) - a$ простые, т. е. функции $f_n(z)$ при $n > N$ принимают в области $D_\gamma$ значение $a$ в двух разных точках, что противоречит их однолистности. Полученное противоречие доказывает однолистность функции $f(z)$ в области $D$.

Лемма Шварца. *Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|\, z \,| < 1$ и*

$$f(0) = 0, \tag{4.11}$$

$$|\, f(z) \,| < 1 \quad \textit{при} \quad |\, z \,| < 1, \tag{4.12}$$

*то $|\, f(z) \,| \leq |\, z \,|$ при $|\, z \,| < 1$ и $|\, f'(0) \,| \leq 1$. При этом, если равенство $|\, f(z) \,| = |\, z \,|$ имеет место хотя бы в одной точке $z_0$, $0 < |\, z_0 \,| < 1$, или $|\, f'(0) \,| = 1$, то $f(z) = e^{i\alpha} z$, где $\alpha$ — действительная постоянная.*

**Доказательство.** Ввиду условия (4.11) точка $z = 0$ является для функции $\dfrac{f(z)}{z}$ устранимой особой точкой и $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)}{z} = f'(0)$. Поэтому функция

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & 0<|\,z\,|<1, \\ f'(0), & z=0, \end{cases} \tag{4.13}$$

аналитична в круге $|\,z\,| < 1$. В силу принципа максимума модуля и (4.12) для любого $r\in(0,1)$ имеем

$$|\,\varphi(z)\,|_{|z|<r} \le \max_{|z|=r} |\,\varphi(z)\,| = \frac{1}{r}\max_{|z|=r} |\,f(z)\,| < \frac{1}{r},$$

откуда в пределе при $r\to 1$ получаем, что $|\,\varphi(z)\,| \le 1$ при $|\,z\,|<1$, т. е. $|\,f(z)\,|\le|\,z\,|$ и $|\,f'(0)\,|\le 1$.

Если $|\,f'(0)\,|=1$ или равенство $|\,f(z)\,|=|\,z\,|$ имеет место хотя бы в одной точке $z_0$, $0<|\,z_0\,|<1$, то из принципа максимума модуля следует, что функция $\varphi(z)$, как достигающая своего наибольшего по модулю значения внутри круга $|\,z\,|<1$, есть постоянная, по модулю равная единице, т. е. $\varphi(z)=e^{i\alpha}$ или, в силу (4.13), функция $f(z)=e^{i\alpha}z$.

**3.** Теорема Римана. *Для каждой односвязной области $D$, граница которой состоит более чем из одной точки, существует единственное нормализованное конформное отображение $w = f(z)$ этой области на круг $|\,w\,|<1$.*

**Доказательство.** $1^0$. Существование. В силу сказанного в п. 1, не ограничивая общности, будем считать, что область $D$ лежит в круге $|\,z\,|<1$, $0\in D$, а условия нормализованности имеют вид (4.8).

Покажем сначала, что для любой точки $a\in C(1,0)\setminus D$ в этой области существует функция $\varphi_a(z)$, конформно отображающая ее в единичный круг и удовлетворяющая условиям

$$\varphi_a(0) = 0, \quad \varphi_a'(0) > 1. \tag{4.14}$$

Для этого преобразованием $\zeta=\dfrac{z-a}{\bar{a}z-1}$, меняющим местами точки 0 и $a$ , переведем $D$ в лежащую в единичном круге односвязную область, не содержащую нуля. Поскольку односвязная область комплексной плоскости обладает тем свойством, что вместе с любой лежащей в ней замкнутой кривой Жордана ей принадлежит и внутренность этой кривой, то в полученной области круга $|\,\zeta\,|<1$ не существует замкнутой жордановой кривой, содержащей точку $\zeta=0$, а следовательно, в ней можно выделить ветвь двузначной функции $\sqrt{\zeta}$, и пусть $\omega=\sqrt{\zeta}$ — одна из этих ветвей, а $\sqrt{a}=b$. Наконец, преобразованием $w=e^{i\arg b}\dfrac{\omega-b}{\overline{b}\omega-1}$ полученную область круга $|\,\omega\,|<1$ переведем в круг $|\,w\,|<1$.

Таким образом, в результате преобразований $\zeta=\zeta(z)$, $\omega=\omega(\zeta)$, $w=w(\omega)$ мы получили искомую однолистную в области $D$ функцию $w=\varphi_a(z)$, которая, очевидно, удовлетворяет первому из условий (4.14), а также второму, поскольку

$$\varphi_a'(0)=\Big(\frac{dw}{d\omega}\Big|_{\omega=b}\Big)\Big(\frac{d\omega}{d\zeta}\Big|_{\zeta=a}\Big)\Big(\frac{d\zeta}{dz}\Big|_{z=0}\Big)=$$

$$=\Big(e^{i\arg b}\frac{|b|^2-1}{(\overline{b}\omega-1)^2}\Big|_{\omega=b}\Big)\Big(\frac{1}{2\sqrt{\zeta}}\Big|_{\zeta=a}\Big)\Big(\frac{|a|^2-1}{(\overline{a}z-1)^2}\Big|_{z=0}\Big)=$$

$$=\frac{b}{|b|}\cdot\frac{1}{|b|^2-1}\cdot\frac{1}{2b}\left(|a|^2-1\right)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\cdot\frac{1}{|a|-1}\cdot\frac{1}{2}\left(|a|^2-1\right)=\frac{1+|a|}{2\sqrt{|a|}}>1\,.$$

Ясно, что обратная функция $z=\varphi_a^{-1}(w)=\psi_a(w)$, как суперпозиция двух дробно-линейных преобразований и функции $\zeta=\omega^2$, является аналитической в круге $|\,w\,|<1$ и удовлетворяет условиям леммы Шварца. В силу этого при любых $w\in C^*(1,0)$ имеет место неравенство $|\,\psi_a(w)\,|<|\,w\,|$, поскольку $\psi_a(w)$, очевидно, отлична от функции вида $e^{i\alpha}w$, $\alpha\in\mathbb{R}$, или для функции $\varphi_a(z)$ в области $D\backslash\{0\}$ имеем

$$|\,\varphi_a(z)\,|>|\,z\,|.$$

Ввиду этого свойства функции $\varphi_a(z)$ ее иногда называют "раздувающей".

Заметим, что из леммы Шварца для функции $\psi_a(w)$ следует также второе из условий (4.14).

Обозначим через $\mathfrak{M}$ семейство всех однолистных аналитических в лежащей в единичном круге $|\,z\,|<1$ и содержащей точку $z=0$ односвязной области $D$ функций $f(z)$,

$$|\,f(z)\,|<1,\quad z\in D,\tag{4.15}$$

удовлетворяющих условиям (4.8). Это семейство не пусто: к нему принадлежат, например, функции

$$f(z)=\lambda z,\ 0<\lambda\leq 1.\tag{4.16}$$

Покажем теперь, что искомым нормализованным конформным отображением области $D$, на единичный круг является решение следующей экстремальной задачи.

*Найти в семействе* $\mathfrak{M}$ *функцию, у которой величина* $f'(0)$ *имеет наибольшее значение.*

Докажем сначала существование решения этой задачи. Для этого заметим, что существует такое число $\rho > 0$, что круг $|\,z\,| < \rho$ лежит в области $D$ и что, следовательно, в этом круге функции $f(z) \in \mathfrak{M}$ аналитичны. Легко видеть, что функции $g(\zeta) = f(\rho\,\zeta)$ удовлетворяют условиям леммы Шварца, из которой следует неравенсто $f'(0) \le \dfrac{1}{\rho}$, т. е. ограниченность сверху чисел $f'(0)$. Пусть $\alpha$ есть точная верхняя граница всех этих чисел. Тогда для любого числа $\mu \in (0, \alpha)$ существует функция $f(z) \in \mathfrak{M}$, для которой $f'(0) = \nu$, где $\mu < \nu \le \alpha$. Но вместе с функцией $f(z)$ семейству $\mathfrak{M}$ принадлежат и все функции $\lambda f(z)$, $0 < \lambda \le 1$, производные которых $\lambda f'(0)$ принимают все значения из промежутка $(0, \nu\,]$. Отсюда следует, что множество $\{f'(0)\}$ содержит интервал $(0, \alpha)$ и, следовательно, $\alpha$ является предельной точкой множества $\{f'(0)\}$, $f(z) \in \mathfrak{M}$.

Пусть $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, есть последовательность функций из $\mathfrak{M}$ такая, что
$$\lim_{n \to \infty} f'{}_n(0) = \alpha. \tag{4.17}$$

Условие (4.15) означает, что семейство $\mathfrak{M}$ равномерно ограничено в области $D$, поэтому к нему применим принцип компактности, согласно которому из последовательности $\{f_n(z)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$, равномерно сходящуюся внутри $D$ к аналитической в $D$ функции $f_0(z)$, причем $f_0(0) = 0$ и по первой теореме Вейерштрасса имеем
$$\lim_{n \to \infty} f'_{n_k}(0) = f'_0(0). \tag{4.18}$$

Поскольку $\lim\limits_{n \to \infty} f'_{n_k}(0) = \lim\limits_{n \to \infty} f'{}_n(0)$, то из (4.17) и (4.18) получим
$$f'_0(0) = \alpha. \tag{4.19}$$

В силу (4.16) для функций из семейства $\mathfrak{M}$ имеем $\alpha \ge 1$, поэтому ввиду (4.19) имеем $f'_0(0) > 0$. Отсюда следует, что предельная функция $f_0(z)$ не тождественно постоянна, и по теореме Гурса она однолистна в области $D$. Далее, из (4.15) следует, что $|\,f_0(z)\,| \le 1$, $z \in D$, но поскольку по принципу максимума модуля равенство в $D$ невозможно, то $|\,f_0(z)\,| < 1$, $z \in D$. Таким образом, $f_0(z) \in \mathfrak{M}$.

Докажем теперь, что экстремальная функция $w = f_0(z)$ отображает область $D$ на полный круг $|\,w\,| < 1$. Допустим от противного, что она отображает $D$ на некоторую область $G$, не совпадающую с кругом $|\,w\,| < 1$, и пусть $a \in C(1, 0) \setminus G$. Положим $F(z) = \varphi_a[\,f_0(z)\,]$, где $\varphi_a(w)$ —

— построенная выше "раздувающая" функция. Функция $F(z)$, очевидно, аналитична и однолистна в $D$, $|F(z)|<1$ при всех $z\in D$, в силу (4.8), (4.14) и (4.18) удовлетворяет условиям $F(0)=0$, $F'(0)=\varphi'_a(0)f'_0(0)>$ $>f'_0(0)>0$ и, следовательно, принадлежит семейству $\mathfrak{M}$. Но неравенство $F'(0)>f'_0(0)$ противоречит максимальности значения $f'_0(0)=\alpha$. Таким образом, функция $w=f_0(z)$ конформно отображает область $D$ на полный круг $|w|<1$.

$2^0$. **Единственность.** Допустим, что кроме построенной выше функции $w=f_0(z)$ существует еще одна однолистная аналитическая функция $\zeta=\varphi(z)$, осуществляющая нормализованное конформное отображение области $D$ на единичный круг, удовлетворяющая условиям $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)>0$. Очевидно, что функция

$$w=g(\zeta)=f\,[\,\varphi^{-1}(\zeta)\,]$$

конформно отображает круг $|\zeta|<1$ на круг $|w|<1$, причем

$$g(0)=0, \quad g'(0)>0. \tag{4.20}$$

Поскольку аналитическая в круге $|\zeta|<1$ функция $g(\zeta)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца, то $|w|\le|\zeta|$. Для обратной функции $\zeta=g^{-1}(w)$ по лемме Шварца имеем также $|\zeta|\le|w|$. Следовательно, $|w|=|\zeta|$ и тогда по лемме Шварца $w=e^{i\alpha}\zeta$, где $\alpha$ — действительная постоянная, и поскольку в силу (4.20) имеем

$$\left.\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}=g'(0)=e^{i\alpha}>0,$$

то $e^{i\alpha}=1$. Таким образом, окончательно имеем $w=\zeta$, т.е. $f(z)=\varphi(z)$, $z\in D$, что завершает доказательство теоремы Римана.

