ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2011 г.)
В А Р И А Н Т   1.1

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x,y,z) = -\sqrt{(x-1)^2 + \left(y-\sqrt{3}\right)^2 + z^2}$$

на множестве M, задаваемом соотношением $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{4} \leqslant 1$.

2. Найти все векторы $x \in \mathbb{R}^2$, для которых $\|x\| > \|Ax\| > \|A^2x\| > \|A^3x\| > \ldots$, а также все векторы $y \in \mathbb{R}^2$, для которых $\|y\| > \|A^{-1}y\| > \|A^{-2}y\| > \|A^{-3}y\| > \ldots$, если

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть p — некоторое положительное число. Найти уравнение семейства эллипсов с центром на прямой $y = 0$, для которых прямые $x = p$, $x = 3p$ являются директрисами. При каком значении полуосей эллипс имеет максимальную площадь? При каком значении $p > 1$ этот эллипс (максимальной площади) касается прямой $y - x = \sqrt{2} - 3$?

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2011 г.)
В А Р И А Н Т   1.2

4. Найти площадь множества, ограниченного кривой

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}\sin\left(\frac{\pi y}{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}\right),$$

где a, b, c — положительные константы.

5. Найти все аналитические на комплексной плоскости функции $f(z)$, $z = x + iy$, для которых

$$(\operatorname{Re} f(z))^2 + (\operatorname{Im} f(z))^2$$

есть функция только от x.

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} (t^2 - 5t)y'' - (2t-5)y' + 2y = \alpha, \\ y|_{t=5} = \beta, \\ y'|_{t=5} = \gamma. \end{cases}$$

Сколько существует решений?

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2011 г.)

В А Р И А Н Т 2.1

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x,y,z) = -\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}$$

на поверхности M, задаваемой уравнением $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

2. Найти все векторы $x \in \mathbb{R}^2$, для которых $\|x\| > \|Ax\| > \|A^2x\| > \|A^3x\| > \ldots$, а также все векторы $y \in \mathbb{R}^2$, для которых $\|y\| > \|A^{-1}y\| > \|A^{-2}y\| > \|A^{-3}y\| > \ldots$, если

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть q — некоторое отрицательное число. Найти уравнение семейства эллипсов с центром на прямой $y = 0$, для которых прямые $x = q$, $x = 3q$ являются директрисами. При каком значении полуосей эллипс имеет максимальную площадь? При каком значении $q < -1$ этот эллипс (максимальной площади) касается прямой $y + x = \sqrt{2} - 3$?

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2011 г.)

В А Р И А Н Т 2.2

4. Найти площадь множества, ограниченного кривой

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right)^6 = \frac{y}{c},$$

где a, b, c — положительные константы.

5. Найти все аналитические на комплексной плоскости функции $f(z)$, $z = x + iy$, для которых

$$\frac{\operatorname{Re} f(z)}{\operatorname{Im} f(z)}$$

есть функция только от y.

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} (4t^2+3t)y'' - (8t+3)y' + 8y = \alpha, \\ y|_{t=-3/4} = \beta, \\ y'|_{t=-3/4} = \gamma. \end{cases}$$

Сколько существует решений?

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2011 г.)
В А Р И А Н Т 3.1

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x,y,z) = -\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$$

на множестве M, задаваемом соотношением $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{8} \leqslant 1$.

2. Найти все векторы $x \in \mathbb{R}^2$, для которых $\|x\| > \|Ax\| > \|A^2x\| > \|A^3x\| > \dots$, а также все векторы $y \in \mathbb{R}^2$, для которых $\|y\| > \|A^{-1}y\| > \|A^{-2}y\| > \|A^{-3}y\| > \dots$, если

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть p — некоторое положительное число. Найти уравнение семейства эллипсов с центром на прямой $x = 0$, для которых прямые $y = p$, $y = 3p$ являются директрисами. При каком значении полуосей эллипс имеет максимальную площадь? При каком значении $p > 1$ этот эллипс (максимальной площади) касается прямой $y - x = 3 - \sqrt{2}$?

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2011 г.)
В А Р И А Н Т 3.2

4. Найти площадь множества, расположенного в квадранте $\{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ и ограниченного кривыми

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \sin\left(\frac{\pi \frac{x}{a}}{2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)}\right), \quad x = 0, \quad y = 0,$$

где a, b — положительные константы.

5. Найти все аналитические на комплексной плоскости функции $f(z)$, $z = x + iy$, для которых

$$(\operatorname{Re} f(z))^2 + (\operatorname{Im} f(z))^2$$

есть функция только от y.

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} (2t^2 - 3t)y'' - (4t-3)y' + 4y = \alpha, \\ y|_{t=3/2} = \beta, \\ y'|_{t=3/2} = \gamma. \end{cases}$$

Сколько существует решений?

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2011 г.)
В А Р И А Н Т 4.1

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x,y) = -\sqrt{\left|x - \frac{1}{2}\right| + |y-1|}$$

на кривой M, задаваемой уравнением $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

2. Найти все векторы $x \in \mathbb{R}^2$, для которых $\|x\| > \|Ax\| > \|A^2x\| > \|A^3x\| > \ldots$, а также все векторы $y \in \mathbb{R}^2$, для которых $\|y\| > \|A^{-1}y\| > \|A^{-2}y\| > \|A^{-3}y\| > \ldots$, если

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть q — некоторое отрицательное число. Найти уравнение семейства эллипсов с центром на прямой $x = 0$, для которых прямые $y = q$, $y = 3q$ являются директрисами. При каком значении полуосей эллипс имеет максимальную площадь? При каком значении $q < -1$ этот эллипс (максимальной площади) касается прямой $y - x = \sqrt{2} - 3$?

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2011 г.)
В А Р И А Н Т 4.2

4. Найти площадь множества, расположенного в квадранте $\{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ и ограниченного кривой

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{xy}{ab},$$

где a, b — положительные константы.

5. Найти все аналитические на комплексной плоскости функции $f(z)$, $z = x + iy$, для которых

$$\frac{\operatorname{Re} f(z)}{\operatorname{Im} f(z)}$$

есть функция только от x.

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} (3t^2 + 5t)y'' - (6t+5)y' + 6y = \alpha, \\ y|_{t=-5/3} = \beta, \\ y'|_{t=-5/3} = \gamma. \end{cases}$$

Сколько существует решений?