ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

П. С. Колесников, 2013

1-й семестр

1. Векторные пространства. Матрицы и определители

Поле комплексных чисел. [1, гл.1; 3, § 17-19; 2, ч.1, гл.5, § 1]. Алгебраическая операция, поле. Поле комплексных чисел: конструкция в виде пар действительных чисел. Геометрическая интерпретация арифметических действий в поле **C**. Модуль и аргумент комплексного числа, их свойства. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из единицы. Отношение эквивалентности и разбиение множества на классы.

Системы линейных уравнений [1, гл.2, § 1; 2, ч.1, гл.1, § 3; 4, § 5]. Элементарные преобразования систем линейных уравнений. Эквивалентность систем линейных уравнений при элементарных преобразованиях. Приведение систем линейных уравнений к ступенчатому виду методом Гаусса. Исследование систем линейных уравнений. Необходимые и достаточные условия совместности и определенности систем линейных уравнений.

Векторные пространства [1, гл. 1, § 7, гл.2, § 2, гл.5, § 1; 2, ч.1, гл.2, § 1, ч.2, гл.1, § 2; 3, § 8, 9, 29, 30, 32; 4, § 6]. Векторные пространства. Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Линейные комбинации и линейная зависимость. Базис и размерность векторного пространства: существование и свойства. Координаты вектора. Изоморфизм векторных пространств одной размерности. Подпространства векторного пространства, сумма и пересечение подпространств, связь их размерностей.

Линейные отображения и матрицы [1, гл.2, § 3; 2, ч.1, гл.2, § 2, 3, ч.2, гл.2, § 1, 2; 4, § 1, 5, 7–10; 3, § 10–15]. Пространство линейных отображений L(U,V) и пространство матриц $M_{m,n}(\mathbf{R})$. Изоморфизм пространств L(U,V) и $M_{m,n}(\mathbf{R})$. Суперпозиция линейных отображений и произведение матриц. Обратимые преобразования и матрицы. Образ и ядро линейного отображения, связь их размерностей. Характеризация обратимого преобразования в терминах ядра и образа. Вертикальный и горизонтальный ранги матрицы, их равенство. Ранг матрицы как размерность образа соответствующего линейного преобразования. Ранг произведения матриц. Элементарные преобразования матриц, эквивалентность матриц одного ранга. Независимость числа главных неизвестных от способа приведения системы к ступенчатому виду. Теорема Кронекера–Капелли. Однородные системы, пространство решений, его размерность, фундаментальная система решений. Линейные многообразия и решения неоднородной системы линейных уравнений. Фактор–пространство, его размерность.

Определители [1, гл.2, § 4–5; 2, ч.1, гл.3; 4, § 2; 3, § 2–7]. Определитель квадратной матрицы, его основные свойства. Определитель матрицы как полилинейная кососимметрическая нормированная функция строк матрицы. Теорема об определителе транспонированной матрицы. Разложение определителя по любому столбцу. Присоединенная матрица и ее применение к нахождению обратной матрицы. Определитель произведения матриц. Формулы Крамера. Ранг матрицы как наибольший порядок ненулевых миноров. Теорема об окаймляющем миноре.

2. Алгебраические структуры (группы, кольца, поля)

Группы [2, ч.1, гл.4, § 1, 2, гл.1, § 8; 3, § 3, 63–65]. Алгебраическая система, подсистема, изоморфизм. Определение и примеры полугрупп. Теорема об обобщенной ассоциативности. Подгруппы, циклические группы. Порядок элемента и порядок порожденной им циклической группы. Симметрическая группа. Разложение подстановки на независимые циклы. Разложение подстановки в произведение транспозиций, независимость четности числа сомножителей от способа разложения. Знакопеременная группа, ее порядок. Теорема о полном развертывании определителя. Изоморфизм групп, теорема Кэли. Смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Нормальные подгруппы, фактор–группы. Основная теорема о гомоморфизмах групп.

Кольца. Поля [1, гл.1, гл.8, § 1, гл.3, § 10; 2, ч.1, гл.4, § 3, гл.5, § 1, 4; 3, § 43–45; 5, § 11–15]. Определение, примеры и общие свойства колец. Кольца многочленов и формальных степенных рядов. Гомоморфизм и идеалы колец. Фактор–кольцо и основная теорема о гомоморфизмах для колец. Кольцо Z_n. Подполе, расширение поля. Поле F_p. Теорема о простом подполе. Характеристика поля. Поле комплексных чисел: матричная конструкция, изоморфизм с конструкцией в виде пар действительных чисел. Групповые свойства корней из единицы. Максимальные идеалы колец и поля вычетов. Целостные кольца и поля частных, поле рядов Лорана.