Пусть функция $w=f(z)$ осуществляет конформное отображение единичного круга на себя и при этом

$$f(z_0)=0, \quad \arg f'(z_0)=\alpha.$$

Но, как следует из (1.32) и (1.34), дробно-линейная функция (1.32) тоже удовлетворяет этим условиям и конформно отображает единичный круг на себя, а поскольку по теореме Римана такое отображение определяется указанными условиями единственным образом, то

$$f(z) = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}.$$

Таким образом, *любое конформное отображение единичного круга на себя осуществляется дробно-линейной функцией*, а формула (1.32) дает общий вид конформного отображения единичного круга на себя.

Точно так же формула (1.31) дает общий вид конформного отображения верхней полуплоскости на единичный круг.

Оказывается, функция, существование и единственность которой доказаны в тереме Римана, является решением многих экстремальных задач, и не только в классе однолистных функций.

Например, ее можно получить (см. [1], стр. 162-164) как решение задачи нахождения в семействе $\mathfrak{M}$ функции, для которой образ области $D$ содержит максимальный круг с центром в нуле.

При этом решением будет предел последовательности $f_n(z)$ суперпозиций "раздувающих"функций, $f_1(z)=\varphi_a(z)$, в которых в качестве $a$ все время надо брать ближайшую к нулю точку границы соответствующей области.

## 4.3. Соответствие границ при конформном отображении односвязных областей

Имеет место следующее утверждение.

Теорема.*Если функция $w=f(z)$ конформно отображает область $D$ с границей $\Gamma$ на круг $|w|<1$, а последовательность $\{z_n\}$ точек $z_n$, $n=1,2,\ldots$, области $D$ сходится к точке $z_0\in\Gamma$, то все предельные точки последовательности $\{f(z_n)\}$ лежат на окружности $|w|=1$.*

**Доказательство.** Если предельная точка $w_0$ последовательности $\{f(z_n)\}$ не лежит на окружности $|w|=1$, то она является внутренней точкой круга $|w|<1$, т. е. $|w_0|<1$. Поэтому любую $r$-окрестность точки $w_0$, $0<r<1-|w_0|$, содержащую бесконечное множество точек последовательности $\{f(z_n)\}$, функция $z=f^{-1}(w)$ конформно отображает на односвязную область $\Delta_r$, лежащую строго внутри $D$, т. е. $\overline{\Delta_r}\subset D$, и содержащую бесконечное множество соответствующих точек последовательности $\{z_n\}$, а это невозможно, так как $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$, $z_0\in\Gamma$.

Говорят, что *при конформном отображении* $w=f(z)$ *области* $D$ *с границей* $\Gamma$ *на круг* $|w|<1$ *точке* $z_0\in\Gamma$ *соответствует точка* $w_0$ *окружности* $|w|=1$, *если для любой последовательности* $\{z_n\}$ *точек области* $D$, *сходящейся к точке* $z_0$, *последовательность* $\{f(z_n)\}$ *сходится к точке* $w_0$.

Область $D$ будем называть жордановой, если ее граница состоит из конечного числа замкнутых кривых Жордана.

Приведем без доказательства следующее утверждение о соответствии границ при конформном отображении односвязных жордановых областей.

Теорема. *При конформном отображении* $w=f(z)$ *односвязной жордановой области* $D$ *с границей* $\Gamma$ *на жорданову область* $D_1$ *с границей* $\Gamma_1$ *функция* $w=f(z)$ *устанавливает взаимно однозначное и непрерывное соответствие между* $D\cup\Gamma$ *и* $D_1\cup\Gamma_1$ *с сохранением направления обхода на* $\Gamma$ *и* $\Gamma_1$.

На основании этой теоремы единственность аналитической функции $w=f(z)$, осуществляющей конформное отображение односвязной жордановой области $D$ с границей $\Gamma$ на круг $|w|<1$, может быть доказана также при выполнении любого из следующих двух условий:

а) три заданные точки $t_1, t_2, t_3$ границы $\Gamma$ переходят соответственно в три заданные точки $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ окружности $|w|=1$ с сохранением направления обхода;

б) заданные точки $z_0\in D$ и $t_0\in\Gamma$ переходят соответственно в заданные точки $w_0$, $|w_0|<1$, и $\tau_0$, $|\tau_0|=1$.

Действительно, допустим, что имеются две такие функции: $w=f(z)$ и $\zeta=\varphi(z)$. Тогда функция $w=g(\zeta)=f\,[\varphi^{-1}(\zeta)]$ осуществляет конформное отображение круга $|\zeta|<1$ на круг $|w|<1$, гомеоморфное в замкнутом круге $|\zeta|\leq 1$ с неподвижными точками $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ в случае а) и $w_0, \tau_0$ — в случае б). Как было показано выше, $w=g(\zeta)$ является дробно-линейным отображением. Так как симметричность пары точек инвариантна при дробно-линейных отображениях, то в случае б) неподвижной будет также точка $\dfrac{1}{\overline{w}_0}$. Дробно-линейное отображение с тремя неподвижными точками является тождественным отображением (это можно получить, например, из инвариантности ангармонического отношения четырех точек при дробно-линейных отображениях). Таким образом, $g(\zeta)\equiv\zeta$, т. е. $f(z)=\varphi(z)$, $z\in D$.

Принцип взаимно однозначного соответствия. *Если границы* $\Gamma$ *и* $\Gamma_1$ *односвязных областей* $D$ *и* $D_1$ *являются замкнутыми кусочно-гладкими кривыми Жордана и аналитическая в* $\overline{D}$ *функция* $w=f(z)$ *взаимно однозначно отображает* $\Gamma$ *на* $\Gamma_1$ *с сохранением направления обхода, то она конформно отображает область* $D$ *на область* $D_1$.

**Доказательство.** Пусть $\tau=f(t)$, $t\in\Gamma$. Из очевидных равенств

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(t)\,dt}{f(t)-w}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{d\tau}{\tau-w}=\begin{cases}1, & w\in D_1,\\ 0, & w\in C\overline{D}_1,\end{cases} \tag{4.21}$$

и формулы логарифмического вычета следует, что функция $f(z)-w$ при $w\in C\overline{D}_1$ не имеет в области $D$ нулей, а при каждом $w\in D_1$ она имеет единственный нуль.

Точка $z_0=f^{-1}(w_0)$ при $w_0\in\Gamma_1$ не может принадлежать области $D$. Действительно, в противном случае нашелся бы замкнутый круг $\overline{C(\delta,z_0)}\subset D$, не содержащий отличных от $z_0$ нулей функции $f(z)-w_0$. Если $w_1\in C(m,w_0)$, где $m=\min\limits_{|z-z_0|=\delta}|\,f(z)-w_0\,|>0$, то

$$\big|\,[\,f(z)-w_0\,]-[\,f(z)-w_1\,]\,\big|=|\,w_1-w_0\,|<m\le|\,f(z)-w_0\,|$$

при $|\,z-z_0\,|=\delta$. Поэтому по теореме Руше каждое значение $w_1\in C(m,w_0)$ принимается функцией $f(z)$ в круге $C(\delta,z_0)$, что согласно (4.21) невозможно,когда $w_1\in C(m,w_0)\cap C\overline{D}_1$.

Следовательно, функция $f(z)$ однолистна в области $D$ и конформно отображает ее на область $D_1$.

Принцип взаимно однозначного соответствия, очевидно, останется в силе, если $f(z)$ аналитична в $\overline{D}$ всюду, кроме конечного числа точек границы $\Gamma$, в которых $f'(z)$ обращается в бесконечность, но интегрируема вдоль $\Gamma$. Этот принцип верен и в том случае, когда одна из рассматриваемых областей, например, $D$ является полуплоскостью.

**Формула Кристоффеля – Шварца.** Рассмотрим теперь задачу о конформном отображении верхней полуплоскости $\Pi$: $\Im mz>0$ на многоугольник $\Pi_n$ с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и внутренними углами $\pi\alpha_k$ при вершинах $A_k$, где

$$0<\alpha_k<2,\ \alpha_k\ne 1,\ k=1,\,2,\,\ldots,\,n;\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k=n-2.$$

Согласно теореме Римана существует функция $w = f(z)$, осуществляющая требуемое отображение, причем она взаимно однозначно и непрерывно отображает действительную ось $\Im m z = 0$ на контур многоугольника $\Pi_n$. Пусть при этом $a_k = f^{-1}(A_k)$, причем нумерацией вершин и дробно-линейным отображением $\Pi$ на себя можно добиться, чтобы $-\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \infty$.

Рассмотрим однозначную аналитическую в полуплоскости $\Pi$ функцию

$$\varphi(z) = C \int\limits_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n} (t - a_k)^{\alpha_k - 1}\, dt + C_1,$$

где $z_0$ — произвольное комплексное число, $\Im m z_0 \geq 0$, $C$ и $C_1$ — некоторые комплексные постоянные, а под $(z - a_k)^{\alpha_k}$ понимаются однозначные в полуплоскости $\Pi$ ветви этих функций, положительные при $z > a_k$.

Очевидно, что функция $\varphi(z)$ непрерывна на всей действительной оси и аналитична при $\Im m z \geq 0$ всюду, кроме, быть может, точек $z = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку подынтегральная функция может быть записана в виде

$$t^{-2} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_k}{t}\right)^{\alpha_k - 1},$$

то интеграл

$$\int\limits_{z_0}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} (t - a_k)^{\alpha_k - 1}\, dt$$

сходится, причем его значение не зависит от пути интегрирования, лежащего в верхней полуплоскости. В последнем можно убедиться предельным переходом при $R \to \infty$ в интеграле вдоль замкнутой кривой, состоящей из частей двух различных путей, лежащих в круге $|z| < R$ и дуги $\Gamma_R$ окружности $|z| = R$ с концами в точках пересечения этой окружности с рассматриваемыми путями. Таким образом, функция $\varphi(z)$ непрерывна и в точке $z = \infty$.

Поскольку

$$\varphi'(z) = C \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\alpha_k - 1} \neq 0 \quad \text{при} \quad z \neq a_k$$

и

$$\arg \varphi'(z) = \arg C + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - 1) \arg (z - a_k)$$

принимает постоянные значения в интервалах $(a_k, a_{k+1})$, то функция $\varphi(z)$ осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение действительной оси на замкнутую ломаную линию, звеньями которой являются образы отрезков $[a_k, a_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, n$, $a_{n+1} = a_1$, причем направление обхода сохраняется.

Покажем, что угол при вершине $\varphi(a_k)$ этой ломаной равен $\pi\alpha_k$. В самом деле,

$$\arg\left[\varphi(a_{k+1}) - \varphi(a_k)\right] = \arg \varphi'(z)\Big|_{z\in(a_k,\, a_{k+1})} =$$

$$= \arg C + \sum_{j=k+1}^{n} (\alpha_j - 1)\pi,$$

поэтому

$$\arg\left[\varphi(a_{k+1}) - \varphi(a_k)\right] - \arg\left[\varphi(a_k) - \varphi(a_{k-1})\right] = \pi - \pi\alpha_k,$$

т. е. угол при вершине $\varphi(a_k)$ равен $\pi\alpha_k$.

Таким образом, функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям принципа взаимно однозначного соответствия и при произвольных значениях постоянных $C$ и $C_1$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\Pi$ на некоторый многоугольник, подобный $\Pi_n$. Легко видеть, что при

$$C_1 = f(z_0), \quad \arg C = \arg f'(z)\Big|_{z>a_n},$$

$$|\, C \,| = |\, A_2 - A_1 \,| \Big/ \left| \int_{a_1}^{a_2} \prod_{k=1}^{n} (t - a_k)^{\alpha_k - 1}\, dt \right|$$

функция $\varphi(z) = f(z)$, $z \in \Pi$, т. е. дает конформное отображение верхней полуплоскости $\Pi$ на многоугольник $\Pi_n$.

