Приложение 4

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Утверждено:
____
____
____
____
____

Программа

Государственного экзамена по математике

Направление подготовки

010100 – Математика

Все профили подготовки

Квалификация (степень) выпускника

Магистр

Форма обучения

Очная

Автор(ы): _____________проф. А.С. Морозов

Новосибирск 2014

Общие положения

Подготовка и проведение государственного экзамена регулируется Положением о государственном экзамене ММФ НГУ от 20 июня 2014 г. № 816-1.Государственный экзамен (ГЭ) входит в цикл «Государственная итоговая аттестация» (ГИА) и проводится с целью подтверждения базовых математических знаний. Сроки сдачи ГЭ, вид экзамена и перечень испытаний определяются Ученым советом факультета и фиксируются в программе экзамена. Студенты, не сдавшие ГЭ, не допускаются к защите ВКР.

I. Обратные задачи

Прямые и обратные задачи. Примеры. Некорректность.

Понятие корректности задачи математической физики. Определение. корректности по Адамару. Условная корректность.

Обратная задача акустики.

Сведение обратной задачи к задаче Гурса с данными на характеристике.

Сведение обратной задачи акустики к системе интегральных уравнений Вольтерра.

Интегральные уравнения Вольтерра первого рода. Некорректность. Регуляризация.

Интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Некорректность. Регуляризация.

Метод наискорейшего спуска. Метод простой итерации.

Компактный оператор A и некорректность задачи $Aq=f$.

Теоремы о сингулярном разложении матрица и компактного оператора.

Критерий Пикара.

Обратная задача для волнового уравнения. Сопряженная задача.

Градиент функционала невязки $J(q)= \langle Aq-f, Aq-f \rangle$.

Градиентный метод решения обратной задачи для волнового уравнения.

Вычисление производной Фреше в обратной задаче для волнового уравнения.

Сведение обратной задачи для волнового уравнения к семейству интегральных уравнений Фредгольма.

Метод Гельфанда-Левитана решения обратной задачи для обратной задачи для волнового уравнения.

Регуляризация операции дифференцирования.

Сходимость метода наискорейшего спуска.

Сходимость метода простой итерации.

Обратная задача электродинамики.

Метод регуляризации А.Н. Тихонова. Метод регуляризации М.М. Лаврентьева.

Рекомендуемая литература

1. М.М. Лаврентьев, В.Я. Савельев. Теория операторов и некорректные задачи, ИМ СО РАН, 2007 (второе издание).
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ*. – СПб.: Изд-во Невский Диалект, БХВ – Санкт-Петербург, 2004.
3. Треногин В.А. *Функциональный анализ. Учебник для вузов*. – М.:Физматлит, 2002.
4. Треногин В.А. *Задачи и упражнения по функциональному анализу. Учебное пособие*. – М.: Физматлит, 2002.
5. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной*. – М.: Гостехиздат, 1974.

II. Случайные процессы

Цепи Маркова. Определение. Основные свойства

Существенные и несущественные состояния. Классы сообщающихся состояний цепи Маркова. Теорема солидарности для периодов состояний.

Возвратность состояния цепи Маркова. Теорема солидарности для возвратных состояний цепи Маркова. Теорема солидарности для положительно возвратных состояний.

Теорема о том, что неразложимая цепь Маркова имеет стационарное распределение тогда и только тогда, когда все состояния положительно возвратны.

Теорема о предельном поведении переходных вероятностей неразложимой непериодичной цепи Маркова.

Ветвящиеся процессы (процессы Гальтона-Ватсона). Вероятность вырождения.

Свойства однородных процессов с независимыми приращениями.

Пуассоновский процесс. Непрерывность слева (справа) траекторий пуассоновского процесса. Совместное распределение скачков пуассоновского процесса.

Пуассоновское поле и его свойства.

Винеровский процесс. Недифференцируемость его траекторий.

Цилиндрическая σ-алгебра. Выборочное вероятностное пространство.

Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации процесса. Непрерывность траекторий винеровского процесса.

Закон повторного логарифма.

Гауссовские процессы.

Марковские процессы (с непрерывным временем). Критерий конечности процесса чистого рождения.

