

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2006 г.)

ВАРИАНТ 1.1

1. Найти предел или доказать, что он не существует

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{\cos(x^2 + y)}{1 - x^2 y} \right)^{\frac{1}{x^4 + y^2}}.$$

2. Найти жорданову форму вещественной матрицы A , а также такой многочлен $f(t)$ наименьшей степени, что матрица $f(A)$ подобна диагональной, а матрица $N = A - f(A)$ нильпотентна. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти уравнения диаметральных плоскостей для поверхности $x^2 - 10x + 3y^2 + 18 = 0$, которые бы касались эллипсоида $x^2/16 + y^2 + 5z^2 = 1$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2006 г.)

ВАРИАНТ 1.2

4. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \left(2x \cos(x^2 + y^3) + e^{x+\sin x} + y \right) dx + \left(3y^2 \cos(x^2 + y^3) + y^{-\frac{1}{2}} \right) dy,$$

где $L: r = \varphi^{\frac{7}{2}}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} [\cos(z^k) - 1]$ в круге $\{z: |z| < 1\}$.

6. Доказать, что при достаточно малых $|x^0|, |y^0|$ решение задачи Коши

$$\begin{aligned} x' &= -2y - 3x^5, & x|_{t=0} &= x^0, \\ y' &= 4x - 3y^3, & y|_{t=0} &= y^0 \end{aligned}$$

существует на всей полуоси $\{t > 0\}$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2006 г.)

ВАРИАНТ 2.1

1. Найти предел или доказать, что он не существует

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{1 + \operatorname{arctg}(xy)}{\cos(x-y)} \right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

2. Найти жорданову форму вещественной матрицы A , а также такой многочлен $f(t)$ наименьшей степени, что матрица $f(A)$ подобна диагональной, а матрица $N = A - f(A)$ нильпотентна. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти уравнения диаметральных плоскостей для гиперболического цилиндра $(x-1)^2 - 2(y-2)^2 = 1$, которые бы касались эллипсоида $x^2/4 + 3y^2/7 + z^2/5 = 1$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2006 г.)

ВАРИАНТ 2.2

4. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \left(3x^2 \sin(y^2 + x^3) + e^{x^2 + \cos x} + 2y \right) dx + \left(2y \sin(x^3 + y^2) + y^{-\frac{1}{3}} \right) dy,$$

где $L: r = \varphi^{\frac{5}{2}}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} [\exp(z^k) - 1]$ в круге $\{z : |z| < 1\}$.

6. Доказать, что при достаточно малых $|x^0|, |y^0|$ решение задачи Коши

$$\begin{aligned} x' &= -y - 2x^3, & x|_{t=0} &= x^0, \\ y' &= 3x - 2y^5, & y|_{t=0} &= y^0 \end{aligned}$$

существует на всей полуоси $\{t > 0\}$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2006 г.)

ВАРИАНТ 3.1

1. Найти предел или доказать, что он не существует

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(e^{(x+y)^2} (1 - 2 \arcsin(xy)) \right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

2. Найти жорданову форму вещественной матрицы A , а также такой многочлен $f(t)$ наименьшей степени, что матрица $f(A)$ подобна диагональной, а матрица $N = A - f(A)$ нильпотентна. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти уравнения диаметральных плоскостей для поверхности $3(x-5)^2 + (y-2)^2 = 1$, которые бы касались эллиптического параболоида $x^2/4 + 9z^2 = 2y$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2006 г.)

ВАРИАНТ 3.2

4. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \left(2x \cos(x^2 + y^4) + e^{x+\sin x^2} + 3y \right) dx + \left(4y^3 \cos(x^2 + y^4) + y^{-\frac{1}{4}} \right) dy,$$

где $L: r = \varphi^{\frac{7}{2}}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} z^k \cos(z^{2k})$ в круге $\{z: |z| < 1\}$.

6. Доказать, что при достаточно малых $|x^0|, |y^0|$ решение задачи Коши

$$\begin{aligned} x' &= -3y - 4x^7, & x|_{t=0} &= x^0, \\ y' &= 2x - 4y^3, & y|_{t=0} &= y^0 \end{aligned}$$

существует на всей полуоси $\{t > 0\}$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2006 г.)

ВАРИАНТ 4.1

1. Найти предел или доказать, что он не существует

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{\cos(x+y)}{(1-2xy)\cos(x-y)} \right)^{\frac{1}{|x|^3+|y|^3}}.$$

2. Найти жорданову форму вещественной матрицы A , а также такой многочлен $f(t)$ наименьшей степени, что матрица $f(A)$ подобна диагональной, а матрица $N = A - f(A)$ нильпотентна. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Найти уравнения диаметральных плоскостей для гиперболического цилиндра $5(x-1)^2 - (y-2)^2 = 1$, которые бы касались однополостного гиперboloида $x^2/2 + z^2 = 1 + y^2/17$.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2006 г.)

ВАРИАНТ 4.2

4. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \left(4x^3 \sin(y^2 + x^4) + e^{x^2 + \cos x^2} + 4y \right) dx + \left(2y \sin(x^4 + y^2) + y^{-\frac{1}{5}} \right) dy,$$

где $L: r = \varphi^{\frac{5}{2}}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (z^{2006k} - 1) \sin(z^{2006k})$ в круге $\{z: |z| < 1\}$.

6. Доказать, что при достаточно малых $|x^0|, |y^0|$ решение задачи Коши

$$\begin{aligned} x' &= -4y - x^3, & x|_{t=0} &= x^0, \\ y' &= x - y^7, & y|_{t=0} &= y^0 \end{aligned}$$

существует на всей полуоси $\{t > 0\}$.