# Глава 5

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

## 5.1. Гармонические функции

**1. Восстановление аналитической функции по ее действительной части.** Однозначная в области $D$ действительная функция $u(x, y)$ действительных переменных $x, y$, обладающая непрерывными частными производными второго порядка и удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{5.1}$$

называется гармонической в $D$.

Дифференциальное уравнение с частными производными (5.1) называется уравнением Лапласа, а дифференциальный оператор $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператором Лапласа.

Если гармонические в области $D$ функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ связаны условиями Коши–Римана, то функция $v(x, y)$ называется гармонически сопряженной с функцией $u(x, y)$.

Выше было показано, что аналитическая в области $D$ функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ имеет в $D$ производные всех порядков. В частности, ее производную первого порядка можно записать в виде

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5.2}$$

Так как производная $f'(z)$ сама является аналитической в области $D$ функцией, то из (5.2) заключаем, что

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

откуда следует, что $\Delta u = 0$ и $\Delta v = 0$. Поскольку $f''(z)$ тоже аналитична в $D$, то частные производные второго порядка функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ непрерывны.

Это означает, что действительная и мнимая части аналитической в области $D$ функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — гармонические в $D$ функции, а поскольку они удовлетворяют условиям Коши–Римана, то функция $v(x, y)$ является гармонически сопряженной с $u(x, y)$.

Обратно, если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — произвольные гармонические в области $D$ функции, причем $v(x, y)$ — гармонически сопряженная с $u(x, y)$, то в силу условий Коши–Римана и дифференцируемости функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, вытекающей из непрерывности их частных производных первого порядка, функция $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ аналитична в области $D$.

Пусть теперь в односвязной области $D$ задана произвольная гармоническая функция $u(x, y)$. В силу равенства $\Delta u=0$ выражение

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

есть полный дифференциал функции, которую мы обозначим через $v(x, y)$, причем

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + C,$$

где $(x_0, y_0)$ — произвольная фиксированная, а $(x, y)$ — переменная точка области $D$, $C$ — произвольная действительная постоянная, а интеграл не зависит от лежащего в области $D$ пути интегрирования. Очевидно, что функция $v(x, y)$ связана с $u(x, y)$ условиями Коши–Римана, поэтому частные производные первого порядка функции $v(x, y)$ непрерывны, а следовательно, $v(x, y)$ является мнимой частью аналитической в области $D$ функции

$$f(z) = u(x, y) + i\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + iC.$$

Таким образом, аналитическая в односвязной области $D$ функция $f(z)$ определяется по ее действительной части с точностью до произвольной аддитивной мнимой постоянной $iC$.

Существует и более простая формула, выражающая аналитическую в точке $z_0$ функцию $f(z)$ через ее действительную часть без интегрирования, — формула Гурса, которую мы приводим здесь без доказательства:

$$f(z) = 2u\Big(\frac{z+\overline{z}_0}{2}, \frac{z-\overline{z}_0}{2i}\Big) - \overline{f(z_0)}.$$

**2. Свойства гармонических функций.**

$1^0$. Гармоническая функция имеет частные производные всех порядков, которые, в свою очередь, тоже являются гармоническими функциями.

Это свойство является следствием существования у аналитической функции производных всех порядков, тоже являющихся аналитическими функциями, действительная и мнимая части которых являются гармоническими функциями.

Гармоническую в области $D$ функцию $u(x, y)$ будем также обозначать символом $u(z)$, $z \in D$.

$2^0$. Для гармонической в области $D$ функции $u(z)$ справедлива теорема о среднем: если круг $\overline{C(\delta, z)} \subset D$, то

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z+\delta e^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Эта теорема получается отделением действительных частей в формуле (2.53), выражающей теорему о среднем для аналитической функции.

$3^0$. ПРИНЦИП ЭКСТРЕМУМА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. *Гармоническая в области $D$ функция $u(z) \not\equiv const$ не может достигать своего экстремума во внутренней точке этой области.*

Предположим от противного, что гармоническая в области $D$ функция $u(z)$, отличная от постоянной, достигает экстремума в некоторой точке $z_0 \in D$.

Рассмотрим сначала случай, когда область $D$ односвязна. Тогда в области $D$ существует аналитическая функция $f(z)$ такая, что $\Re e f(z) = u(z)$, и модуль аналитической и не обращающейся в нуль в области $D$ функции $e^{f(z)}$, равный $e^{u(z)}$, в силу монотонности экспоненциальной функции действительного переменного достигает своего экстремума в точке $z_0 \in D$, что возможно только для постоянной аналитической функции с модулем, равным $e^{u(z_0)}$, а следовательно, для гармонической функции $u(z)=u(z_0)$ всюду в области $D$.

Если теперь область $D$ не односвязна, то существует функция $f(z)$, аналитическая в круге $C(\delta, z_0) \subset D$ и такая, что $\Re e f(z)=u(z)$. Но тогда модуль аналитической и не обращающейся в нуль в круге $C(\delta, z_0)$ функции $e^{f(z)}$, равный $e^{u(z)}$, достигает своего экстремального значения $e^{u(z_0)}$ в центре этого круга, что возможно только в случае, когда $\left| e^{f(z)} \right| = e^{u(z_0)}$ для всех $z \in C(\delta, z_0)$, т. е. $u(z) = u(z_0)$ всюду в круге $C(\delta, z_0)$, а в силу непрерывности функции $u(z)$ в области $D$ — и на множестве $\overline{C(\delta, z_0)} \cap D$. Пусть теперь $z_*$ — произвольная точка области $D$, лежащая вне замкнутого круга $\overline{C(\delta, z_0)}$, а $\sigma$, $\sigma \subset D$, — гладкая кривая с началом в точке $z_0$ и концом в точке $z_*$. Обозначим через $z_1$ последнюю точку пересечения кривой $\sigma$ с окружностью $|z-z_0|=\delta$ и, повторяя приведенное выше рассуждение, убеждаемся, что $u(z)=u(z_0)$ на множестве $\overline{C(\rho, z_1)} \cap D$, где $\rho=\rho(\sigma, \partial D)$. Обозначим далее через $z_2$ последнюю точку пересечения дуги $\overset{\frown}{z_1 z_*}$ кривой $\sigma$ с окружностью $|z-z_1| = \rho$ и аналогично докажем, что $u(z) = u(z_0)$ на множестве $\overline{C(\rho, z_2)} \cap D$. Продолжая этот процесс, придем к кругу $\overline{C(\rho, z_m)}$, содержащему точку $z_*$, в котором $u(z) = u(z_0)$, а следовательно, и $u(z_*) = u(z_0)$. В силу произвольности точки $z_*$ отсюда следует, что функция $u(z)$ равна своему экстремальному значению $u(z_0)$ всюду в области $D$, т. е. постоянна, что противоречит условию.

$4^0$. Если $u(x, y) = u(z)$ — гармоническая в области $D$ функция, $z = \varphi(\zeta)$ — аналитическая в некоторой области $\Delta$ функция, причем $\varphi(\zeta) \in D$ при всех $\zeta \in \Delta$, то функция $u^*(\zeta) = u[\varphi(\zeta)]$ гармонична в области $\Delta$.

В самом деле, положив $\zeta = \xi + i\eta$, получим, что $\varphi(\zeta) = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta)$, а из свойства $1^0$ гармонических функций следует, что функция $u^*(\zeta) = u^*(\xi, \eta) = u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$ имеет в области $\Delta$ частные производные по $\xi$ и $\eta$ всех порядков (как суперпозиция функций, обладающих этим свойством). Покажем теперь, что функция $u^*(\xi, \eta)$ удовлетворяет в области $\Delta$ уравнению Лапласа. Имеем

$$u^*_\xi = u_x x_\xi + u_y y_\xi,$$
$$u^*_{\xi\xi} = u_{xx} x^2_\xi + 2u_{xy} x_\xi y_\xi + u_{yy} y^2_\xi + u_x x_{\xi\xi} + u_y y_{\xi\xi}.$$

Аналогично,

$$u^*_{\eta\eta} = u_{xx} x^2_\eta + 2u_{xy} x_\eta y_\eta + u_{yy} y^2_\eta + u_x x_{\eta\eta} + u_y y_{\eta\eta}$$

и учитывая, что функции $x(\xi, \eta)$ и $y(\xi, \eta)$ удовлетворяют условиям Коши–Римана $x_\xi = y_\eta$, $x_\eta = -y_\xi$, так что $x^2_\eta = y^2_\xi$, $y^2_\eta = x^2_\xi$, $x_\xi y_\xi + x_\eta y_\eta = 0$, получим

$$\Delta u^* = \big(u_{xx} + u_{yy}\big)\big(x^2_\xi + y^2_\xi\big) + u_x\big(x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta}\big) + u_y\big(y_{\xi\xi} + y_{\eta\eta}\big),$$

откуда в силу гармоничности функции $u(x, y)$ в области $D$ и функций $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ в области $\Delta$ следует, что

$$\Delta u^* = u^*_{\xi\xi} + u^*_{\eta\eta} = 0.$$

## 5.2. Задача Дирихле

В математической физике большое значение имеет задача Дирихле (первая краевая задача): *найти гармоническую в области $D$ и непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$ функцию $u(x, y) = u(z)$, принимающую заданные непрерывные значения $g(t)$ на границе $\Gamma$ этой области.*

**1. Решение задачи Дирихле для круга.** Покажем, что формула Пуассона (2.67), в которой вместо $u(t)$ взята произвольная непрерывная на окружности $\Gamma : t - z_0 = Re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, функция $g(t)$, дает решение задачи Дирихле для круга $C(R, z_0)$.

Напомним, что формула Пуассона получена отделением действительной части в интегральной формуле Шварца (2.66), поэтому надо доказать, что функция

$$u(z) = \Re e\Big[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{t - 2z_0 + z}{(t - z_0)(t - z)}\, g(t)\, dt\Big] \tag{5.3}$$

гармонична в $C(R, z_0)$, непрерывна в $\overline{C(R, z_0)}$ и принимает на $\Gamma$ значения $g(t)$.

Записав (5.3) в виде

$$u(z) = \Re e\Big[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\frac{t-2z_0}{t-z_0}\,g(t)dt}{t-z} + \frac{z}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\frac{g(t)}{t-z_0}\,dt}{t-z}\Big], \tag{5.4}$$

мы видим, что для любой непрерывной на $\Gamma$ функции $g(t)$ стоящие в правой части (5.4) интегралы типа Коши, а вместе с ними и выражение в квадратных скобках, аналитичны в круге $C(R, z_0)$, поэтому $u(z)$, как действительная часть аналитической функции, является гармонической в этом круге функцией.