Переходные вероятности марковского процесса. Прямая и обратная системы дифференциальных уравнений Колмогорова.

Теорема о предельном поведении переходных вероятностей неразложимого марковского процесса.

Процесс рождения и гибели. Его стационарное распределение.

Система <M/M/1>. Стационарное распределение. Время ожидания обслуживания в системе <M/M/1>.

Система <M/G/1>. Переходные вероятности для вложенной цепи Маркова. Теорема о стационарном распределении для вложенной цепи Маркова.

Время ожидания обслуживания в системе <M/G/1>. Время занятости обслуживающего прибора в системе <M/G/1>.

Система <G/M/1>. Переходные вероятности для вложенной цепи Маркова. Стационарное распределение вложенной цепи Маркова.

Время ожидания обслуживания в системе <G/M/1>.

Система <G/G/1>. Время ожидания обслуживания.

Вложенное случайное блуждание для системы <G/G/1>.

Система <G/G/1>. Время ожидания обслуживания.

Процессы миграции (сети Джексона). Замкнутые процессы миграции. Открытые процессы миграции.

Функциональная центральная предельная теорема.

Сходимость процесса Бернулли к пуассоновскому процессу.

Критерий непрерывности процесса в L_2. Дифференцирование процессов в L_2.

Интеграл Римана для случайных процессов в L_2. Элементарная ортогональная стохастическая мера. Стохастический интеграл от неслучайной функции.

Стохастический интеграл Ито.

Теорема о существовании и единственности решения стохастического дифференциального уравнения.

Рекомендуемая дитература

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Либроком, 2009, 656 с.
2. Розанов Ю.А. Случайные процессы. Краткий курс. М.: Наука, 1979.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2005, 478 с..

III. Дополнительные главы математического анализа

1. Введение.
   1.1. Распределение Шварца и функции с обобщенными производными по Соболеву.
2. Пространства Лебега.
   2.1. Полнота и сепарабельность.
   2.2. Регуляризация распределений и функций из пространств Лебега.
   2.3. Предкомпактные множества. Условия предкомпактности.
   2.4. Дуальное (сопряженное) пространство. Рефлексивность.
3. Пространства Соболева.
   3.1. Определения и простейшие свойства. Полнота, сепарабельность и рефлексивность.
   3.2. Регуляризация функций пространств Соболева.
   3.3. Инвариантность при диффеоморфных заменах переменных.
4. Продолжения функций классов Соболева из области во все пространство.
   4.1. Операторы продолжения.
   4.2. Теоремы о продолжении.
5. Теоремы вложения и следы функций пространств Соболева на границе области.
   5.1. Теоремы вложения.
   5.2. Теоремы о следах на границе области.
6. Некоторые приложения теории распределений и теории функций пространств Соболева втеории уравнений с частными производными.
   6.1. Теорема Л. Шварца о гипоэллиптичности эллиптических линейных дифференциальныхоператоров.
   6.2. Теорема о непрерывности по Гельдеру частных производных l-го порядка l разнепрерывно дифференцируемых решений эллиптических систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (l=1,2,...).
   6.3. Теорема о регулярности (с точки зрения теории пространств Соболева) решенийравномерно эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами и правыми частями.

Рекомендуемая литература

1. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. - Новосибирск: Изд-во Сибирского отд-ния АН СССР, 1962.
2. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции, вып. 1 и 2. - М.: Физматгиз, 1959.
3. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 1. Теория распределений и анализ Фурье. - М.: Мир, 1986.
4. Adams Robert A. Sobolev spaces. Academic press. (New York --- San Francisco --- London), 1975.

5. Шварц Л. Комплексные аналитические многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964

VI. Вариационное исчисление

Производные Гато и Фреше

Формула Лагранжа. Неравенство Липшица

Связь между производными Гато и Фреше. Производная по направлению.

Производные высших порядков

Слабая полунепрерывность функционалов.

Условия слабой полунепрерывности выпуклых функционалов Условия слабой полунепрерывности дифференцируемых функционалов Экстремальные точки. Критические точки.

Теоремы Вейерштрасса для рефлексивных и нерефлексивных пространств.

Вариационные неравенства.

Выпуклые функции со значениями в $\bar{\mathbb{R}}$. Связь между выпуклостью и надшрафиком функции.