Разложение в кольце многочленов [1, гл.3, § 1, 5; 2, ч.1, гл.5, § 2–3; 3, § 20, 21, 25, 50, 56; 5, § 16–18, 30, 31, 36]. Алгоритм деления с остатком.

Факториальные кольца, Н.О.Д. и Н.О.К. в факториальных кольцах. Евклидовы кольца. Алгоритм Евклида. Факториальность евклидовых колец. Примитивные многочлены. Лемма Гаусса. Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Неприводимые многочлены, признак неприводимости Эйзенштейна. Поле рациональных функций. Разложение рациональных функций на простейшие дроби.

Корни многочленов [1, гл.3, § 2; 2, ч.1, гл.6, § 1; 3, § 22, 38–40, 47–49; 5, § 27–29, 39]. Корни многочлена и линейные множители. Число корней многочлена. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона. Существование корня в расширении поля. Простое алгебраическое расширение поля. Поле разложения. Производная многочлена, формула Тейлора. Отделение кратных множителей. Формулы Виета.

2-й семестр

3. Кольца многочленов

Симметрические многочлены [1, гл.3, § 7, 8; 2, ч.1, гл.6, § 2; 3, § 51–54; 5, § 33–35]. Основная теорема о симметрических многочленах. Дискриминант многочлена. Формулы Ньютона. Результант двух многочленов как определитель наличия общих множителей. Результант как симметрическая функция корней.

Многочлены над числовыми полями [2, ч.1, гл.6, § 3, 4; 3, § 55; 1, гл.3, § 6]. Алгебраическая замкнутость поля **C**. Разложение многочленов на множители над полями комплексных и вещественных чисел. Разложение на неприводимые множители над полем рациональных чисел.

4. Линейные преобразования векторных пространств

Линейные преобразования и матрицы [1, гл.6; 4, §3, 8–11; 3, §31, 33, 62]. Матрица линейного отображения. Координаты образа вектора. Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базы. Однозначное определение линейного преобразования по образам базисных элементов. Операции над линейными преобразованиями. Характеристический многочлен матрицы. Подобие матриц. Совпадение характеристических многочленов подобных матриц. Теорема Гамильтона–Кэли. Инвариантные подпространства. Необходимые и достаточные условия существования инвариантных подпространств. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения матриц и линейных преобразований.

Линейная независимость векторов, соответствующих различным собственным значениям. Минимальные многочлены матриц и линейных преобразований.

Жорданова нормальная форма [1, гл.6; 2, Дополнение; 4, §12; 8; 3, § 61]. Нильпотентные линейные преобразования. Канонический вид матрицы нильпотентного линейного преобразования. Клетка и матрица Жордана. Минимальный и характеристический многочлен от матрицы Жордана. Многочлен от матрицы Жордана. Теорема Жордана – представление пространства в виде прямой суммы инвариантных корневых подпространств. Теорема Жордана – существование и единственность жордановой нормальной формы. Задача о подобии матриц. Приведение λ-матрицы к каноническому виду. Функции от матриц. Представление функций от матриц многочленами.

5. Евклидовы и унитарные пространства

Пространства со скалярным произведением [1, гл.5, § 4; 2, ч.2, гл.3, §1; 4, § 17; 3, § 34]. Аксиоматика и примеры унитарных и Евклидовых пространств. Длина вектора и расстояние между векторами. Неравенство Коши–Буняковского. Ортогональные системы векторов. Процесс ортогонализации Грамма–Шмидта. Ортогональные суммы и ортогональные дополнения. Представление пространства в виде ортогональной суммы подпространства и ортогонального дополнения.