Докажем теперь, что

$$\lim_{\substack{z\to t_0\\ z\in C(R,z_0)}} u(z) = g(t_0), \quad t_0 = z_0 + Re^{i\varphi_0}.$$

Для этого заметим сначала, что

$$\Re e\frac{t-2z_0+z}{t-z} = \Re e\frac{(t-z_0+z-z_0)[\overline{t}-\overline{z}_0-(\overline{z}-\overline{z}_0)]}{|\,t-z\,|^2} =$$

$$= \Re e\frac{|\,t-z_0\,|^2-|\,z-z_0\,|^2+(z-z_0)(\overline{t}-\overline{z}_0)-(\overline{z}-\overline{z}_0)(t-z_0)}{|\,t-z\,|^2} =$$

$$= \frac{R^2-|\,z-z_0\,|^2}{|\,t-z\,|^2},$$

поэтому (5.3) можно записать в виде

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-|\,z-z_0\,|^2}{|\,t-z\,|^2}\,g(t)\,d\varphi, \quad t = z_0 + Re^{i\varphi},$$

а в силу формулы Пуассона для гармонической функции $u(z)\equiv 1$ имеет место равенство

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-|\,z-z_0\,|^2}{|\,t-z\,|^2}\,d\varphi, \quad t = z_0+Re^{i\varphi},\ z\in C(R, z_0). \tag{5.5}$$

Следовательно,

$$u(z)-g(t_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-|\,z-z_0\,|^2}{|\,t-z\,|^2}\,[\,g(t)-g(t_0)\,]\,d\varphi. \tag{5.6}$$

В силу непрерывности функции $g(t)$ на $\Gamma$ для любого наперед заданного $\varepsilon>0$ найдется такое число $\theta=\theta(\varepsilon)>0$, что для всех $\varphi$, $|\,\varphi-\varphi_0\,|<\theta$, будем иметь

$$|\,g(t)-g(t_0)\,|=|\,g(z_0+Re^{i\varphi})-g(z_0+Re^{i\varphi_0})\,|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.7}$$

Переписав (5.6) в виде $\quad u(z)-g(t_0)=I_1+I_2,$

где интегралы $I_1$ и $I_2$ берутся соответственно по отрезкам $[\,\varphi_0-\theta,\varphi_0+\theta\,]$ и $[\,\varphi_0+\theta,\varphi_0-\theta+2\pi\,]$, в силу (5.5) и (5.7) получим

$$\Big|\,I_1\,\Big|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi_0-\theta}^{\varphi_0+\theta}\frac{R^2-|\,z-z_0\,|^2}{|\,t-z\,|^2}\,|\,g(t)-g(t_0)\,|\,d\varphi<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Выбрав $\theta$, возьмем теперь $z$ в области $C(R\sin\frac{\theta}{2},t_0)\cap C(R,z_0)$ настолько близким к $t_0$, чтобы выполнялось неравенство

$$\Big|\,I_2\,\Big|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi_0+\theta}^{\varphi_0-\theta+2\pi}\frac{R^2-|\,z-z_0\,|^2}{|\,t-z\,|^2}\,|\,g(t)-g(t_0)\,|\,d\varphi<$$

$$<\frac{2M}{R^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\big(R^2-|\,z-z_0\,|^2\big)<\frac{\varepsilon}{2},$$

где $M=\max\limits_{|\,t-z_0|=R}|\,g(t)\,|$. В результате для $z\in C(R,z_0)$, достаточно близких к $t_0$, получим неравенство $|\,u(z)-g(t_0)\,|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

**2. Функция Грина**. Пусть в односвязной области $D$ задана гармоническая функция $u(z)=u(x,\,y)$, а функция $w=f(z,z_0)=\varphi(z)$ конформно отображает область $D$ на круг $|\,w\,|<1$ так, что $f(z_0,z_0)=0$,

$z_0 \in D$. Тогда, как было показано выше, функция $u^*(w) = u\,[\,\varphi^{-1}(w)\,]$ будет гармонической в круге $|\,w\,|<1$, поэтому по теореме о среднем для любого $\rho\in(0,\,1)$ будем иметь

$$u^*(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u^*(\rho e^{i\psi})\,d\psi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u^*(\rho e^{i\psi})\,\frac{d\sigma}{\rho}\,,$$

где $d\sigma$ — элемент длины окружности $|\,w\,|=\rho$. Возвращаясь к области $D$ с помощью преобразования $z=\varphi^{-1}(w)$, получим представление $u(z_0)$ через интеграл вдоль кривой $\Gamma_\rho$, соответствующей окружности $|\,w\,|=\rho$ (см. Рис. 14):

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho} u(t)\,\frac{|\,\varphi'(t)\,|}{|\,\varphi(t)\,|}\,ds, \tag{5.8}$$

где $ds$ — элемент длины дуги кривой $\Gamma_\rho$.

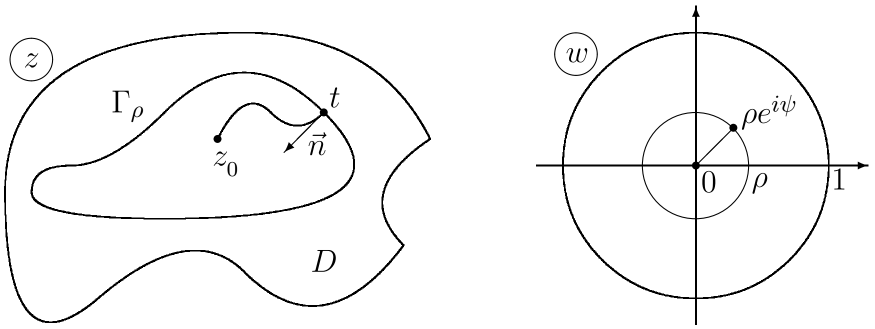

Рис. 14

Преобразуем выражение $\dfrac{|\,\varphi'(t)\,|}{|\,\varphi(t)\,|}$, для чего рассмотрим элемент $dn$ длины линии, проходящей через точку $t\in\Gamma_\rho$ и являющейся прообразом радиуса круга $|\,w\,| \le \rho$ при отображении $w=\varphi(z)$. В силу конформности этого отображения элемент $dn$ направлен по нормали к кривой $\Gamma_\rho$. Будем считать, что направление элемента $dn$ совпадает с направлением внутренней нормали кривой $\Gamma_\rho$. Тогда $-d\rho = |\,\varphi'(t)\,|\,dn$, поскольку $d\rho<0$, а $\rho=|\,\varphi(t)\,|$, поэтому

$$\frac{|\,\varphi'(t)\,|\,dn}{|\,\varphi(t)\,|} = -\frac{d\rho}{\rho} = d\log\frac{1}{\rho} = d\log\frac{1}{|\,\varphi(t)\,|}\,,$$

откуда
$$\frac{|\,\varphi'(t)\,|}{|\,\varphi(t)\,|}=\frac{\partial\log\dfrac{1}{|\,\varphi(t)\,|}}{\partial n}=\frac{\partial\log\dfrac{1}{|\,f(t,z_0)\,|}}{\partial n}\,,$$
где символ $\dfrac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по направлению внутренней нормали. Таким образом, формула (5.8) может быть записана в виде
$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho}u(t)\,\frac{\partial\log\dfrac{1}{|\,f(t,z_0)\,|}}{\partial n}\,ds\,. \tag{5.9}$$

Отметим некоторые свойства функции $G(z,z_0)=\log\dfrac{1}{|\,f(z,z_0)\,|}$, которая называется функцией Грина области $D$:

а) функция $G(z,z_0)$ гармонична в области $D\setminus\{z_0\}$, поскольку
$$G(z,z_0)=\Re e\log\frac{1}{f(z,z_0)}$$
и поэтому
$$\frac{\partial^2G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2G}{\partial y^2}=0\quad\text{при}\quad z\neq z_0\,;$$

б) $G(z,z_0)>0$ при $z\in D\setminus\{z_0\}$ и $G(z,z_0)\to 0$ при $z\to t\in\Gamma$, $\Gamma=\partial D$;

в) $G(z_0,z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}G(z,z_0)=\infty$.

Можно также показать, что $G(z,z_0)=G(z_0,z)$.

Заметим без доказательства, что если $\Gamma:\ z=z(s),\ 0\le s\le L,$ — замкнутая гладкая кривая Жордана длины $L$ и производная $z'(s)$ удовлетворяет условию Гельдера, то функция $f(z,z_0)$ обладает в замкнутой области $\overline{D}$ производной $f'(z,z_0)$, тоже удовлетворяющей условию Гельдера.

В этом случае, имея гармоническую в $D$ и непрерывую в $\overline{D}$ функцию $u(z)$, мы получим формулу (5.9) и для случая $\rho=1$, $\Gamma_\rho=\Gamma$, т. е.
$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}u(t)\,\frac{\partial G(t,z_0)}{\partial n}\,ds\,. \tag{5.10}$$
Если на такой кривой $\Gamma$ наперед задана произвольная непрерывная функция $g(t)$, то доказано, что формула (5.10), в которой вместо $u(t)$ стоит $g(t)$, дает решение соответствующей задачи Дирихле.

**3. Существование и единственность решения задачи Дирихле для односвязной жордановой области.** Пусть $D$ — произвольная односвязная область комплексной плоскости $z$, ограниченная замкнутой кривой Жордана $\Gamma$, и $g(t)$ — заданная на $\Gamma$ произвольная непрерывная функция. Если функция $w=\varphi(z)$ конформно отображает область $D$ на круг $|\,w\,|<1$, то, как было отмечено выше, она устанавливает взаимно однозначное и непрерывное соответствие между $\overline{D}$ и замкнутым кругом $|\,w\,|\leq 1$, поэтому функция $g^*(\tau)=g\,[\,\varphi^{-1}(\tau)\,]$ будет непрерывной на окружности $|\,\tau\,|=1$.

Построим гармоническую в круге $|\,w\,|<1$ и непрерывную в замкнутом круге $|\,w\,|\leq 1$ функцию $u^*(w)$, принимающую на окружности $|\,\tau\,|=1$ значения $g^*(\tau)$ (например, по формуле Пуассона). Тогда функция $u(z)= = u^*[\,\varphi(z)\,]$ будет гармонической в области $D$ (см. свойство $4^0$ п. 6.1), непрерывной в замкнутой области $\overline{D}$, в силу непрерывности $\varphi(z)$ в $\overline{D}$, и принимать значения $g(t)$ на $\Gamma$, так как $u(t) = u^*[\,\varphi(t)\,] = u^*(\tau) = = g^*(\tau)=g\,[\,\varphi^{-1}(\tau)\,]=g(t)$.

Таким образом, мы доказали, что для произвольной односвязной области комплексной плоскости с жордановой границей решение задачи Дирихле существует. Докажем его единственность.

Пусть существуют два решения $u_1(z)$ и $u_2(z)$ задачи Дирихле для области $D$, принимающие одни и те же непрерывные значения $g(t)$ на ее границе $\Gamma$. Тогда функция $u(z)=u_1(z)-u_2(z)$, очевидно, гармонична в $D$, непрерывна в $\overline{D}$ и $u(t)=0$ при $t\in\Gamma$. Из принципа экстремума для гармонических функций следует, что $u(z)=0$, $z\in D$, т. е. $u_1(z)\equiv \equiv u_2(z)$, $z\in D$.

**4. Построение конформного отображения области на круг с помощью решения задачи Дирихле.** Выше мы видели, что, зная конформное отображение односвязной жордановой области $D$ на круг, с помощью формулы Пуассона, а в случае достаточно гладкой границы $\Gamma$ с помощью функции Грина, выражающейся через отображающую область $D$ на единичный круг функцию, — можно построить решение задачи Дирихле для этой области. Оказывается, что и обратно, зная решение некоторой задачи Дирихле для области $D$, можно построить функцию, конформно отображающую $D$ на единичный круг.

Для доказательства этого сначала заметим, что если функция $w = f(z,z_0) = \varphi(z)$, $f(z_0,z_0) = \varphi(z_0) = 0$, $z_0 \in D$, конформно отображает односвязную область $D$ с жордановой границей $\Gamma$ на единичный круг $|\,w\,| < 1$, то функция

$$\psi(z) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}, & z \in D \setminus \{z_0\}, \\ \varphi'(z_0), & z = z_0, \end{cases}$$

аналитична в $D$, непрерывна в $\overline{D}$ и не обращается в нуль в $\overline{D}$ $(\psi(z_0) = \varphi'(z_0) \neq 0$ в силу однолистности $\varphi(z))$, поэтому ввиду односвязности области $D$ по теореме монодромии любая ветвь $\log\psi(z)$ многозначной функции $\mathrm{Log}\,\psi(z)$ тоже аналитична в $D$ и непрерывна в $\overline{D}$, а ее действительная часть $\log|\,\psi(z)\,|$ гармонична в $D$ и непрерывна в $\overline{D}$, причем на границе $\Gamma$ имеем

$$\log|\,\psi(t)\,| = \log\left|\,\frac{\varphi(t)}{t-z_0}\,\right| = \log\frac{1}{|\,t-z_0\,|}\,, \tag{5.11}$$

так как $|\,\varphi(t)\,| = 1$ при $t \in \Gamma$.