Полунепрерывнее снизу функции. Надграфик и поточечная верхняя грань для п. сн. функций.

Полунепрерывная снизу регуляризация функций.

Непрерывность выпуклых функций.

Поточечная верхняя грань непрерывных аффинных функций.

Г-регуляризация функций.

Сопряженные (полярные) функции. Свойства сопряжённых функций.

Вторая сопряжённая функция и её свойства.

Субдифференцируемость функций. Свойства субдифференциала.

Критерий непустоты субдифференциала.

Примеры сопряжённых функций и субдифференцимялов.

Субдифференцируемость дифференцируемой функции. Задача о равновесии мембраны. Функциональные ппространства.

а) Мембрана, содержащая разрез. Линейная задача.

б) Мембрана, содержащая разрез. Нелинейная задача. Контакт мембраны с тонким препятствием.

Линейная задача о равновесии пластины.

Контакт пластины с тонким препятствием.

Равновесие нелинейной мембраны с тонким препятствием.

Метод фиктивных областей в задаче Синьорини.

Рекомендованная литература

1. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений 1972.
2. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Изд-во «Мир». 1979.
3. Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. – М: Физматлит, 2010.

Вариант П2.Т1 - теория

1. Распределения Шварца и функции с обобщенными производными по Соболеву (определения).

2. Сформулировать теорему о регуляризации распределений.

3. Дать определение производной по Гато и Фреше.

4. Дать определение функции, сопряженной к данной.

5. Компактный(вполне непрерывный) оператор. Определение, основные свойства.

6. Понятие корректности по А.Н. Тихонову.

7. Приведите пример стохастически непрерывного процесса с разрывными траекториями.

8. Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, — Марковский процесс. Является ли случайная последовательность $\eta(n) = \xi(n^2)$, $n = 1, 2, ...$, цепью Маркова?

Вариант П2.Т2 - теория

1. Сформулировать теорему о непрерывности в целом функций пространств Лебега.

2. Сформулировать теорему вложения Соболева для пространств $W_p^l(U)$ в случае $lp > n$.

3. Дать определение субдифференциала функции.

4. Дать определение полунепрерывной снизу регуляризации.

5. Постановка обратной задачи акустики.

6. Теорема о корректности операторного уравнения на компакте(формулировка).

7. Может ли процесс с непрерывными траекториями не быть стохастически непрерывным?

8. Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, — Марковский процесс. Является ли случайная последовательность $\eta(n) = \xi(1 - n^{-1})$, $n = 1, 2, ...$, цепью Маркова?

Вариант П2.З1 - задачи

1. Доказать, что δ-функция Дирака ($\delta(\varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$) не является регулярным распределением.

2. Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с гладкой границей, а $\omega \subset \Omega$ – подобласть с гладкой границей, лежащая строго внутри Ω. Доказать разрешимость задачи минимизации

$$\inf_{v \in K} \{ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int\limits_{\Omega} gv \},$$

где $g \in L^2(\Omega)$ – заданная функция,

$$K = \{ v \in H_0^1(\Omega) | \ \nabla v = 0 \ \text{ п.в. на } \omega \}.$$

3. Построить пример Адамара для задачи Коши для уравнения Лапласа.

4. Пусть $\xi(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью 2. Найдите вероятность

$$\mathbf{P}(1 \leq \xi(1) \leq \xi(2) - 1).$$

Вариант П2.З2 - задачи

1. Доказать, что определение понятия следа функции пространства Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ на границе области U, обладающей свойством равномерной C^l-регулярности, не зависит от выбора регуляризирующей последовательности $\{f_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$.

2. Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с гладкой границей. Доказать разрешимость задачи минимизации

$$\inf_{v \in K} \{ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int\limits_{\Omega} gv \},$$

где $g \in L^2(\Omega)$ – заданная функция,

$$K = \{ v \in H_0^1(\Omega) | \ |\nabla v| \leq 1 \ \text{ п.в. на } \Omega \}.$$

3. Построить регуляризацию операции дифференцирования.

4. Пусть $\xi(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью 1. Найдите вероятность

$$\mathbf{P}(1 \leq \xi(2) \leq \xi(3) - 1).$$