

## ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН 21.09.97

1.1. Исследовать на дифференцируемость в точке  $(0, 0)$  функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ответ обосновать.

1.2. При каких векторах  $a$  из  $\mathbf{R}_3$  линейное преобразование  $\varphi: x \rightarrow [a, x]$ , где  $x \in \mathbf{R}_3$  и  $[a, x]$  — векторное произведение  $a$  и  $x$ , может в некоторой базе задаваться матрицей вида

$$\begin{pmatrix} p & p & p \\ 0 & 0 & 0 \\ p-2 & p & -p \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbf{R} ?$$

1.3. Два землекопа с одинаковой производительностью выкапывают прямолинейную траншею, соединяющую точку  $M(1, 1)$  с точкой касания к гиперболе  $x^2 - y^2 = 4$ . Первый землекоп работал только слева от правой директрисы, а второй — только справа от нее. Какое время работал каждый из них, если суммарное время их работы составило 2 часа ?

1.4. Вычислить интеграл

$$\iint_S (x^3 + yz) dy dz + (y^3 + xz) dz dx + (z^3 + xy) dx dy,$$

где  $S$  — внешняя сторона полусферы:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$ .

1.5. Используя теорию вычетов, найти интеграл в смысле главного значения по Коши

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^3 + 1} dx.$$

1.6. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} (4it + i - 2)y'' + 2(1 + 4t)y' - 8y = (4t + 5 + 2i)e^{-t}, & t > 0, \\ y|_{t=0} = 1, \sup_{t>0} |y(t)| < \infty. \end{cases}$$

Сколько существует решений ?

## ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН 21.09.97

2.1. Исследовать на дифференцируемость в точке  $(0, 0)$  функцию  $f(x, y) = (x^2 y^2)^{1/3}$ . Ответ обосновать.

2.2. При каких векторах  $a$  из  $\mathbf{R}_3$  линейное преобразование  $\varphi: x \rightarrow [a, x]$ , где  $x \in \mathbf{R}_3$  и  $[a, x]$  — векторное произведение  $a$  и  $x$ , может в некоторой базе задаваться матрицей вида

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & p-2 \\ 2p & 0 & p \\ 2p & 0 & p \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbf{R} ?$$

2.3. Из точки  $M$  с координатами  $(-3/2, m)$  выпущены две прямые, касающиеся параболы  $y^2 = 6x$  в точках  $A$  и  $B$ . Два землекопа копают прямолинейную траншею вдоль отрезка  $AB$ , причем первый работает в верхней полуплоскости, а второй — в нижней. Первый работает в два раза дольше второго при той же производительности. Найти площадь треугольника  $ABM$ .

2.4. Вычислить интеграл

$$\iint_S x^5 dy dz + y^5 dz dx + z^5 dx dy,$$

где  $S$  — внешняя сторона конической поверхности:  $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ ,  $1 > z > 0$ .

2.5. Используя теорию вычетов, найти интеграл в смысле главного значения по Коши

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^3 - 8} dx.$$

2.6. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} (3it + 2i - 3)y'' + (2 + 3t)y' - 3y = (3 - 5i - 3it)e^{-t}, & t > 0, \\ y'|_{t=0} = 2, \sup_{t>0} |y(t)| < \infty. \end{cases}$$

Сколько существует решений?

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН 21.09.97

3.1. Исследовать на дифференцируемость в точке  $(0, 0)$  функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ответ обосновать.

3.2. При каких векторах  $a$  из  $\mathbf{R}_3$  линейное преобразование  $\varphi: x \rightarrow [a, x]$ , где  $x \in \mathbf{R}_3$  и  $[a, x]$  — векторное произведение  $a$  и  $x$ , может в некоторой базе задаваться матрицей вида

$$\begin{pmatrix} p & 3p & p-3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2p & p & -p \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbf{R} ?$$

3.3. Точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(1, -\sqrt{3}/2)$  лежат на эллипсе  $x^2/4 + y^2 = 1$ . Первый землекоп начинает из точки  $M_1$  копать прямолинейную траншею  $T$ . Второй землекоп в тот же момент начинает из точки  $M_2$  копать траншею вдоль геометрического места середин хорд, параллельных  $T$ . В некоторый момент времени землекопы встречаются в одной точке. Найти координаты точки  $M_1$ , если производительность землекопов одинакова.

3.4. Вычислить интеграл

$$\iint_S (x^2 + 3yz) dy dz + (y^2 + 4xz) dz dx + (z^2 + xy) dx dy,$$

где  $S$  — внешняя сторона поверхности куба:  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , исключая часть поверхности  $z = 0$ .

3.5. Используя теорию вычетов, найти интеграл в смысле главного значения по Коши

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x^3 + 2}{x^4 - 1} dx.$$

3.6. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} (4it - i + 2)y'' + 2(1 - 4t)y' + 8y = (4t + 3 - 2i)e^{-t}, & t > 0, \\ y|_{t=0} = 3, \sup_{t>0} |y(t)| < \infty. \end{cases}$$

Сколько существует решений ?

## ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН 21.09.97

4.1. Исследовать на дифференцируемость в точке  $(0, 0)$  функцию  $f(x, y) = x^{2/5} y^{3/5}$ . Ответ обосновать.

4.2. При каких векторах  $a$  из  $\mathbf{R}_3$  линейное преобразование  $\varphi: x \rightarrow [a, x]$ , где  $x \in \mathbf{R}_3$  и  $[a, x]$  — векторное произведение  $a$  и  $x$ , может в некоторой базе задаваться матрицей вида

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & p-4 \\ 4p & 0 & p \\ 2p & 0 & p \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbf{R} ?$$

4.3. Дана гипербола  $x^2/4 - y^2/9 = 1$ . Два тракториста за шесть часов вспахивают треугольный участок  $ABO$ , где  $O(0, 0)$  — начало координат,  $A$  — точка пересечения одной асимптоты и правой директрисы, точка  $B$  лежит на другой асимптоте, так, что сторона  $AB$  этого треугольника касается правой ветви гиперболы. За какое время один тракторист вспахает квадратный участок, у которого одна сторона лежит на директрисе этой гиперболы, а концы противоположной стороны лежат на ее асимптотах ?

4.4. Вычислить интеграл

$$\iint_S (x^3 + 4yz) dy dz + (y^3 + 5xz) dz dx + (z^3 + 6xy) dx dy,$$

где  $S$  — внешняя сторона части поверхности цилиндра:  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

4.5. Используя теорию вычетов, найти интеграл в смысле главного значения по Коши

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} dx.$$

4.6. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} (3it - 2i + 3)y'' + (2 - 3t)y' + 3y = (3t + 1 - 3i)e^{-t}, & t > 0, \\ y'|_{t=0} = 4, \sup_{t>0} |y(t)| < \infty. \end{cases}$$

Сколько существует решений ?