Пусть теперь $g(z)$ — решение задачи Дирихле для области $D$, принимающее на границе $\Gamma$ значения $g(t)$, определенные по формуле

$$g(t) = \log\frac{1}{|\,t-z_0\,|}\,.$$

В силу (5.11) и единственности решения задачи Дирихле $g(z) = \log|\psi(z)|$. Если теперь $h(z)$ — гармонически сопряженная с $g(z)$ в области $D$ функция, то функция

$$f(z,z_0) = (z-z_0)\,e^{g(z)+ih(z)}$$

будет конформно отображать область $D$ на единичный круг, причем $f(z_0,z_0) = 0$.

Поскольку функция $h(z)$ восстанавливается по данной функции $g(z)$ с точностью до действительной постоянной $h_0$, то $f(z,z_0)$ определяется с точностью до множителя $e^{ih_0}$, что согласуется с принятыми условиями нормировки.

## 5.3. Задача Неймана

**1.** Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Если функция $u(z)$ гармонична в односвязной области $D$ с гладкой границей $\Gamma$ и непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка в $\overline{D}$, то*

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0, \tag{5.12}$$

*где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ обозначает дифференцирование в направлении внешней нормали к $\Gamma$, а $ds$ — элемент длины дуги кривой $\Gamma$.*

**Доказательство.** Обозначив через $s$ направление касательной к $\Gamma$ в точке $t$ (см. Рис. 15), получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds &= \int\limits_{\Gamma} \Big[\, \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n,x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n,y) \Big]\, ds = \\ &= \int\limits_{\Gamma} \Big[\, \frac{\partial u}{\partial x} \cos(s,y) - \frac{\partial u}{\partial y} \cos(s,x) \Big]\, ds = \int\limits_{\Gamma} -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy.\end{aligned} \tag{5.13}$$

В односвязной области $D$ можно построить однозначную функцию $v(z)$, гармонически сопряженную с $u(z)$, с непрерывными в $\overline{D}$ частными производными

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

поэтому под знаком последнего интеграла стоит полный дифференциал

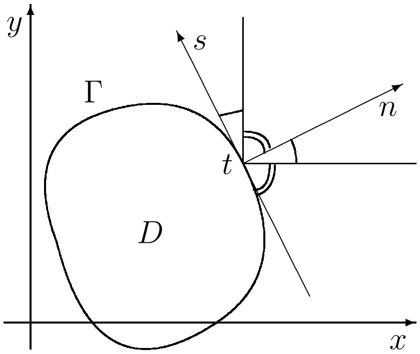

Рис. 15

$$\frac{\partial v}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy = dv,$$

в силу чего

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int\limits_{\Gamma} dv = 0.$$

**Задача Неймана** (вторая краевая задача): *найти гармоническую в односвязной области* $D$ *с гладкой границей* $\Gamma$ *и непрерывную вместе с частными производными первого порядка в* $\overline{D}$ *функцию* $u(z)$, *производная которой в направлении внешней нормали к* $\Gamma$ *принимает на* $\Gamma$ *заданные непрерывные значения* $g(t)$, *т. е.*

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = g(t). \tag{5.14}$$

Из доказанной выше теоремы следует, что *для разрешимости задачи Неймана необходимо выполнение условия*

$$\int\limits_{\Gamma} g(t)\, ds = 0.$$

Если $u_1(z)$ и $u_2(z)$ — два решения задачи Неймана, нормальные производные которых принимают на $\Gamma$ одинаковые значения $g(t)$, то функция $u(z)=u_1(z)-u_2(z)$, очевидно, будет решением задачи Неймана, удовлетворяющим на $\Gamma$ условию $\dfrac{\partial u}{\partial n}=0$. Поэтому в силу (5.13) и формулы Грина получим

$$\int\limits_{\Gamma} u\frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int\limits_{\Gamma} -u\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + u\frac{\partial u}{\partial x}\, dy = \iint\limits_{D}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(u\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(u\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big]dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D}\Big[u\Delta u + \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big]\, dxdy = 0,$$

откуда следует, что всюду в области $D$ имеем $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, т. е. $u(z)\equiv \text{const}$.

Таким образом, *решение задачи Неймана определяется с точностью до аддитивной постоянной.*

Докажем теперь, что *решение задачи Неймана можно свести к решению задачи Дирихле для гармонически сопряженной с* $u$ *функции* $v$. Для этого заметим, что в силу условий Коши – Римана и (5.14) подынтегральное выражение третьего интеграла из (5.13) равно

$$\frac{\partial v}{\partial s}\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = g(t).$$

Зная $\dfrac{\partial v}{\partial s}$ на $\Gamma$, с помощью интегрирования вдоль дуги $\overset{\frown}{t_0 t} \subset \Gamma$, находим

$$v(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial v}{\partial s}\, ds + C_0 = \int\limits_{t_0}^{t} g(t)\, ds + C_0.$$

Здесь $t_0$ — произвольная фиксированная точка кривой $\Gamma$, а $C_0$ — произвольная действительная постоянная. Решая теперь задачу Дирихле, в области $D$ получим функцию $v(z)$, принимающую на $\Gamma$ найденные значения $v(t)$, а затем и $u(z)$ по формуле

$$u(z) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial y}\, dx - \frac{\partial v}{\partial x}\, dy + C,$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$ — произвольная фиксированная точка области $D$, а $C$ — произвольная действительная постоянная.

**2. Формула Дини.** Пусть $u(z)$ — гармоническая в круге $|\,z\,| < 1$ и непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутом круге $|\,z\,| \leq 1$ функция и

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = g(t), \tag{5.15}$$

где $z = re^{i\psi}$, а функция $g(t)$ непрерывна на окружности $\Gamma : |\,t\,| = 1$.

Если $f(z)$ — аналитическая в круге $|\,z\,| < 1$ функция, для которой $\Re e f(z) = u(z)$, то

$$f'(z) = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{f(z + \Delta r e^{i\psi}) - f(z)}{\Delta r e^{i\psi}} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{f[(r + \Delta r)e^{i\psi}] - f(re^{i\psi})}{\Delta r e^{i\psi}} =$$

$$= \frac{1}{e^{i\psi}} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{e^{i\psi}} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

или

$$\frac{z}{r} f'(z) = \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r},$$

и, следовательно, в силу (6.15) имеем

$$\Re e\Big[\,\frac{zf'(z)}{r}\,\Big]_{r=1} = \Re e\,[\,zf'(z)\,]_{r=1} = \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = g(t).$$

Отсюда, учитывая, что $zf'(z) = 0$ при $z = 0$, в силу равенства (2.65), полученного при выводе интегральной формулы Шварца, получим

$$zf'(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(t)\,dt}{t-z}\,,$$

где $\Gamma$ — единичная окружность. Деление этого равенства на $z$ и интегрирование дает для $f(z)$ выражение

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int\frac{dz}{z}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(t)\,dt}{t-z}\,.$$

Меняя здесь порядок интегрирования и принимая во внимание, что

$$\int\frac{dz}{z(t-z)} = \frac{1}{t}\log z - \frac{1}{t}\log\,(t-z) + C',$$

находим

$$f(z) = \frac{\log z}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} g(t)\frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} g(t)\log(t-z)\frac{dt}{t} + C''.$$

Поскольку для $t \in \Gamma$ имеем $t = e^{i\varphi}$, $\frac{dt}{t} = id\varphi = ids$, то в силу (5.12) и (5.15) отсюда получим

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} g(e^{i\varphi})\log\,(e^{i\varphi} - z)\,d\varphi + C''.$$

Отделение действительных частей в этом равенстве дает искомую формулу Дини:

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} g(e^{i\varphi})\log|\,e^{i\varphi} - z\,|\,d\varphi + C.$$

Можно показать, что формула Дини, в которой в качестве $g(t)$ взята произвольная непрерывная на единичной окружности $\Gamma$ функция, дает решение соответствующей задачи Неймана для единичного круга.

В заключение отметим еще некоторые краевые задачи для гармонических функций.

Пусть на гладкой границе $\Gamma$ односвязной области $D$ заданы непрерывный вектор $l$ и непрерывные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ $(|\,\alpha\,|+|\,\beta\,|>0)$ и $g(t)$. Требуется найти гармоническую в $D$ и непрерывную вместе с частными производными первого порядка в $\overline{D}$ функцию $u(z)$, удовлетворяющую условию

$$\left[\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial l}+\beta(t)u\right]_{\Gamma}=g(t).$$

Когда $\alpha>0$, а направление вектора $l$ ни в одной точке кривой $\Gamma$ не совпадает с направлением касательной к $\Gamma$, то мы имеем задачу с косой производной (третью краевую задачу), если же $\alpha=0$ на части границы $\Gamma$, то — смешанную задачу.

В частности, когда $\alpha=1$, $\beta=0$, а направление вектора $l$ совпадает с направлением внешней нормали к $\Gamma$, мы имеем задачу Неймана, а при $\alpha=0$, $\beta=1$ — задачу Дирихле.

## 5.4. Задачи сопряжения

**1. Кусочно-аналитическая функция.** Пусть функции $\Phi^{+}(z)$ и $\Phi^{-}(z)$ аналитичны соответственно во внутренней и внешней областях $D^{+}$ и $D^{-}$, на которые комплексная плоскость $z$ разбита гладкой замкнутой кривой Жордана $\Gamma$. Если существуют непрерывные пределы $\Phi^{+}(t)$ и $\Phi^{-}(t)$ на $\Gamma$, то функция

$$\Phi(z)=\begin{cases}\Phi^{+}(z), & z\in D^{+},\\ \Phi^{-}(z), & z\in D^{-},\end{cases}$$

называется кусочно-аналитической функцией с границей $\Gamma$.

Если разложение функции $\Phi(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\Phi(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{k}z^{k}$$

содержит лишь конечное число членов с положительными степенями $z$, то будем говорить, что функция $\Phi(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности.

Если $n$ — наибольший индекс отличных от нуля коэффициентов $c_k$, т.е. $c_n \neq 0$, $c_k = 0$ для $k > n$ (случай $c_k = 0$ при всех $k$ исключается), то говорят, что функция $\Phi(z)$ имеет на бесконечности порядок $n$.

**2. Нахождение кусочно-аналитической функции по заданному скачку.** Пусть требуется найти кусочно-аналитическую функцию $\Phi(z)$ с границей $\Gamma$, исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую граничному условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \tag{5.16}$$

где $\varphi(t)$ — заданная на гладкой замкнутой кривой $\Gamma$ функция класса $H$.

Решение этой задачи, и притом единственное, дает интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}\,. \tag{5.17}$$

В силу формулы скачка (2.98) функция $\Phi(z)$ удовлетворяет граничному условию (5.16), а согласно доказанному ранее свойству интеграла типа Коши (см. раздел 2.3) имеем также $\Phi(\infty) = 0$.

Пусть теперь $\Phi_1(z)$ — другое решение этой задачи. Тогда функция

$$\Psi(z) = \Phi_1(z) - \Phi(z)$$

удовлетворяет на $\Gamma$ условию

$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = 0,$$

и в силу принципа непрерывности она аналитична на всей комплексной плоскости, а поскольку $\Psi(\infty) = 0$, то по теореме Лиувилля $\Psi(z) \equiv 0$, $z \in \mathbb{C}$, т.е. $\Phi_1(z) \equiv \Phi(z)$.

Заметим, что если условие $\Phi(\infty) = 0$ заменить более общим требованием, чтобы функция $\Phi(z)$ на бесконечности имела порядок не выше целого числа $n \geq -1$, то общее решение задачи дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} + P_n(z),$$

где $P_n(z)$ — произвольный полином степени не выше $n$ (при $n=-1$ надо положить $P_n(z)\equiv 0$).

В самом деле, тогда разность $\Psi(z)$ двух решений этой задачи аналитична на всей комплексной плоскости, а бесконечно удаленная точка является для нее полюсом порядка не выше $n$ при $n>0$ и устранимой особой точкой при $n=0,-1$. Следовательно, как было показано в п. 4.1, функция $\Psi(z)$ является соответственно полиномом степени не выше $n$ или постоянной (равной нулю при $n=-1$).