Сопряженные, нормальные, унитарные и симметрические преобразования. [1, гл.5, § 2; 2, ч.2, гл.1, § 3, гл.3, §3; 4, § 18–20; 3, § 35–36]. Линейные функционалы и сопряженное пространство. Существование и единственность сопряженного преобразования. Нормальные преобразования. Канонический вид матрицы нормального преобразования унитарного пространства. Изоморфизм унитарных пространств. Канонический вид матрицы нормального преобразования Евклидова пространства. Унитарные и ортогональные преобразования. Канонический вид матриц унитарных и ортогональных преобразований. Эрмитовы и симметрические преобразования. Канонический вид матриц эрмитовых и симметрических преобразований. Положительные и неотрицательные эрмитовы преобразования. Основные свойства. Квадратный корень из неотрицательного эрмитова преобразования. Полярное разложение линейного преобразования.

6. Квадратичные формы [4, § 22–23; 3, § 26–28, 37].

Матрица квадратичной формы, ее поведение при замене переменных. Приведение квадратичной формы к главным осям. Алгоритм Лагранжа – приведение квадратичной формы к диагональному виду. Закон инерции квадратичных форм. Формулы Якоби – приведение квадратичной формы к диагональному виду. Необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичной формы. Одновременная диагонализация пары форм.

Практические занятия (темы, типичные задачи)

1-й семестр

1. Векторные пространства. Матрицы и определители.

1.1. Поле комплексных чисел: конструкция в виде пар действительных. Формула Муавра. Корни n-ой степени. (**7**, № 101, 105, 108, 109, 112, 113, 119, 137, 145; **6**, № 1717, 1718).

1.2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса [**6**, № 689, 706, 708, 712, 717, 721].

1.3. Векторные пространства [**6**, № 1285–1294, 1297–1300, 1308, 1310, 1277, 1280, 1282, 1327].

1.4. Матрицы [**6**, № 792, 801, 811, 814, 816, 818, 824, 829, 831], ранг матрицы [**6**, № 608, 612, 619, 623, 627, 1310, 1317].

1.5. Системы линейных уравнений [**6**, № 734, 735, 1320, 1331, 1343, 1346].

1.6. Определители [**6**, № 76, 557, 238, 254, 257, 280, 302, 308, 842, 846, 852, 861, 872].

2. Алгебраические структуры (группы, кольца, поля).

2.1. Примеры и простейшие свойства групп [**6**, № 1634–1636, 1642, 1645, 1647, 1648].

2.2. Группы подстановок [**6**, № 123, 129, 152, 157, 171, 178, 184, 198, 201, 1658].

2.3. Кольца. Поля. (**6**, № 1709–1716, 1721–1723, 1726, 1734, 1735, 1742). Дальнейшие свойства колец и полей [**6**, № 1719–1720, 1724, 1727, 1740, 1745, 1746].

2-й семестр

3. Кольца многочленов.

3.1. Корни многочленов [**7**, № 546–556, 570, 577–580, 585, 587, 589, 590, 624, 631–633].

3.2. Рациональные и вещественные корни [**7**, № 649–651, 653, 669, 680, 773–775, 780–781].

3.3. Симметрические многочлены [**7**, № 693–695, 697, 702–704, 723–726, 733].

4. Линейные преобразования векторных пространств.

4.1. Линейные преобразования и матрицы [**6**, № 1445, 1447, 1453, 1458, 1461].

4.2. Собственные векторы и собственные значения. Инвариантные подпространства [**6**, № 1465, 1477, 1479, 1487, 1492, 1494, 1499, 1504].

4.3. Жорданова форма [**6**, № 1510, 1512, 1531, 1534].

5. Евклидовы и унитарные пространства.

5.1. Ортогонализация [**6**, № 1360, 1363, 1367, 1370, 1419].

5.2. Сопряженные преобразования [**6**, № 1542, 1547, 1549, 1551].

5.3. Унитарные и симметрические преобразования. Полярное и сингулярное разложение [**6**, № 1571, 1576, 1586, 1587, 1598, 1623].

6. Квадратичные формы [**6**, № 1176, 1185, 1207, 1213, 1225, 1249, 1263].

Основное учебное пособие

Пожидаев А.П., Сверчков С.Р., Шестаков И.П.

Лекции по алгебре (Ч. 1, 2). НГУ: Новосибирск, 2012

Библиографический список

1. Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: Факториал, 1999.
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Части I-III, М.: Физ.-Мат. Литература, 2000.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. СПб., 2003.
4. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 2005.
5. ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
6. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Физматгиз, 1962 (–2006).
7. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. С-Пб., Лань, 2004.
8. Чуркин В. А. Жорданова классификация конечномерных линейных операторов / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1991.