ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2009 г.)
В А Р И А Н Т 1.1

1. Найти область определения I функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(3^{1/n^2} - 1\right) x^n.$$

Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x)$ как во внутренних точках множества I, так и в граничных, если таковые принадлежат множеству I.

2. Найти скалярное произведение на пространстве столбцов $\mathbb{R}^2$, при котором линейный оператор

$$A: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

становится самосопряженным оператором евклидова пространства.

3. Найти все прямые на поверхности α: $x^2 + 4y^2 = 1 + z^2$, проходящие через точку $(1, 1, 2)$. Вдоль одной из этих прямых по поверхности α скользит касательная (к поверхности α) плоскость π. Найти максимальный угол, на который поворачивается плоскость π.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2009 г.)
В А Р И А Н Т 1.2

4. Вычислить интеграл

$$\int_S \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + z^2 + 3y^2)^{3/2}}$$

по внешней поверхности S тела, заданного двумя неравенствами $1 - y \geq x^2 + z^2$, $(y + 1) \geq \sqrt{x^2 + z^2}$.

5. Сколько корней уравнения

$$z^4 + (41 - i)z^3 + (1 - 41i)z^2 - (10 + i)z + 10i = 0$$

лежит вне круга $\{z : \ |z - 2i| \leq 1\}$? Ответ обосновать.

6. Доказать, что при достаточно малых $|x^0|$, $|y^0|$, $|z^0|$, решение задачи Коши

$$\begin{array}{ll} x' = -z - 5x^{2009}, & x|_{t=0} = x^0, \\ y' = 2z - 7y^{1945}, & y|_{t=0} = y^0, \\ z' = 3x - y - 9z^{1917}, & z|_{t=0} = z^0 \end{array}$$

существует на всей полуоси $\{t > 0\}$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2009 г.)
В А Р И А Н Т 2.1

1. Найти область определения I функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{1}{3^{1/n^2}}\Big)x^n.$$

Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x)$ как во внутренних точках множества I, так и в граничных, если таковые принадлежат множеству I.

2. Найти скалярное произведение на пространстве столбцов $\mathbb{R}^2$, при котором линейный оператор

$$A: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 5x_1 - 4x_2 \end{pmatrix}$$

становится самосопряженным оператором евклидова пространства.

3. Найти все прямые на поверхности α: $x^2 - y^2 = 3z$, проходящие через точку $(2, 1, 1)$. Вдоль одной из этих прямых по поверхности α скользит касательная (к поверхности α) плоскость π. Найти максимальный угол, на который поворачивается плоскость π.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2009 г.)
В А Р И А Н Т 2.2

4. Вычислить интеграл

$$\int_S \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + 2z^2)^{3/2}}$$

по внешней поверхности S тела, заданного двумя неравенствами $1 - z \geq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

5. Сколько корней уравнения

$$z^4 - (1 + i)z^3 - (42 - i)z^2 + (42 + 5i)z - 5i = 0$$

лежит вне круга $\{z : \ |z - 2| \leq 1\}$? Ответ обосновать.

6. Доказать, что при достаточно малых $|x^0|$, $|y^0|$, $|z^0|$, решение задачи Коши

$$\begin{aligned} x' &= -4y - 4x^{1917}, \qquad & x|_{t=0} &= x^0, \\ y' &= 3x - 6y^{2009} - 4z, \qquad & y|_{t=0} &= y^0, \\ z' &= 2y - 3z^{1945}, \qquad & z|_{t=0} &= z^0 \end{aligned}$$

существует на всей полуоси $\{t > 0\}$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2009 г.)
ВАРИАНТ 3.1

1. Найти область определения I функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{1/n^2} - 1\right) x^n.$$

Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x)$ как во внутренних точках множества I, так и в граничных, если таковые принадлежат множеству I.

2. Найти скалярное произведение на пространстве столбцов $\mathbb{R}^2$, при котором линейный оператор

$$A: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4x_1 + 6x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

становится самосопряженным оператором евклидова пространства.

3. Найти все прямые на поверхности α: $2y^2 + 2z^2 = 1 + x^2$, проходящие через точку $(3, 1, 2)$. Вдоль одной из этих прямых по поверхности α скользит касательная (к поверхности α) плоскость π. Найти максимальный угол, на который поворачивается плоскость π.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2009 г.)
ВАРИАНТ 3.2

4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_S \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(4x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

по внешней поверхности S тела, заданного двумя неравенствами $1 - x \geq z^2 + y^2$, $4y^2 + 4z^2 \leq x + 4$.

5. Сколько корней уравнения

$$z^4 - (43 - i)z^3 + (2 - 43i)z^2 - (9 - 2i)z - 9i = 0$$

лежит вне круга $\{z : \ |z + 2i| \leq 1\}$? Ответ обосновать.

6. Доказать, что при достаточно малых $|x^0|$, $|y^0|$, $|z^0|$, решение задачи Коши

$$\begin{array}{ll} x' = -2z - 5x^{1945}, & x|_{t=0} = x^0, \\ y' = 3z - 9y^{2009}, & y|_{t=0} = y^0, \\ z' = 4x - 2y - 3z^{1917}, & z|_{t=0} = z^0 \end{array}$$

существует на всей полуоси $\{t > 0\}$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2009 г.)
ВАРИАНТ 4.1

1. Найти область определения I функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{2^{1/n^2}}\Big) x^n.$$

Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x)$ как во внутренних точках множества I, так и в граничных, если таковые принадлежат множеству I.

2. Найти скалярное произведение на пространстве столбцов $\mathbb{R}^2$, при котором линейный оператор

$$A: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

становится самосопряженным оператором евклидова пространства.

3. Найти все прямые на поверхности α: $5z^2 - y^2 = 4x$, проходящие через точку $(1, 4, 2)$. Вдоль одной из этих прямых по поверхности α скользит касательная (к поверхности α) плоскость π. Найти максимальный угол, на который поворачивается плоскость π.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2009 г.)
ВАРИАНТ 4.2

4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_S \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(4x^2 + 9y^2 + z^2)^{3/2}}$$

по внешней поверхности S тела, заданного двумя неравенствами $4x^2 + 9y^2 + z^2 \le 1$, $4x^2 + 9y^2 \le 2z + 1$.

5. Сколько корней уравнения

$$z^4 + (1+i)z^3 + (44+i)z^2 + (44+7i)z + 7i = 0$$

лежит вне круга $\{z: \ |z+2| \le 1\}$? Ответ обосновать.

6. Доказать, что при достаточно малых $|x^0|$, $|y^0|$, $|z^0|$, решение задачи Коши

$$\begin{array}{ll} x' = -y - 3x^{1917} + z, & x|_{t=0} = x^0, \\ y' = 2x - 5y^{2009}, & y|_{t=0} = y^0, \\ z' = -3x - 7z^{1945}, & z|_{t=0} = z^0 \end{array}$$

существует на всей полуоси $\{t > 0\}$.