Наконец, если потребовать, чтобы искомая функция $\Phi(z)$ на бесконечности имела порядок не выше $n<-1$, т. е. чтобы на бесконечности она имела нуль порядка не ниже $-n>1$, то в этом случае, очевидно, единственным решением задачи будет функция (5.17), в лорановском разложении которой в окрестности бесконечно удаленной точки коэффициенты $c_{-1}=c_{-2}=\ldots=c_{n+1}=0$. Поскольку при достаточно больших $z$ имеем

$$\frac{1}{t-z}=-\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\dfrac{t}{z}}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{z^k}\,,$$

то

$$\Phi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{-k}}{z^k}\,, \tag{5.18}$$

где

$$c_{-k}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}t^{k-1}\,\varphi(t)\,dt,\quad k=1,\,2,\,\ldots\,. \tag{5.19}$$

Таким образом, в силу (5.18), (5.19) решение задачи существует лишь при выполнении условий

$$\int\limits_{\Gamma}t^{k-1}\,\varphi(t)\,dt=0,\quad k=1,\,2,\,\ldots,-n-1, \tag{5.20}$$

и дается формулой (5.17).

**3. Задачи сопряжения** заключаются в том, чтобы *найти кусочно-аналитическую функцию $\Phi(z)$ с границей $\Gamma$, имеющую конечный порядок на бесконечности и удовлетворяющую граничному условию*

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t),\quad t\in\Gamma, \tag{5.21}$$

*или*

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t)+g(t),\quad t\in\Gamma, \tag{5.22}$$

*где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на $\Gamma$ функции класса $H$, причем $G(t)\neq 0$, $t\in\Gamma$.*

Задача сопряжения с граничным условием (5.21) называется однородной, а с условием (5.22) — неоднородной.

Индексом функции $G(t)\neq 0,\ t\in\Gamma,$ назывется целое число

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}\big[\arg G(t)\big]_{\Gamma}=\frac{1}{2\pi i}\big[\log G(t)\big]_{\Gamma}, \tag{5.23}$$

где символ $[\ ]_{\Gamma}$ обозначает приращение стоящего в скобках выражения при обходе точкой $t$ кривой $\Gamma$ в положительном направлении.

Для задачи сопряжения число $\varkappa$ называется индексом задачи.

**I. Однородная задача сопряжения.** Мы покажем, что общее решение этой задачи сводится к нахождению некоторого частного, так называемого канонического решения, характеризующегося тем, что оно *нигде на комплексной плоскости не обращается в нуль* (вместе со своими предельными значениями на $\Gamma$).

Логарифмируя (5.21), ввиду очевидного равенства

$$\log\,\Phi^{\pm}(t)=\big[\log\Phi\big]^{\pm}(t)$$

получим соотношение

$$\big[\log\Phi\big]^{+}(t)-\big[\log\Phi\big]^{-}(t)=\log G(t),$$

которое, как равенство (5.16) в п. 2, дало бы возможность найти кусочно-аналитическую функцию $\log\Phi(z)$, если бы принадлежала классу $H$, а значит, была однозначной и непрерывной на $\Gamma$ функция $\log G(t)$. Но последнее, как видно из (5.23), возможно только при $\varkappa=0$.

В общем же случае введем новую функцию

$$G_0(t)=(t-a)^{-\varkappa}\,G(t), \tag{5.24}$$

где $a$ — произвольная фиксированная точка области $D^{+}$, индекс которой равен нулю, и новую искомую кусочно-аналитическую функцию

$$\Psi(z)=\begin{cases}\Phi(z), & z\in D^{+},\\ (z-a)^{\varkappa}\Phi(z), & z\in D^{-},\end{cases} \tag{5.25}$$

для которой условие (6.21) принимает вид

$$\Psi^{+}(t)=G_0(t)\Psi^{-}(t),\quad t\in\Gamma. \tag{5.26}$$

Из (5.24) ясно, что $G_0(t)\in H$, а выбрав какое-нибудь значение функции $\log G_0(t)$ в некоторой точке кривой $\Gamma$ и потребовав, чтобы эта функция изменялась на $\Gamma$ непрерывно, мы получим вполне определенную однозначную на $\Gamma$ функцию, которая, как легко видеть, тоже будет принадлежать классу $H$.

Действуя пока чисто формально, из (5.26) получим

$$\log\Psi^+(t) - \log\Psi^-(t) = \log G_0(t).$$

Поэтому, считая, что $\log\Psi(z)$ — однозначная кусочно-аналитическая функция, исчезающая на бесконечности, на основании изложенного в п. 2 будем иметь

$$\log\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\log G_0(t)\,dt}{t-z}\,.$$

Непосредственная проверка показывает, что функция

$$\Psi(z) = e^{\theta\,(z)}, \tag{5.27}$$

где

$$\theta(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\log G_0(t)\,dt}{t-z}\,, \quad \theta(\infty) = 0, \tag{5.28}$$

является решением однородной задачи сопряжения с граничным условием (5.26). В самом деле, из (5.28) имеем

$$\theta^+(t) - \theta^-(t) = \log G_0(t),$$

откуда в силу (5.27) получаем

$$\frac{\Psi^+(t)}{\Psi^-(t)} = e^{\log G_0(t)} = G_0(t).$$

Ясно также, что функция $\Psi(z)$ всюду отлична от нуля и $\Psi(\infty) = 1$.

На основании (5.25) и (5.27) легко убедиться, что функция

$$\chi(z) = \begin{cases} e^{\theta\,(z)}, & z\in D^+, \\ (z-a)^{-\varkappa}e^{\theta\,(z)}, & z\in D^-, \end{cases} \tag{5.29}$$

является частным решением исходной однородной задачи сопряжения. Очевидно также, что функция $\chi(z)$ нигде на комплексной плоскости не обращается в нуль, а следовательно, и есть искомое каноническое решение задачи.

Заметим, что $\chi(z)$ имеет на бесконечности порядок $-\varkappa$, граничные значения $\chi^+(t)$ и $\chi^-(t)$ принадлежат классу $H$ и

$$\chi^+(t) \neq 0, \quad \chi^-(t) \neq 0, \quad t\in\Gamma. \tag{5.30}$$

Функция $\chi(z)$ не зависит от выбора ветви функции $\log G_0(t)$ на $\Gamma$, поскольку всякая другая ветвь отличается от выбранной слагаемым

$2k\pi i$, где $k$ — целое число, а в силу (5.28) функция $\theta(z)$ изменится тогда на слагаемое вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{2k\pi i\,dt}{t-z}=\begin{cases}2k\pi i, & z\in D^+,\\ 0, & z\in D^-,\end{cases}$$

и следовательно, функция $e^{\theta(z)}$, а вместе с ней и $\chi(z)$ останется неизменной.

Покажем теперь, что *все решения однородной задачи сопряжения даются формулой*

$$\Phi(z)=\chi(z)P(z), \tag{5.31}$$

*где $P(z)$ — произвольный полином.*

В самом деле, если $\Phi(z)$ — какое-нибудь решение этой задачи, то из (5.21) и равенства $\chi^+(t)=G(t)\chi^-(t)$ с учетом (5.30) получим соотношение

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{\chi^-(t)}\,,$$

из которого, в силу принципа непрерывности, следует, что функция $\dfrac{\Phi(z)}{\chi(z)}$ аналитична на всей комплексной плоскости. Но поскольку она имеет конечный порядок на бесконечности, то представляет собой полином, что и требовалось доказать.

Из (5.31) следует, что *все канонические решения получаются умножением одного из них на произвольльную* (отличную от нуля) *постоянную.*

Действительно, для того чтобы решение $\Phi(z)$ было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы в формуле (5.31) полином $P(z)$ сводился к постоянной, так как в противном случае функция $\Phi(z)$ не может быть отличной от нуля на всей комплексной плоскости.

Покажем также, что *функция $\chi(z)$ не зависит от положения точки $a\in D^+$.* Действительно, поскольку каноническое решение определено с точностью до постоянного множителя, то оно единственным образом определяется, например, требованием, чтобы

$$\lim_{z\to\infty} z^{\varkappa}\,\chi(z)=1.$$

Следовательно, если при построении функции (5.29), удовлетворяющей этому условию, вместо $a$ возьмем любую другую точку $b\in D^+$, то получим ту же самую функцию $\chi(z)$.

Этот факт можно также установить непосредственным вычислением.

Пусть теперь ищется решение однородной задачи сопряжения $\Phi(z)$, исчезающее на бесконечности.

Если $\varkappa \leq 0$, то таких решений не существует (кроме тривиального: $\Phi(z) \equiv 0$), поскольку, как видно из (5.29), тогда $\chi(\infty) \neq 0$, а в силу(5.31) и $\Phi(\infty) \neq 0$ ни при каком полиноме $P(z)$.

Если $\varkappa > 0$, то задача имеет ровно $\varkappa$ линейно независимых решений

$$\chi(z),\ z\chi(z),\ \ldots,\ z^{\varkappa-1}\chi(z),$$

а все решения задачи даются формулой

$$\Phi(z) = \chi(z)\, P_{\varkappa-1}(z),$$

где $P_{\varkappa-1}(z)$, — произвольный полином степени не выше $\varkappa - 1$. Это следует из формулы (5.31) в силу того, что функция $\chi(z)$ имеет на бесконечности порядок $-\varkappa$.

Аналогично, решений однородной задачи сопряжения, ограниченных на бесконечности, при $\varkappa < 0$ не существует, а при $\varkappa \geq 0$ существует $\varkappa + 1$ линейно независимое решение

$$\chi(z),\ z\chi(z),\ \ldots,\ z^{\varkappa}\chi(z),$$

причем общее решение имеет вид

$$\Phi(z) = \chi(z) P_{\varkappa}(z).$$

Однородные задачи сопряжения, соответствующие граничным условиям (5.21) и

$$\Psi^{+}(t) = [\, G(t)\, ]^{-1} \Psi^{-}(t), \quad t \in \Gamma, \tag{5.32}$$

будем называть союзными.

Из вышесказнного непосредственно вытекает, что индексы союзных задач сопряжения отличаются только знаком и что если $\chi(z)$ — каноническое решение задачи (5.21), то $[\, \chi(z)\, ]^{-1}$ будет каноническим решением союзной с ней задачи (5.32).

В частности, если индекс $\varkappa$ задачи (5.21) отрицателен, то союзная с ней задача имеет ровно $-\varkappa$ линейно независимых решений, исчезающих на бесконечности:

$$\frac{1}{\chi(z)},\ \frac{z}{\chi(z)},\ \ldots,\ \frac{z^{-\varkappa-1}}{\chi(z)}.$$

**II. Неоднородная задача сопряжения.** Пусть $\chi(z)$ — каноническое решение однородной задачи сопряжения. Тогда из равенства $\chi^{+}(t) = G(t)\chi^{-}(t)$ находим

$$G(t) = \frac{\chi^{+}(t)}{\chi^{-}(t)},$$

и граничное условие (5.22) принимает вид

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{\chi^{+}(t)} - \frac{\Phi^{-}(t)}{\chi^{-}(t)} = \frac{g(t)}{\chi^{+}(t)}.$$

Функция $\dfrac{\Phi(z)}{\chi(z)}$ имеет конечный порядок на бесконечности, поэтому в силу сказанного в п. 2 получим

$$\frac{\Phi(z)}{\chi(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{g(t)\,dt}{\chi^{+}(t)(t-z)} + P(z),$$

где $P(z)$ — произвольный полином, откуда

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{g(t)\,dt}{\chi^{+}(t)(t-z)} + \chi(z)P(z). \tag{5.33}$$

Это и есть общее решение неоднородной задачи сопряжения.

