ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2010 г.)

В А Р И А Н Т 1.1

1. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = g(x)$ на луче $[2\pi, \infty)$, если

$$f(x) = x^2 \cos x + x^3 \sin x - x^4 + 4200, \qquad g(x) = x \cos x + x^2 \ ?$$

2. Пусть $\theta(x, y)$ — угол между ненулевыми векторами x, y евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Найти

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \lim_{k \to \infty} \theta(x, A^k x), \quad \text{где} \quad A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Провести касательную прямую α к кривой $y = 1 - x^4$ так, чтобы диаметр β эллипса $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{20} = 1$, сопряженный направлению прямой α, проходил через точку $(1, 1)$. Найти угол между прямыми α и β.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2010 г.)

В А Р И А Н Т 1.2

4. Вычислить контурный интеграл $\displaystyle\int\limits_L \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi$, где $L = \partial D$, область D ограничена кривыми

$$xy = p, \quad xy = q, \quad y^2 = ax, \quad y^2 = bx, \quad 0 < p < q, \quad 0 < a < b,$$

(r, φ) — полярные координаты, направление обхода по контуру L происходит против часовой стрелки.

5. Доказать равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = \frac{3}{2}} \frac{\sqrt{z^{13} + 2^{13}} \sin(z^{13})}{z(z^{13} - 1)} \, dz = \sqrt{1 + 2^{13}} \sin 1,$$

($\sqrt{z^{13} + 2^{13}} > 0$ при $z = 0$).

6. Выписать все решения уравнения

$$x' + 2x - \frac{1}{1 + t^5} x^2 = 0,$$

определенные на полуоси $\{t \geq 0\}$ и стремящиеся к нулю при $t \to +\infty$. Ответ обосновать.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2010 г.)
ВАРИАНТ 2.1

1. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = g(x)$ на луче $[2\pi, \infty)$, если

$$f(x) = x^3 \cos x + x \sin x - x^4 + 4000, \qquad g(x) = x \cos x + x \sin x + x^2 \ \ ?$$

2. Пусть $\theta(x, y)$ — угол между ненулевыми векторами x, y евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Найти

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \lim_{k \to \infty} \theta(x, A^k x), \quad \text{где} \quad A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Провести касательную прямую α к кривой $y = 1 + x^6$ так, чтобы диаметр β гиперболы $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{12} = 1$, сопряженный направлению прямой α, проходил через точку $(2, 2)$. Найти угол между прямыми α и β.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2010 г.)
ВАРИАНТ 2.2

4. Вычислить контурный интеграл $\displaystyle\int\limits_L \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi$, где $L = \partial D$, область D ограничена кривыми

$$xy = p, \quad xy = q, \quad y = ax, \quad y = bx, \quad 0 < p < q, \quad 0 < a < b,$$

(r, φ) — полярные координаты, направление обхода по контуру L происходит против часовой стрелки.

5. Доказать равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = \frac{5}{4}} \frac{\sqrt{z^{11} + 2^{11}}\,(1 - \cos(z^{11}))}{z(z^{11} - 1)} \, dz = \sqrt{1 + 2^{11}}(1 - \cos 1),$$

($\sqrt{z^{11} + 2^{11}} > 0$ при $z = 0$).

6. Выписать все решения уравнения

$$x' + 3x - \frac{1}{1 + t^4} x^2 = 0,$$

определенные на полуоси $\{t \geq 0\}$ и стремящиеся к нулю при $t \to +\infty$. Ответ обосновать.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2010 г.)

В А Р И А Н Т 3.1

1. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = g(x)$ на луче $[2\pi, \infty)$, если

$$f(x) = x\cos x + x^2 \sin x - 2x^3 + 1100, \qquad g(x) = x \sin x + x^2 \ \ ?$$

2. Пусть $\theta(x, y)$ — угол между ненулевыми векторами x, y евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Найти

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \lim_{k\to\infty} \theta(x, A^k x), \quad \text{где} \quad A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Провести касательную прямую α к кривой $y = 7 + x^4$ так, чтобы диаметр β эллипса $\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{28} = 1$, сопряженный направлению прямой α, проходил через точку $(-1, 1)$. Найти угол между прямыми α и β.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2010 г.)

В А Р И А Н Т 3.2

4. Вычислить контурный интеграл $\displaystyle\int_L \frac{1}{2} r^2\, d\varphi$, где $L = \partial D$, область D ограничена кривыми

$$x^2 = py, \quad x^2 = qy, \quad y = ax, \quad y = bx, \quad 0 < p < q, \quad 0 < a < b,$$

(r, φ) — полярные координаты, направление обхода по контуру L происходит против часовой стрелки.

5. Доказать равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\frac{7}{4}} \frac{\sqrt{z^7 + 2^7}\left(e^{z^7} - 1\right)}{z(z^7 - 1)}\, dz = \sqrt{1 + 2^7}(e - 1),$$

($\sqrt{z^7 + 2^7} > 0$ при $z = 0$).

6. Выписать все решения уравнения

$$x' + 4x - \frac{1}{1 + t^3} x^2 = 0,$$

определенные на полуоси $\{t \geq 0\}$ и стремящиеся к нулю при $t \to +\infty$. Ответ обосновать.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2010 г.)

В А Р И А Н Т 4.1

1. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = g(x)$ на луче $[2\pi, \infty)$, если

$$f(x) = x^2 \cos x + x^{3/2} \sin x - x^3 + 700, \qquad g(x) = x \cos x + x \ln x + 2x^2 \quad ?$$

2. Пусть $\theta(x, y)$ — угол между ненулевыми векторами x, y евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Найти

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \lim_{k \to \infty} \theta(x, A^k x), \quad \text{где} \quad A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Провести касательную прямую α к кривой $y = 2 - x^6$ так, чтобы диаметр β гиперболы $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{18} = 1$, сопряженный направлению прямой α, проходил через точку $(3, -3)$. Найти угол между прямыми α и β.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2010 г.)

В А Р И А Н Т 4.2

4. Вычислить контурный интеграл $\displaystyle\int_L \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi$, где $L = \partial D$, область D ограничена кривыми

$$y = ax^3, \quad y = bx^3, \quad y^2 = px, \quad y^2 = qx, \quad 0 < p < q, \quad 0 < a < b,$$

(r, φ) — полярные координаты, направление обхода по контуру L происходит против часовой стрелки.

5. Доказать равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z| = \frac{8}{7}} \frac{\sqrt{z^{15} + 2^{15}} \left(1 - e^{-z^{15}}\right)}{z(z^{15} - 1)} \, dz = \sqrt{1 + 2^{15}} \left(1 - \frac{1}{e}\right),$$

($\sqrt{z^{15} + 2^{15}} > 0$ при $z = 0$).

6. Выписать все решения уравнения

$$x' + 5x - \frac{1}{1 + t^2} x^2 = 0,$$

определенные на полуоси $\{t \geq 0\}$ и стремящиеся к нулю при $t \to +\infty$. Ответ обосновать.