В приложениях важную роль играют решения неоднородной задачи сопряжения, исчезающие на бесконечности. Так как порядок канонического решения $\chi(z)$ однородной задачи сопряжения равен $-\varkappa$, то при $\varkappa\geq 0$ решение (5.33) исчезает на бесконечности тогда и только тогда, когда $P(z)$ является полиномом степени не выше $\varkappa-1$, причем при $\varkappa=0$ надо считать $P(z)\equiv 0$. При $\varkappa<0$ надо, очевидно, взять $P(z)\equiv 0$ и, кроме того, потребовать, чтобы коэффициенты при $z^{-1}$, $z^{-2}$, $\ldots$, $z^{\varkappa}$ в разложении

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{g(t)\,dt}{\chi^{+}(t)(t-z)} = -z^{-1}\int\limits_{\Gamma} \frac{g(t)\,dt}{\chi^{+}(t)} - z^{-2}\int\limits_{\Gamma} \frac{tg(t)\,dt}{\chi^{+}(t)} - \ldots$$

были равны нулю. Таким образом, приходим к следующему результату.

Если $\varkappa\geq 0$, общее решение неоднородной задачи сопряжения (5.22), исчезающее на бесконечности, дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{g(t)\,dt}{\chi^{+}(t)(t-z)} + \chi(z)P_{\varkappa-1}(z), \tag{5.34}$$

где $P_{\varkappa-1}(z)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa-1$ (при $\varkappa=0$ надо положить $P_{\varkappa-1}(z)\equiv 0$).

Если $\varkappa<0$, то при соблюдении условий

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{t^{k-1}\,g(t)\,dt}{\chi^{+}(t)} = 0, \quad k=1,\, 2,\, \ldots,\, -\varkappa, \tag{5.35}$$

необходимых и достаточных для существования решения, исчезающего на бесконечности, это решение дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(t)\,dt}{\chi^+(t)(t-z)}\,. \tag{5.36}$$

Аналогично, относительно решений неоднородной задачи сопряжения, ограниченных на бесконечности, получим следующий результат. При $\varkappa \geq -1$ общее решение задачи дается формулой (5.34), в которой вместо $P_{\varkappa-1}(z)$ надо взять $P_{\varkappa}(z)$, считая $P_{\varkappa}(z) \equiv 0$ при $\varkappa = -1$. При $\varkappa < -1$ ограниченное решение существует лишь при соблюдении условий (5.35), где $k = 1, 2, \ldots, -\varkappa - 1$, и дается формулой (5.36).

## 5.5. Задача Римана – Гильберта

Эта задача состоит в следующем. Пусть $D^+$ — область, ограниченная гладкой замкнутой кривой $\Gamma$.

Требуется найти аналитическую в $D^+$ и непрерывную в $\overline{D^+}$ функцию $\Phi(z) = u + iv$, удовлетворяющую на $\Gamma$ условию

$$\Re e\,[\,(a+ib)\,\Phi^+(t)\,] = au^+ - bv^+ = c, \tag{5.37}$$

где $a, b, c$ — заданные на $\Gamma$ действительные непрерывные функции.

С помощью конформного отображения задача сводится к случаю, когда область $D^+$ является единичным кругом, поэтому мы приведем здесь решение задачи Римана – Гильберта для круга $|z|<1$ в предположении, что функции $a, b, c \in H$ на окружности $\Gamma : |\,t\,| = 1$ и

$$a^2 + b^2 \neq 0. \tag{5.38}$$

Запишем граничное условие (5.37) в виде

$$(a+ib)\,\Phi^+(t) + (a-ib)\,\overline{\Phi^+(t)} = 2c. \tag{5.39}$$

Положим теперь

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi\Big(\frac{1}{\overline{z}}\Big)}$$

и построим кусочно-аналитическую функцию

$$F(z)=\begin{cases}\Phi(z), & |\,z\,|<1,\\ \Phi_*(z), & |\,z\,|>1.\end{cases} \tag{5.40}$$

Очевидно, функция $F(z)$ ограничена на бесконечности. Кроме того, учитывая, что $\big(\Phi_*\big)_*(z)=\Phi(z)$, $\left|\dfrac{1}{\bar z}\right|<1$ при $|\,z\,|>1$ и $\dfrac{1}{\bar t}=t$ при $|\,t\,|=1$, получим следующие свойства этой функции:

$$F_*(z)=F(z),\ |\,z\,|\neq 1, \tag{5.41}$$

$$F^+(t)=\Phi^+(t),\quad F^-(t)=\overline{\Phi^+\Big(\frac{1}{\bar t}\Big)}=\overline{\Phi^+(t)}. \tag{5.42}$$

В силу (5.42) и (5.38) граничное условие (5.39) можно записать в виде

$$F^+(t)=G(t)F^-(t)+g(t), \tag{5.43}$$

где функции

$$G(t)=-\frac{a-ib}{a+ib}\,,\quad g(t)=\frac{2c}{a+ib}\,,$$

очевидно, принадлежат классу $H$ и $G(t)\neq 0$ на $\Gamma$.

Таким образом, задача Римана – Гильберта сводится к неоднородной задаче сопряжения, решения которой должны быть ограниченными на бесконечности.

Однако не любое решение $F(z)$ задачи сопряжения (5.43), рассмотренное в замкнутом круге $|\,z\,|\le 1$, дает решение задачи Римана – Гильберта, так как $F(z)$, вообще говоря, не удовлетворяет условию (5.41), в результате чего $F^-(t)\neq\overline{F^+(t)}$ и из (5.43) не следует (5.39).

Тем не менее при помощи функции $F(z)$ всегда можно построить и решение исходной задачи. Для этого покажем, что наряду с $F(z)$ решением задачи сопряжения (5.43) является также функция $F_*(z)$. Действительно, переходя в (5.43) к сопряженным величинам и используя легко проверяемые равенства

$$F_*^+(t)=\overline{F^-(t)},\quad F_*^-(t)=\overline{F^+(t)},$$

$$\frac{1}{\overline{G(t)}}=G(t),\quad \frac{\overline{g(t)}}{\overline{G(t)}}=-g(t),$$

получим

$$F_*^+(t) = G(t)F_*^-(t) + g(t).$$

Отсюда следует, что функция

$$\Omega(z) = \frac{1}{2}\,[\,F(z) + F_*(z)\,],$$

уже удовлетворяющая условию (5.41), тоже является решением задачи сопряжения (5.43) и, рассмотренная в круге $|\,z\,| \le 1$, дает решение задачи Римана – Гильберта. Обратно, всякое решение задачи Римана – Гильберта для круга $|\,z\,| < 1$ может быть получено таким образом. В самом деле, всякое решение $\Phi(z)$ этой задачи, дополненное до кусочно-аналитической функции $F(z)$ по формуле (5.40), является решением задачи сопряжения (5.43), причем

$$F(z) = F_*(z) = \frac{1}{2}\,[\,F(z) + F_*(z)\,].$$

Так как мы умеем находить общее решение неоднородной задачи сопряжения, ограниченное на бесконечности, то можем найти и всю совокупность решений задачи Римана – Гильберта, однако на этом останавливаться не будем.

## 5.6. Сингулярные интегральные уравнения

**1. Основные понятия.** Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$\alpha(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{K(t_0,\,t)\,\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0)\,, \tag{5.44}$$

где $\Gamma$ — замкнутая гладкая кривая Жордана, а $\alpha(t_0)$, $f(t_0)$, $K(t_0,\,t)$ — заданные на $\Gamma$ функции класса $H$, причем $K(t_0,\,t)$ — по обоим переменным. Искомая функция $\varphi(t)$ также должна принадлежать классу $H$.

Из результатов п. 3 раздела 2.12 непосредственно следует, что определяемый левой частью уравнения (5.44) *сингулярный оператор переводит всякую функцию класса $H$ в новую функцию класса $H$.*

Представим уравнение (5.44) в виде

$$\alpha(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{\beta(t_0)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} k(t_0,\,t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0), \tag{5.45}$$

где
$$\beta(t_0) = K(t_0,\, t_0), \quad k(t_0,\, t) = \frac{K(t_0,\, t) - K(t_0,\, t_0)}{t - t_0}\,.$$

Уравнение вида (5.45), в котором функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ удовлетворяют условию
$$[\,\alpha(t)\,]^2 - [\,\beta(t)\,]^2 \neq 0, \quad t \in \Gamma,$$

называется полным сингулярным уравнением нормального типа.

Запишем теперь уравнение (5.45) в виде
$$K\varphi \equiv K^0\varphi + T\varphi = f, \tag{5.46}$$
где
$$K^0\varphi = \alpha(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{\beta(t_0)}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0}\,,$$
$$T\varphi = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma k(t_0,\, t)\,\varphi(t)\,dt\,.$$
Оператор $K^0$ называется характеристической частью оператора $K$, а уравнение $K^0\varphi = f$ — характеристическим уравнением, соответствующим полному уравнению (5.46).

Индексом оператора $K$ или уравнения $K\varphi = f$ называется целое число
$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\Big[\arg\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\Big]_\Gamma = \frac{1}{2\pi i}\Big[\log\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\Big]_\Gamma. \tag{5.47}$$

Заметим, что *индекс зависит лишь от характеристической части оператора* $K$.

Операторы $K$ и $K^*$, определенный по формуле
$$K^*\psi \equiv \alpha(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{K(t,\, t_0)\psi(t)\,dt}{t - t_0}\,,$$
получающиеся один из другого перестановкой $t_0$ и $t$ в ядре $\dfrac{K(t_0, t)}{t - t_0}$, называются союзными или транспонированными.

Легко видеть, что если индекс оператора $K$ равен $\varkappa$, то индекс $\varkappa^*$ союзного оператора $K^*$ равен $-\varkappa$.

**2. Решение характеристического уравнения.** Для общей теории сингулярных интегральных уравнений вида (5.44) большое значение имеет решение характеристического уравнения

$$K^0\varphi \equiv \alpha(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{\beta(t_0)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0)\,. \tag{5.48}$$

Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (5.48). Кусочно-аналитическая функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}\,, \tag{5.49}$$

как интеграл типа Коши, удовлетворяет граничным условиям

$$\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0), \tag{5.50}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) \tag{5.51}$$

(см. формулы (2.98), (2.99), на основании которых заключаем, что функция $\Phi(z)$ должна быть исчезающим на бесконечности решением неоднородной задачи сопряжения

$$(\alpha+\beta)\,\Phi^+(t) - (\alpha-\beta)\,\Phi^-(t) = f(t)$$

или

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + \frac{f(t)}{\alpha(t)+\beta(t)}\,, \tag{5.52}$$

где

$$G(t) = \frac{\alpha(t)-\beta(t)}{\alpha(t)+\beta(t)}\,. \tag{5.53}$$

Обратно, пусть кусочно-аналитическая функция $\Phi(z)$ является исчезающим на бесконечности решением задачи (5.52). Определим функцию $\varphi$ по формуле (5.50). Тогда (см. п. 2 раздела 5.4) функция $\Phi(z)$ представима в виде (5.49) и, следовательно, имеет место и формула (5.51), а это означает, что $\varphi(t)$ является решением интегрального уравнения (5.48).

Таким образом, *решение характеристического уравнения* (5.48) *эквивалентно нахождению общего решения задачи сопряжения* (5.52), *исчезающего на бесконечности.*

Из (5.23), (5.47) и (5.53) видно, что индекс $\varkappa$ интегрального уравнения (5.48) есть индекс соответствующей задачи сопряжения (5.52).

Пусть $\chi(z)$ — каноническое решение однородной задачи сопряжения, соответствующей задаче (5.52). Тогда (см. п. 3 раздела 5.4) решение задачи (5.52), исчезающее на бесконечности, при $\varkappa \geq 0$ дается формулой

$$\Phi(z)=\frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{[\,\alpha(t)+\beta(t)\,]\,\chi^{+}(t)(t-z)}+\chi(z)P_{\varkappa-1}(z), \tag{5.54}$$

где $P_{\varkappa-1}(z)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa-1$ ($P_{\varkappa-1}(z)\equiv$ $\equiv 0$ при $\varkappa=0$). При $\varkappa<0$ решение существует лишь при выполнении условий

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{t^{k-1}f(t)\,dt}{[\,\alpha(t)+\beta(t)\,]\,\chi^{+}(t)}=0, \quad k=1,\,2,\,\ldots,\,-\varkappa, \tag{5.55}$$

и дается тогда формулой (5.54), в которой $P_{\varkappa-1}(z)\equiv 0$.

Поскольку в силу формул Сохоцкого – Племеля и (5.54)

$$\Phi^{\pm}(t_0)=\frac{\chi^{\pm}(t_0)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{[\,\alpha(t)+\beta(t)\,]\,\chi^{+}(t)(t-t_0)}\pm$$
$$\pm\frac{\chi^{\pm}(t_0)f(t_0)}{2[\,\alpha(t_0)+\beta(t_0)\,]\,\chi^{+}(t_0)}+\chi^{\pm}(t_0)P_{\varkappa-1}(t_0),$$

то по формуле (5.50) получим следующее решение характеристического интегрального уравнения (5.48):

$$\begin{gathered}\varphi(t_0)=\frac{\chi^{+}(t_0)-\chi^{-}(t_0)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{[\,\alpha(t)+\beta(t)\,]\,\chi^{+}(t)(t-t_0)}+\\+\frac{[\,\chi^{+}(t_0)-\chi^{-}(t_0)\,]\,f(t_0)}{2[\,\alpha(t_0)+\beta(t_0)\,]\,\chi^{+}(t_0)}+[\,\chi^{+}(t_0)-\chi^{-}(t_0)\,]P_{\varkappa-1}(t_0).\end{gathered} \tag{5.56}$$

Заметим, что однородное характеристическое уравнение $K^0\varphi=0$ при $\varkappa\leq 0$ не имеет решений, отличных от нуля, а при $\varkappa>0$ оно имеет ровно $\varkappa$ линейно независимых решений, причем его общее решение, получающееся из (5.56) при $f(t)=0$, в силу равенства $\chi^{+}(t)=G(t)\chi^{-}(t)$ и (5.53) может быть представлено в виде

$$\varphi(t)=\frac{\chi^{+}(t)\,\beta(t)}{\alpha(t)-\beta(t)}\,P_{\varkappa-1}(t)=\sum_{k=1}^{\varkappa}c_k\varphi_k(t), \tag{5.57}$$

где функции

$$\varphi_k(t)=\frac{t^{k-1}\chi^{+}(t)\,\beta(t)}{\alpha(t)-\beta(t)},\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,\varkappa, \tag{5.58}$$

и представляют собой полную систему линейно независимых решений однородного характеристического уравнения.

Резюмируем полученные результаты.

I. Если $\varkappa>0$, то однородное уравнение $K^0\varphi=0$ имеет ровно $\varkappa$ линейно независимых решений.

II. Если $\varkappa\leq 0$, то это уравнение не имеет решений, отличных от нуля.

III. Если $\varkappa\geq 0$, то неоднородное уравнение $K^0\varphi=f$ разрешимо при любой правой части.

IV. Если $\varkappa<0$, то это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть $f$ удовлетворяет $-\varkappa$ условиям вида

$$\int\limits_{\Gamma} f(t)\,\psi_k(t)\,dt=0,\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,-\varkappa, \tag{5.59}$$

где $\psi_k(t)$ — линейно независимые функции, определенные (см. (5.55)) формулами

$$\psi_k(t)=\frac{t^{k-1}}{[\,\alpha(t)+\beta(t)\,]\chi^{+}(t)}\,,\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,-\varkappa. \tag{5.60}$$

**3. Решение уравнения, союзного с характеристическим.** Рассмотрим теперь уравнение

$$K^{0*}\psi\equiv\alpha(t_0)\,\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\beta(t)\,\psi(t)\,dt}{t-t_0}=g(t_0)\,, \tag{5.61}$$

союзное с уравнением $K^0\varphi = f$. Индекс $\varkappa^*$ этого уравнения равен $-\varkappa$, где $\varkappa$ обозначает индекс оператора $K^0$.

Уравнение (5.61) также можно свести к задаче сопряжения следующим приемом. Введем исчезающую на бесконечности кусочно-аналитическую функцию

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\beta(t)\,\psi(t)\,dt}{t-z}\,.$$

Принимая во внимание формулы

$$\beta(t_0)\,\psi(t_0) = \Psi^+(t_0) - \Psi^-(t_0),$$

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\beta(t)\,\psi(t)\,dt}{t-t_0} = \Psi^+(t_0) + \Psi^-(t_0),$$

заключаем, что уравнение (5.61) эквивалентно следующей задаче.

Найти функцию $\psi(t)$ класса $H$ и исчезающую на бесконечности кусочно-аналитическую функцию $\Psi(z)$ по условиям

$$\alpha(t)\,\psi(t) = \Psi^+(t) + \Psi^-(t) + g(t),$$

$$\beta(t)\,\psi(t) = \Psi^+(t) - \Psi^-(t),$$

которые, в свою очередь, эквивалентны условиям

$$(\alpha+\beta)\psi = 2\Psi^+ + g, \quad (\alpha-\beta)\psi = 2\Psi^- + g,$$

или же

$$\psi = \frac{2\Psi^+}{\alpha+\beta} + \frac{g}{\alpha+\beta}, \quad \psi = \frac{2\Psi^-}{\alpha-\beta} + \frac{g}{\alpha-\beta}\,. \tag{5.62}$$

Сравнивая здесь правые части, приходим к задаче сопряжения

$$\Psi^+(t) = [\,G(t)\,]^{-1}\,\Psi^-(t) + \frac{\beta(t)\,g(t)}{\alpha(t)-\beta(t)}\,, \tag{5.63}$$

где $G(t)$ определяется формулой (5.53), причем требуется найти решение, исчезающее на бесконечности. Решив эту задачу, по любой из формул (5.62) получим решение интегрального уравнения (5.61).

Заметим, что однородная задача сопряжения (5.32), получающаяся из (5.63) при $g = 0$, является союзной с однородной задачей сопряжения, получающейся из (5.52) при $f = 0$, поэтому, если $\chi(z)$ и $\varkappa$

обозначают каноническое решение и индекс этой задачи, то $[\,\chi(z)\,]^{-1}$ и $\varkappa^* = -\varkappa$ будут каноническим решением и индексом задачи (5.32). В соответствии с этим общее решение задачи (5.63), исчезающее на бесконечности, представится при $\varkappa^* \geq 0$ (т. е. при $\varkappa \leq 0$) в виде

$$\Psi(z) = \frac{[\,\chi(z)\,]^{-1}}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\chi^{+}(t)\,\beta(t)\,g(t)\,dt}{[\,\alpha(t)-\beta(t)\,]\,(t-z)} + [\,\chi(z)\,]^{-1} P_{\varkappa^*-1}(z), \tag{5.64}$$

где $P_{\varkappa^*-1}(z)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa^*-1$.

При $\varkappa^* < 0$ (т. е. при $\varkappa > 0$) решение этой задачи дается той же формулой (5.64) при $P_{\varkappa^*-1}(z) \equiv 0$, если соблюдены следующие необходимые и достаточные условия разрешимости:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{t^{k-1}\chi^{+}(t)\,\beta(t)\,g(t)\,dt}{\alpha(t)-\beta(t)} = 0, \quad k=1,\,2,\,\ldots,\,-\varkappa^*. \tag{5.65}$$

Для функции $\Psi(z)$, определенной равенством (5.64), по формуле Сохоцкого – Племеля (2.96) находим:

$$\Psi^{+}(t_0) = \frac{[\,\chi^{+}(t_0)\,]^{-1}}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\chi^{+}(t)\,\beta(t)\,g(t)\,dt}{[\,\alpha(t)-\beta(t)\,]\,(t-t_0)} +$$

$$+ \frac{\beta(t_0)\,g(t_0)}{2[\,\alpha(t_0)-\beta(t_0)\,]} + [\,\chi^{+}(t_0)\,]^{-1} P_{\varkappa^*-1}(t_0)\,.$$

Подставив найденное значение $\Psi^{+}(t_0)$ в первую из формул (5.62), получим общее решение интегрального уравнения (5.61):

$$\psi(t_0) = \frac{[\,\chi^{+}(t_0)\,]^{-1}}{\pi i\,[\,\alpha(t_0)+\beta(t_0)\,]} \int\limits_{\Gamma} \frac{\chi^{+}(t)\,\beta(t)\,g(t)\,dt}{[\,\alpha(t)-\beta(t)\,]\,(t-t_0)} +$$

$$+ \frac{\alpha(t_0)\,g(t_0)}{[\,\alpha(t_0)[\,\beta(t_0)\,]^2} + \frac{P_{\varkappa^*-1}(t_0)}{\chi^{+}(t_0)\,[\,\alpha(t_0)+\beta(t_0)\,]}.$$

Отсюда в силу (5.60) заключаем, что общее решение однородного уравнения $K^{0*}\psi=0$ при $\varkappa^* > 0$ можно представить в виде

$$\psi(t) = \frac{P_{\varkappa^*-1}(t)}{\chi^+(t)\,[\,\alpha(t)+\beta(t)\,]} = \sum_{k=1}^{\varkappa^*} c_k \psi_k(t). \tag{5.66}$$

Следовательно, при $\varkappa^* > 0$ однородное уравнение $K^{0\,*}\psi = 0$ имеет ровно $\varkappa^*$ линейно независимых решений $\psi_k$, а при $\varkappa^* \leq 0$ оно не имеет решений, отличных от нуля.

Итак, уравнение $K^{0\,*}\psi = g$ обладает такими же свойствами, как и уравнение $K^0\varphi = f$, т. е. по отношению к уравнению $K^{0*}\psi = g$ справедливы утверждения I–IV предыдущего пункта при условии замены $K^0$ на $K^{0*}$ и $\varkappa$ на $\varkappa^* = -\varkappa$.

Мы видим теперь из (5.55) и (5.60), что функции $\psi_k(t)$, фигурирующие в условиях (5.59) разрешимости уравнения $K^0\varphi = f$, представляют собой полную систему линейно независимых решений союзного с ним однородного уравнения $K^{0*}\psi = 0$. Точно так же в силу (5.58) условия (5.65) разрешимости уравнения $K^{0*}\psi = g$ можно записать в виде

$$\int_\Gamma g(t)\,\varphi_k(t)\,dt = 0\,,$$

где $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, \varkappa$, — полная система линейно независимых решений союзного с ним однородного уравнения $K^0\varphi = 0$.

В заключение приведем без доказательства три основные теоремы Ф. Нетера о полных сингулярных уравнениях нормального типа.

Теорема 1. *Для разрешимости уравнения $K\varphi = f$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_\Gamma f(t)\,\psi_k(t)\,dt = 0\,, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, l^*\,,$$

*где $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_{l^*}(t)$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения $K^*\psi = 0$.*

Теорема 2. *Числа $l$ и $l^*$ линейно независимых решений соответственно однородного уравнения $K\varphi = 0$ и союзного однородного уравнения $K^*\psi = 0$ конечны.*

Теорема 3. *Разность $l - l^*$ равна индексу $\varkappa$ оператора $K$.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Билута П. А. Лекции по теории функций комплексного переменного. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2005.
2. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1964.
3. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 2006.
4. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
5. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958.
7. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Мир, 2006.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1969.
9. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Высшая школа, 2000.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики: В 5 т. М.: Гостехиздат, 1953. Т. 3, ч. 2.
11. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1959.
12. Чуешев В. В., Чуешева Н. А. Справочное пособие по теории функций комплексного переменного. Часть I. Горно-Алтайск, РИО Горно-Алтайского госуниверситета, 2009.

Автор: ______________________________ Билута Павел Алексеевич
к.ф.-м.н., доцент ММФ НГУ

Рецензент(ы) ______________________________________________
_____________________________________________________________.

Курс лекций одобрен на заседании ____________________________
_____________________________________________________________.

от ___________________________ года, протокол №